МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

УДК 004.932

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ РАСТРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАФА

А. В. Аллилуева

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье рассматривается преобразование Хафа — мощный метод для обнаружения геометрических объектов на растровых изображениях, который находит широкое применение в области компьютерного зрения и обработки изображений. Мы анализируем основные принципы работы алгоритма, включая процесс голосования в параметрическом пространстве и формирование накопительного пространства. Приведена программная реализация метода.
Ключевые слова: преобразование Хафа, растровые изображения, параметрическое пространство, параметры, аккумулятор, компьютерное зрение, анализ изображений, детекция границ, оператор Кэнни, полярная система координат.

Введение

В современном мире растровые изображения играют ключевую роль в различных областях, включая компьютерное зрение, медицинскую диагностику, робототехнику и многие другие. Эти изображения представляют собой сетку пикселей, где каждый пиксель содержит информацию о цвете и яркости, что делает их удобными для визуализации и анализа данных. Однако для эффективного использования растровых изображений в автоматизированных системах необходимо идентифицировать геометрические элементы, такие как линии, круги и другие фигуры.

Идентификация этих элементов позволяет не только улучшить качество обработки изображений, но и значительно расширить возможности их применения. Одним из наиболее эффективных методов для этой задачи является преобразование Хафа. Этот метод позволяет преобразовать изображение из пространственной области в параметрическую, что упрощает задачу поиска геометрических форм.

В данной статье рассматриваются основы преобразования Хафа, его применение для идентификации геометрических элементов в растровых изображениях.

1. Алгоритм обнаружения прямых линий

Метод основывается на параметрическом описании искомых форм, что позволяет эффективно выявлять их в пространстве изображения. Для прямой линии, описываемой уравнением: $y = mx + c$, используются два параметра: наклон m и пересечение с осью c. Однако в контексте преобразования Хафа предпочтительнее использовать полярную форму записи уравнения прямой: $r = x\cos(\theta) + y\cos(\theta)$.

В этой формулировке также используются два параметра: r и θ. Здесь r — расстояние от начала координат до ближайшей точки на линии, а θ — угол наклона линии относительно положительного направления оси абсцисс. В этой формулировке также используются два параметра: r и θ.

Процесс обнаружения линий начинается с вычисления значений параметров (r, θ) для каждого пикселя изображения, который соответствует границе. Для каждой точки (x_i, y_i) на изображении генерируется уникальная пара параметров. Все точки, принадлежащие одной прямой, будут иметь одинаковую пару (r, θ).

На следующем этапе осуществляется процесс голосования: каждая пара параметров, полученная из пикселей изображения, увеличивает значение в соответствующей ячейке двумерного массива голосов (аккумулятора). Это позволяет накопить информацию о количестве пикселей, поддерживающих каждую потенциальную линию.

После завершения этапа голосования необходимо определить пары параметров с наибольшим количеством голосов. Каждая из таких пар соответствует линии на исходном изображении. Если на изображении присутствует несколько линий, например, пять, то пять точек с наибольшим количеством голосов будут представлять эти линии. В заключение, линии восстанавливаются в исходном изображении с использованием найденных параметров.

2. Алгоритм обнаружения окружностей

Основной принцип данного метода также заключается в параметризации окружности, которая определяется тремя ключевыми параметрами: координатами центра окружности (a,b) и радиусом r. Уравнение окружности может быть записано в следующем виде:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Процесс обнаружения окружностей начинается с создания трехмерного аккумулятора, в котором хранятся голоса для каждого возможного сочетания параметров (a,b,r). Размеры данного массива зависят от диапазонов значений, которые могут принимать параметры. В частности, координаты a и b определяются в пределах размеров изображения, тогда как радиус r варьируется от минимального до максимального значения, заданного исследователем.

На следующем этапе осуществляется процедура голосования. Для каждого пикселя (x,y) в изображении, соответствующего границе (что обычно достигается с помощью детекторов границ), выполняются вычисления параметров окружности. Для каждого значения радиуса r в заданном диапазоне рассчитываются координаты центра окружности (a,b) по формулам: $a=x-r\cos(\theta)$ и $b=y-\sin(\theta)$, где θ — угол, пробегающий значения от 0 до 2π (или от 0 до 360 градусов). После вычисления значений (a,b,r) происходит инкрементирование соответствующего элемента в аккумуляторе на единицу, что отражает голосование за наличие окружности с заданными параметрами.

По завершении процесса голосования необходимо выявить локальные максимумы в трехмерном аккумуляторе. Эти максимумы указывают на параметры окружностей, наиболее вероятно присутствующих в изображении.

Наконец, параметры найденных максимумов (a,b,r) могут быть использованы для восстановления окружностей на исходном изображении. Это достигается путем рисования окружностей с найденными центрами и радиусами.

3. Реализация метода Хафа с использованием языка программирования Python и библиотеки OpenCV

В приведенном ниже коде реализован алгоритм обнаружения линий на изображении с использованием преобразования Хафа. Процесс начинается с предобработки изображения, включает этапы детекции границ и применения преобразования Хафа, а затем визуализирует результаты на исходном изображении. Данный подход демонстрирует основные принципы работы с алгоритмами компьютерного зрения и может быть использован в различных приложениях для анализа изображений.

Изображение считывается с помощью функции cv2.imread(), после чего преобразуется в градации серого с использованием cv2.cvtColor(). Это необходимо для упрощения анализа, так как цветовая информация не требуется для обнаружения границ.

Применяется оператор Кэнни (cv2.Canny()), который выполняет детекцию границ в изображении. Этот оператор использует два порога для фильтрации шумов и выделения значительных границ, что позволяет получить бинарное изображение, где белые пиксели представляют собой обнаруженные границы.

Функция cv2.HoughLines() используется для нахождения параметров линий в бинарном изображении границ. Преобразование Хафа позволяет представлять линии в полярной системе координат (ρ,θ), где ρ — расстояние от начала координат до линии, а θ — угол между осью x и линией.

Для каждой найденной линии вычисляются координаты концов отрезка, который представляет эту линию. С помощью функции cv2.line() эти линии рисуются на оригинальном изображении, что позволяет визуализировать результат работы алгоритма.

```
import cv2
import numpy as np

def hough_transform(image_path, output_path):
    image = cv2.imread(image_path)
    gray = cv2.cvtColor(image, cv2.COLOR_BGR2GRAY)

    edges = cv2.Canny(gray, 50, 150, apertureSize=3)

    lines = cv2.HoughLines(edges, 1, np.pi / 180, 200)

    if lines is not None:
        for rho, theta in lines[:, 0]:
            a = np.cos(theta)
            b = np.sin(theta)
            x0 = a * rho
            y0 = b * rho
            x1 = int(x0 + 1000 * (-b))
            y1 = int(y0 + 1000 * (a))
            x2 = int(x0 - 1000 * (-b))
            y2 = int(y0 - 1000 * (a))
            cv2.line(image, (x1, y1), (x2, y2), (0, 255, 0), 2)
```

Метод Хафа может быть особенно полезен в системах автономного вождения для распознавания дорожной разметки, включая линии между полосами движения, границы дороги и других элементов.

Для примера возьмем изображение дороги с размеченными полосами (рис. 1).

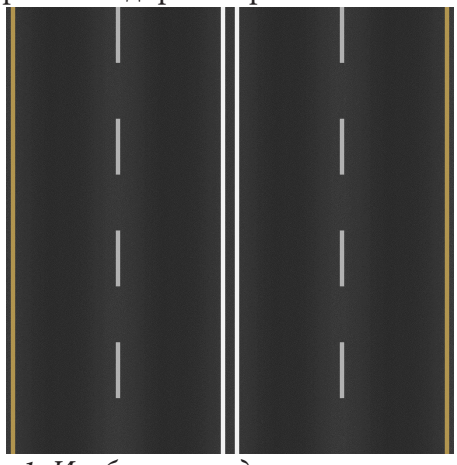


Рис. 1. Изображение дороги с разметкой

Попробуем при помощи приведенной выше программной реализации метода Хафа для поиска линий идентифицировать разметку на изображении, получим результат на рис. 2.

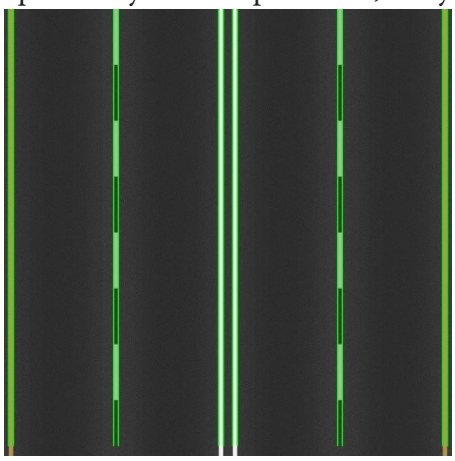


Рис. 2. Изображение с идентифицированной разметкой

В результате работы алгоритма нам удалось распознать разметку на дороге, полученная информация может быть полезна для разработки беспилотного автомобиля (автомобиль, оборудованный системой автоматического управления, который может безопасно передвигаться без участия человека).

Заключение

В данной статье был рассмотрен метод Хафа, его использование для обнаружения прямых линий и окружностей, а также реализация на Python для идентификации дорожной разметки. Метод показал высокую эффективность в задачах компьютерного зрения, что имеет значительное значение для систем безопасности на дорогах и автономных транспортных средств.

Литература

1. *Гонсалес Р.* Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс ; перевод с английского В. В. Чепыжова. – Москва : Техносфера, 2006. – 616 с.

2. *Кудрина М. А.* Использование преобразования Хафа для обнаружения прямых линий и окружностей на изображении/ М. А. Кудрина // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – № 4(2). – С. 476–478.

3. *Гонсалес Р.* Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Р. Гонсалес, Р. Вудс; перевод с английского П. А. Чочиа. – Москва : Техносфера, 2005. – 1072 с.

4. *Щекачева А. В.* Выделение линий на изображении с помощью преобразований Хафа / А. В. Щекачева, О. Л. Куляс // «Научно-практический электронный журнал Аллея Науки. – 2019. – № 1(28). – С. 1–12.

5. *Ершов Е. И.* Быстрое преобразование Хафа как инструмент анализа двумерных и трехмерных изображений в задачах поиска прямых и линейной кластеризации. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук: 05.13.17/ Николаев Дмитрий Петрович ; ИППИ РАН. – Москва, 2018. – 118 с.

6. Российская государственная библиотека : официальный сайт. – Москва, 1999. – URL: http://www.rsl.ru (дата обращения: 26.06.2019).

УДК 004.72:519.1

МОДЕЛЬ И МЕТОДИКА ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА В СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ РИСКОВ

А. В. Ананьев[1], К. С. Иванников[2], В. А. Печкарев[1]

[1]Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж
[2]АО НПП «Радар ммс»

Аннотация. В статье рассмотрен выбор оптимального маршрута в сетевой структуре на примере информационного обмена в воздушной сети связи, представленной в виде ориентированного графа. Приведена модель оптимального выбора маршрута между узлами графа на основе решения линейной дискретной оптимизационной задачи для достижения минимума суммарного риска на выбранном маршруте для заданных истока и стока в графе. В основу физической сущности риска положена вероятность ошибки при передаче информации между узлами, помноженная на агрегированный коэффициент негативных последствий. В моделях, отражающих действительность, риск исходит от внешних систем и может применительно к сетям связи, заключаться в утрате узлов, потере информации и т. д. Для определения весовых коэффициентов риска предложена методика имитационного моделирования радиодоступности. Для частного формального примера получена оценка риска, взаимоувязанная с вероятностями передачи информации и потерями на маршруте между узлами.
Ключевые слова: теория рисков, оптимальный маршрут, ориентированный граф, оптимизационная задача, оценка рисков, агрегирование рисков, сетевые структуры.

Введение

Представление исследуемых объектов в виде сетевых структур является широко распространённым подходом в самых разных областях деятельности. В промышленном производстве модели сетевых структур позволяют упорядочить, оценить эффективность отношений подчиненности, рыночных взаимосвязей: цепей контрактов, заказов на продукцию и логистики. В транспортных системах, представляющих собой отрасль сферы услуг по перевозке грузов и пассажиров, модели сетевых структур позволяют оптимизировать инфраструктуру автомобильных и железных дорог, каналов, трубопроводов, размещение терминалов, включающих железнодорожные и автобусные станции, аэропорты, морские и речные порты, а также оценить эффективность средств передвижения.

Особую значимость имеет моделирование сетевых структур для изучения сетей связи, позволяя исследовать практически весь спектр системных показателей, включая точность и скорость передачи информации, помехоустойчивость, степень искажения и помехозащищенность, пропускную способность, задержки в каналах связи и др. Совокупность показателей ложится в основу выбора оптимального маршрута и является задачей поиска единственного пути с наименьшим риском из всех возможных вариантов, решаемой за счет разработки математических моделей и методик на основе теории множеств, нечеткой логики, нечетких множеств, теории массового обслуживания, теории графов, теории рисков, теории потоков и т. д.

Вопросам выбора оптимального маршрута с учетом рисков посвящены работы авторов Ананьева А. В. [1, 2], Городецкого А. Е. [3], Мартынюка И. В. [4], Ермакова С. А. [5], Салухова В. И. [6], Богомолова А. П. [7], Чуднова А. М. [8], Спириной У. А. [9], Боева С. Ф., Тимошенко А. В. [10]. Представленные работы не в полной мере учитывают агрегирование рисков от внешних систем, взаимоувязанных с внутренними показателями, характеризующими качество объекта или системы.

Наиболее близким по физическому представлению неклассического риска является работа [11], в которой принято допущение о том, что все узлы связи находятся одновременно в зоне действия всех наблюдаемых источников потерь или в упрощенном варианте — дестабилизирующих факторов. Однако очевидно, как минимум с позиций радиодоступности, что это допущение необходимо снять. В связи с этим, целью работы является разработка модели выбора оптимального маршрута и методики ее оценки на примере маршрутов передачи информации в воздушной сети связи (ВСС) с учетом неоднородности рисков по отношению к различным узлам сетевой структуры.

1. Математическая модель выбора маршрута передачи информации воздушной сети связи

1.1. Исходные данные

Пусть имеется ВСС, представляющая собой ориентированный граф, ребрами которого являются маршруты передачи информации [12]. Вершины графа представляют собой некоторые узлы, в которых происходит распределение маршрутов по направлениям с вершиной откуда начинается маршрут передачи информации и стоком, где он заканчивается. Если сеть имеет N вершин, то номер стока будем считать равным N, истока — 1.

Ставится задача определить оптимальный маршрут передачи информации от источника к стоку, чтобы суммарный риск для воздушной сети связи был минимальным.

Исходными данными описанной задачи является матрица оценок рисков определяемые выражением:

$$\mathrm{R}_{i,j} = (1 - P_{i,j}) \cdot C_{\sum_{i,j}}, \tag{1}$$

где $P_{i,j}$ — вероятности передачи информации (связи) от i-го узла к j-му; $C_{\sum_{i,j}}$ — суммарный (агрегированный) коэффициент негативных последствий при передаче информации от i-го узла к j-му определяемый выражением:

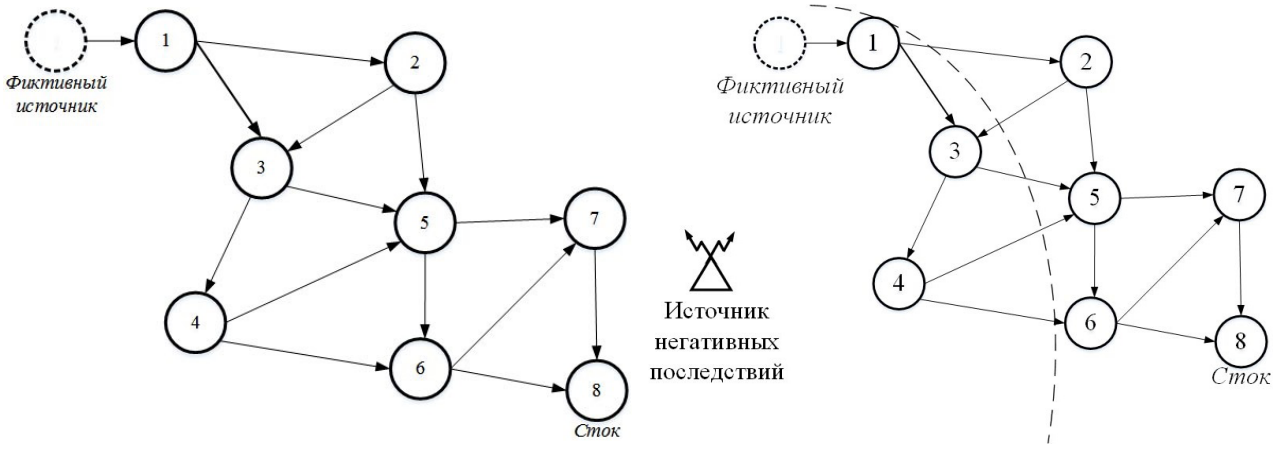
$$C_{\sum_{i,j}} = \sum_{k=1}^{K} C_{i,j}^{k}, k = 1..K, \tag{2}$$

где $C_{i,j}^{k}$ — коэффициенты потерь при передаче информации по маршрутам между узлами ВСС, K — количество типов (вариантов) негативных последствий, сопутствующих передаче информации (связи) от i-го узла к j-му.

Для ВСС существуют следующие риски при передаче информации по маршрутам между узлами ВСС [13]: вскрытие функционирования узлов ВСС с последующим их уничтожением, перехват управления воздушной платформы с последующим захватом для незаконного реверс-инжиниринга, подмена навигационных сигналов («спуфинг»), вскрытие информационного обмена с последующим нанесением вреда потребителям услуг связи и т. д.

В связи с тем, что $P_{i,j}$ — вероятность передачи информации (связи) от i-го узла к j-му также в общем случае зависит от уничтожения узлов, предлагаемый в работе риск в виде выражения (1) валиден только в случае правильного трактования его сущности. Прежде всего правильность трактования обеспечивается логичным разделением вероятности «непередачи информации» и ее последствий в виде потерь. Так, например, нелогично вносить в выражение (2) уничтожение воздушного узла, так как это повлечет за собой «непередачу информации».

Для сравнительной оценки проведем расчеты с использованием графов условных ВСС при учете только вероятностных показателей и при учете рисков, определяемых выражением (1). На рис. 1 представлена ВСС в виде ориентированного графа в нормальных условиях без искусственных дестабилизирующих воздействий (рис. 1а) и в условиях воздействия источника негативных последствий (рис. 1б).



а) *б)*

а) в нормальных условиях; б) в условиях воздействия источника негативных последствий

Рис. 1. ВСС, представленная в виде ориентированного графа

Для снятия ограничений, принятых в работе [11], на рис. 1 введено обозначение «зона влияния внешних источников негативных последствий».

1.2. Построение математической модели выбора оптимального маршрута передачи данных в ВСС на основе теории рисков

Для определения оптимальных путей передачи потоков в сетевой структуре введем некоторые переменные [14, 15]:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если маршрут проходит между вершинами } i \text{ и } j; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Ввиду того, что показатели матрицы оценок рисков передачи информации в ВСС являются «негативными», то можно определить критерий, имеющий смысл минимума суммарного риска на выбранном маршруте для заданных истока и стока в графе [16]:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{R}_{ij} x_{ij} \to \min \tag{5}$$

Введем ограничения для решения поставленной задачи:

1. Если маршрут передачи информации проходит через узел (кроме источника и стока), то он должен это делать максимум один раз.

2. Если маршрут выходит из какого-то узла (кроме источника и стока), то он должен это делать также максимум один раз.

3. От источника маршрут должен обязательно выходить (один раз), а в сток обязательно единожды заходить.

4. Маршрут передачи информации должен быть связным, то есть если в любой узел (кроме источника и стока) может входить, то из этого узла он также должен выходить, а если не входит, то не должен выходить.

5. Вид переменных должен быть двоичным (бинарным).

Используя критерий (5) и введенные ограничения, получим задачу линейной дискретной оптимизации вида, позволяющую определить оптимальный маршрут передачи информации в ВСС.

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{R}_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} x_{ij} \le 1; \quad j = 2,3,...,N-1, \\ \sum\limits_{j=1}^{N} x_{1j} = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{N} x_{iN} = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{N} x_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{N} x_{kj}; \quad k = 2,3,...,N-1, \\ x_{ij} - \text{двоичные}, \quad i, j = 1,2,...,N \end{cases}, \qquad (6)$$

где 1 — исток, N — сток.

Решение оптимизационной задачи (6) необходимо проводить по рассчитанной матрице оценки рисков (1).

2. Методика решения оптимизационной задачи на основе определения рисков путем имитационного моделирования радиодоступности

Для решения оптимизационной задачи необходимо определить коэффициенты негативных последствий при передаче информации по маршрутам между узлами ВСС, что возможно осуществить за счет имитационного моделирования [17, 18] радиодоступности для спуфинга. Основанием использования радиодоступности являются основные условия подмены навигационного сигнала: превышение энергетики ложного сигнала над полезным.

Рассмотрим порядок моделирования уровня напряженности электрического поля для случая радиосвязи: наземная антенна поднята на 3 метра, бортовая антенна находится на высоте 300 метров относительно уровня моря. Дальность радиосвязи — 120 километров выбрана исходя из максимального радиуса действия сети ВСС в соответствии с ее предназначением. Высота растительности, тип местности, тип климата выбраны для средней полосы России, что соответствует точке стояния. Для расчета радиовидимости используется топографическая карта формата SXF и матрица высот, включающая естественный и искусственный рельеф местности в формате MTWZ.

На рис. 2 представлены рассчитанные зоны радиовидимости для нормальных условий без искусственных радиоэлектронных помех (зона зеленого цвета); при навязывании ложных режимов работы для узлов 1, 3, 4, 5, 6 ВСС (зона желтого цвета с наименованием «УГРОЗА 2»); при подавлении узлов 1, 3, 4 за счет искусственных дестабилизирующих воздействий (зона красного цвета с наименованием «УГРОЗА 1»). Результаты имитационного моделирования для всех случаев показали, что в условиях навязывания ложных режимов работы от объекта угрозы 2 максимальная дальность радиовидимости составила 108 километров от наземной антенны, а при подавлении ВСС за счет искусственных дестабилизирующих воздействий от объекта угрозы 1 максимальная дальность радиовидимости составила 45 км.

Проведем расчеты коэффициента потерь на основе экспертных оценок методом анализа иерархий (табл. 1) [19, 20]. В качестве критериев выбраны зоны радиодоступности для $K = 1$ при отсутствии естественных дестабилизирующих воздействий, при воздействии угрозы 2, при воздействии угрозы 1.

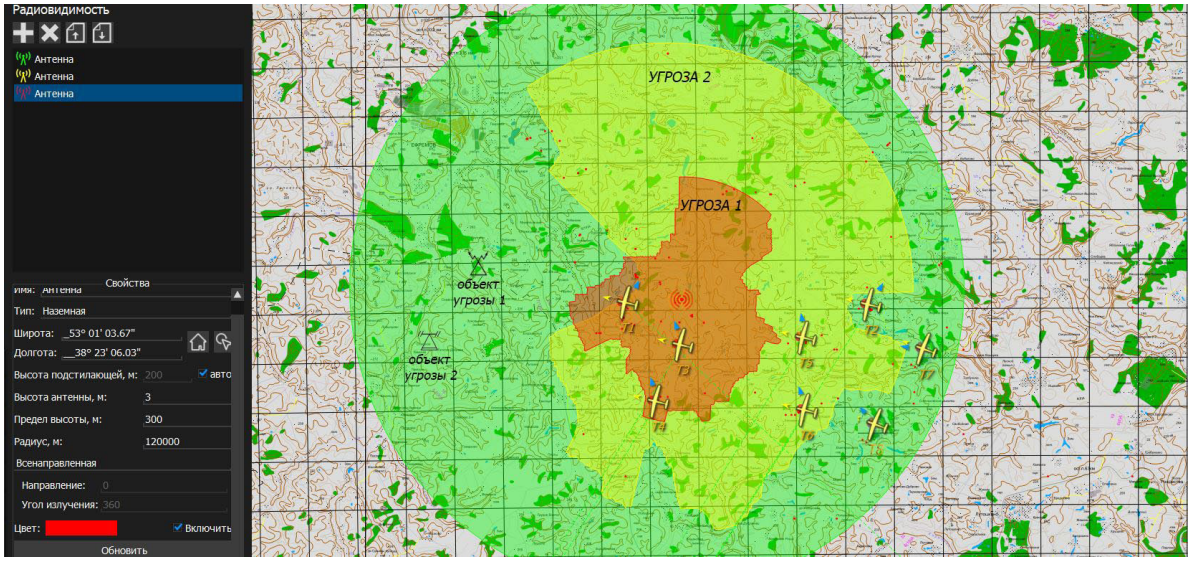


Рис. 2. Рассчитанные зоны радиовидимости ВСС с учетом подавления и навязывания ложных режимов работы узлам ВСС

Таблица 1

Матрица парных сравнений коэффициентов негативных последствий от спуфинга

Номер узла	1	2	3	4	5	6	7	8	Вектор приоритетов
1	1	3	1	1	2	2	3	3	0,206759
2	1/3	1	3	3	2	2	1	1	0,157101
3	1	1/3	1	1	2	2	3	3	0,157101
4	1	1/3	1/2	1	2	2	3	3	0,157101
5	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	2	2	0,096833
6	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	2	2	0,096833
7	1/3	1	1/2	1/3	1/2	1/2	1	1	0,064136
8	1/3	1	1/2	1/3	1/2	1/2	1	1	0,064136

Для расчета оценок рисков необходимо учесть усеченную матрицу радиовидимости для случая передачи информации по маршруту от узла к узлу, измеряемой в километрах.

Проведем расчеты оценок риска передачи информации (1), используя исходные данные вероятностей передачи информации и коэффициентов потерь от спуфинга.

В табл. 2 представлены округленные до десятых долей значения оценки рисков.

Таблица 2

Матрица оценок рисков передачи информации между узлами ВСС

Номер узла	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0,2107	0,278124	1	1	1	1	1
2	1	1	0,7108	1	0,501114	1	1	1
3	1	1	1	0,240192	0,430344	1	1	1
4	1	1	1	1	0,16848	0,2574	1	1
5	1	1	1	1	1	0,10148	0,08496	1
6	1	1	1	1	1	1	0,065808	0,12796
7	1	1	1	1	1	1	1	0,01326
8	1	1	1	1	1	1	1	1

В результате расчетов получены следующие результаты. Оптимальный маршрут передачи информации при использованиях исключительно вероятностной метрики проходит между узлами 1, 3, 4, 6, 8. При использовании рисков (1) маршрут передачи информации будет проходить по узлам 1, 2, 5, 7, 8.

Заключение

В результате проведенных расчетов можно сделать вывод, что разработанный подход к определению оптимальных маршрутов с использованием риска дает отличительные результаты и позволяет учесть негативное воздействие внешних систем.

Для определения коэффициентов негативных последствий использованы парные сравнения, основанные на имитационном моделировании радиодоступности, что имеет важное значение для практической реализации предложенного подхода.

Литература

1. *Ананьев А. В., Багдасарян А. С., Кащенко Г. А., Кащенко А. Г.* Минимизация рисков несанкционированного доступа к информации в наземных и аэромобильных радиосетях критически важных объектов методами многокритериальной многопутевой маршрутизации // Труды НИИР. – 2017. – № 2. – С. 2–6.

2. *Ананьев А. В., Ерзин И. Х., Стафеев М. А., Федюнин П. А.* Магистральные аэромобильные сети связи на стратосферных беспилотных летательных аппаратах и сценарное формирование базы данных рациональной маршрутизации // Специальная техника. – № 2. – 2017. – С. 7–10.

3. *Городецкий А. Е., Тарасова И. Л.* Алгоритмы логико-лингвистических оценок рисков при выборе оптимального маршрута движения // Математические методы в технологиях и технике. – № 9. – 2022. – С. 55–64.

4. *Мартынюк И. В.* Выбор оптимальных маршрутов перевозок опасных грузов по результатам оценки рисков возникновения нарушений безопасности движения и ущербов от них // Вестник ростовского государственного университета путей сообщения. – № 3. – 2006. – С. 103–106.

5. *Ермаков С. А.* Аппарат нечетких множеств и нечеткой логики как средство риск-анализа беспроводных систем связи // Информационная безопасность. – 2010. – № 4. – С. 607–610.

6. *Салухов В. И., Шевченко О. И.* Моделирование и управление рисками при проектировании и строительстве сетей связи // Проблемы анализа риска. – № 3. – 2014. – С. 48–67.

7. Модель исследования влияния деструктивных воздействий на элементы сетевой системы обмена информацией сложной топологии / разработчики Богомолов А. П., Подрезов С. Н. – Москва : 1С, 2017.

8. *Чуднов А. М., Положинцев Б. И., Кичко Я. В.* Анализ помехозащищенности обмена данными группы беспилотных летательных аппаратов в условиях оптимизированных помех // Радиотехника. – 2020. – № 12. – С. 33–47.

9. *Спирина У. А., Козлов С. В.* Метод маршрутизации, обеспечивающий повышение пропускной способности IP сетей в условиях внутрисистемных помех // Журнал радиоэлектроники. – 2015. – № 12. – С. 1–10.

10. *Боев С. Ф., Логовский А. С., Казанцев А. М., Ивойлова А. В., Тимошенко А. В.* Применение сетевой модели на основе многовариантных графов с динамической структурой для формирования планов графиков создания радиолокационных станций дальнего обнаружения // Радиопромышленность. – 2020. – № 3. – С. 8–20.

11. *Ananev A. V., Ivannikov K. S.* Risk-model for communication networks operation stability assessment // Journal of Physics: Conference Series. 2021 J. Phys.: Conf. Ser. 1902 012028. May 2021. – DOI:10.1088/1742-6596/1902/1/012028.

12. *Омельченко А. В.* Теория графов. – 3-е изд. – Москва : МЦНМО, 2018. 416 с.

13. *Ананьев А. В., Змий Б. Ф., Кащенко А. Г.* Оценка риска влияния физических и информационных разрушающих воздействий на аэромобильную сеть связи // I Всероссийская научно-практическая конференции «Авионика». Актуальные вопросы состояния, эксплуатации, и развития комплексов бортового РЭО воздушных судов, проблемы подготовки специалистов: тезисы докладов (Воронеж, 19–21 апреля 2016). – Воронеж : ВУНЦ ВВС «ВВА», 2016. – С. 22–26.

14. *Лёгкий А. С., Аскерко А. В., Курочка В. С.* Определение значений весового коэффициента структурной значимости узла связи в графе сети // Известия тульского государственного университета. технические науки. – 2021. – № 8. – С. 93–98.

15. *Ahuja R. K.* Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications / R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, J. B. Orlin. – USA : Prentice Hall, 2017 – 864 p.

16. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Э. Майника. – 2-е изд. –Москва : Мир, 2013. – 324 с.

17. *Богоявленский С. Б., Стоноженко И. В.* Оценка рисков. Учебное пособие. – СПб. : СБбГЭУ, 2021. – 109 с.

18. *Гипич Г. Н., Евдокимов В. Г., Куклев Е. А., Шакпкин В. С.* Риски и безопасность авиационных систем. – 2-е изд. – Москва : ФГУП ГосНИИ ГА, 2013. – 232 с.

19. *Саати Т. Л.* Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. – 2-е изд. – Москва : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 360 с.

20. *Пономарева А. Н.* Использование метода анализа иерархий в отборе приоритетных критериев анализа инновационной деятельности предприятий. // Актуальные вопросы экономических наук. – 2010. – № 11-1. – С. 235–240.

УДК 004.056

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗЛОУМЫШЛЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ОБЪЕКТ ЗАЩИТЫ

К. Г. Арикова

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В ходе формализации проведено моделирование деструктивных локально-субъектных воздействий в виде несанкционированного доступа к объекту защиты, в качестве которого выступает объект критической информационной инфраструктуры. Моделирование позволяет определить критические моменты в системе, когда она наиболее уязвима к атакам, что помогает частично решить проблему их возникновения и найти способы предотвращения атак. Помимо этого, формализация позволяет выявить день, в который атака на информационную систему более вероятная, с целью готовности специалистов в области информационной безопасности и компонентов защиты ей противостоять.

Ключевые слова: атака, злоумышленное воздействие, информационная безопасность, информационная система, критическая информационная инфраструктура, критический период, несанкционированный доступ, угроза информационной безопасности, формализация, D-моделирование.

Введение

Критическая информационная инфраструктура (далее — КИИ) включает в себя элементы, обеспечивающие жизненно важные функции общества, сбой или повреждение которых может привести к серьезным последствиям, угрожающим безопасности обществу. С каждым годом увеличивается количество кибератак на различные объекты инфраструктуры, при этом злоумышленники используют всё более сложные методы для компрометации систем, что требует разработки новых подходов к безопасности. Одним из таких подходов является моделирование злоумышленных воздействий для прогноза интенсивности и возникновения атак, что способствует их предотвращению.

Моделирование злоумышленных воздействий

Одной из самых часто эксплуатируемых угроз является несанкционированный доступ (далее — НСД), моделирование таких злонамеренных воздействий позволяет выявить слабые места и разработать стратегии для их усиления, что способствует минимизации негативных последствий для объекта КИИ и повышению общей устойчивости к кибератакам. В качестве способа моделирования выбрано D-моделирование, которое предоставляет возможность прогнозирования развития событий информационной безопасности при реализации различных категорий угроз.

Для D-моделирования злоумышленных воздействий на объект КИИ принимаются следующие предположения: случайность во времени совершения каждой попытки НСД, не зависимой от состояний системы; неизменность интенсивности во времени; длительность самой попытки НСД меньше интервалов между соседними попытками; каждая последующая попытка НСД не зависит от предыдущих попыток.

При моделировании локально-субъектных воздействий, выполняемых единолично злоумышленником, используется формула (1), где $p(k,t)$ — вероятность, что за время t сделано k попыток НСД, γ — интенсивность воздействия.

$$p(k,t) = \frac{(\gamma * t)^k}{k!} e^{-\gamma * t}. \quad (1)$$

Суммарная вероятность реализации некоторого числа попыток НСД в систему, выполняемых несколькими злоумышленниками, рассчитывается по следующему алгоритму:

1. Разработка логической модели;

2. Для каждого из злоумышленников определение вероятности воздействий для необходимого количества попыток;

3. Исходя из логической модели нахождение общей вероятности, на основе которой формируется функция, определяющая в свою очередь вероятность воздействия на систему двух злоумышленников;

4. Моделирование злоумышленных воздействий на основе полученной функции.

В ходе моделирования будут рассмотрены деструктивные воздействия на объект КИИ двумя независимыми субъектами. Интенсивность воздействия первого злоумышленника принята за $\gamma_1 = 0{,}18$, второго злоумышленника: $\gamma_2 = 0{,}36$. Допустимая вероятность взята за $P_{ДОП} = 0{,}3$. В условиях реальной защиты объекта КИИ данные параметры устанавливаются экспертной группой, которые однозначно определяют уровень защищенности системы, анализируют статистические данные эксплуатации угроз, степени их разрушительности и другие факторы, влияющие на безопасность объекта защиты.

Первым этапом в моделирования выступает разработка логической модели воздействий на систему, которая принимает некоторое число состояний, формирующие правило получения НСД. Разработана логическая модель, представленная в виде формулы:

$$\mathrm{A} = (\mathrm{A1} \wedge \mathrm{A2}) \vee \mathrm{A1} \vee \mathrm{A2}, \tag{2}$$

где A — «В процессе одновременного воздействия на систему двух злоумышленников НСД в систему будет получен, если получен НСД хотя бы одним из злоумышленников»; $\mathrm{A1}$ — «Первый злоумышленник получил НСД в систему»; $\mathrm{A2}$ — «Второй злоумышленник получил НСД в систему». На практике логическая модель может представлять собой совокупность правил, состоящих из множества состояний, определяемых экспертной группой.

Используя формулу (1), получим модели для различных значений количества попыток совершения НСД. Например,

$$\text{для } k = 1: \; p(1,t) = \frac{(\gamma * t)^1}{1!} e^{-\gamma * t} = \gamma * t * e^{-\gamma * t}; \tag{3}$$

$$\text{для } k = 2: \; p(2,t) = \frac{(\gamma * t)^2}{2!} e^{-\gamma * t} = \frac{\gamma^2 t^2}{2} * e^{-\gamma * t}; \tag{4}$$

$$\text{для } k = 3: \; p(3,t) = \frac{(\gamma * t)^3}{3!} e^{-\gamma * t} = \frac{\gamma^3 t^3}{6} * e^{-\gamma * t} \ldots \tag{5}$$

На основе логической модели построена функция воздействия на систему двух злоумышленников для различных значений количества попыток k_1 первым злоумышленником и k_2 вторым злоумышленником.

$$F(k_1, k_2) = p_1(k_1,\ t)\ *\ p_2(k_2,\ t) + p_1(k_1,\ t) + p_2(k_2,\ t). \tag{6}$$

Таким образом, применяя формулу (6), составлены следующие функция воздействия на систему двумя субъектами:

$$\text{при } k_1 = 1,\ k_2 = 1: \; F(1,1) = p_1(1,\ t)\ *\ p_2(1,\ t) + p_1(1,\ t) + p_2(1,\ t); \tag{7}$$

$$\text{при } k_1 = 1,\ k_2 = 2: \; F(1,2) = p_1(1,\ t)\ *\ p_2(2,\ t) + p_1(1,\ t) + p_2(2,\ t); \tag{8}$$

$$\text{при } k_1 = 2,\ k_2 = 3: \; F(2,3) = p_1(2,\ t)\ *\ p_2(3,\ t) + p_1(2,\ t) + p_2(3,\ t) \ldots \tag{9}$$

Визуализация моделирования

На основе результатов моделирования деструктивных воздействий на объект КИИ при совершении НСД составлен общий график, представленный на рис. 1. Проведено три опыта:

1. При одной возможной попытке НСД первым злоумышленником и при одной возможной попытке НСД вторым злоумышленником самым критическим периодом для системы является интервал с 1-го по 12-й день. Вероятность такого рода попытки НСД принимает максимальное значение 0,8 в 4-й день.

2. При одной возможной попытке НСД первым злоумышленником и при двух возможных попытках НСД вторым злоумышленником самым критическим периодом для системы является интервал с 2-го по 14-й день. Вероятность такого рода попытки НСД принимает максимальное значение 0,74 в 6-й день.

3. При двух возможных попытках НСД первым злоумышленником и при трех возможных попытках НСД вторым злоумышленником самым критическим периодом для системы является интервал с 5-го по 18-й день. Вероятность такого рода попытки НСД принимает максимальное значение 0,53 в 10-й день.

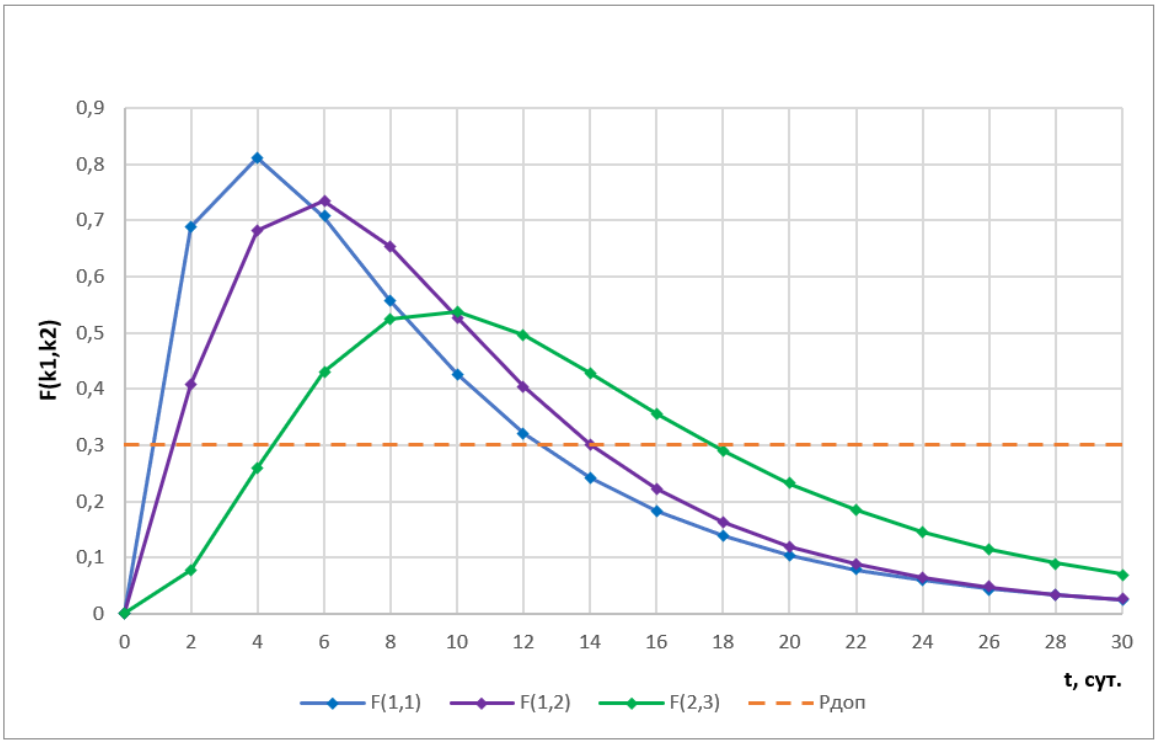


Рис. 1. Визуализация моделирования деструктивных воздействий двумя субъектами

В ходе анализа графиков визуализации результатов моделирования злоумышленных воздействий выявлено: при увеличении попыток воздействий график возрастает и убывает медленнее, тем самым уменьшается максимальное значение вероятности, однако, интервал времени, в пределах которого может произойти критическая попытка НСД увеличивается, поэтому намного сложнее предсказать день попытки совершения злоумышленником НСД в объект КИИ.

Заключение

Моделирование деструктивных воздействий на объекты критической информационной инфраструктуры является важной задачей для обеспечения их безопасности и устойчивости.

Эффективное прогнозирование включает анализ уязвимостей, мониторинг аномальной активности и использование машинного обучения для выявления паттернов поведения потенциальных злоумышленников, включая интенсивность воздействия и многие другие факторы. Также важно учитывать геополитические и социальные факторы, которые могут влиять на вероятность угроз информационной безопасности.

Литература

1. *Кленин Д. В.* Анализ видов вторжений в информационную систему / Д. В. Кленин, Е. А. Максимова // Актуальные вопросы информационной безопасности регионов в условиях перехода России к цифровой экономике: материалы VII Всероссийской научно-практической конференции, Волгоград, 26–27 апреля 2018 года / Волгоградский государственный университет. – Волгоград : Волгоградский государственный университет, 2018. – С. 17–22. – EDN VPCGIM.

2. *Максимова Е. А.* Когнитивное моделирование деструктивных злоумышленных воздействий на объектах критической информационной инфраструктуры / Е. А. Максимова // Труды учебных заведений связи. – 2020. – Т. 6, № 4. – С. 91–103. – DOI 10.31854/1813-324X-2020-6-4-91-103. – EDN LIRTXZ.

3. *Максимова Е. А.* Методы выявления и идентификации источников деструктивных воздействий инфраструктурного генеза / Е. А. Максимова // Электронный сетевой политематический журнал «Научные труды КубГТУ». – 2022. – № 2. – С. 86–99. – EDN KTYQJE.

4. *Утенкова М. А.* Проактивное моделирование утечек данных ограниченного доступа на объектах критической информационной инфраструктуры (на примере транспортной отрасли) / М. А. Утенкова, Е. А. Максимова // Научно-аналитический журнал «Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России». – 2024. – № 2. – С. 91–104. – DOI 10.61260/2218-130X-2024-2-91-104. – EDN QFUZBE.

УДК 539.374

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКА. УСЛОВИЕ ИШЛИНСКОГО

М. А. Артемов, А. С. Бухтояров, А. А. Верлин, Н. И. Кондусов, О. С. Лемина, Р. Г. Меджидов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются вопросы математического моделирования поведения быстро вращающихся тонких дисков при выборе кусочно-линейных потенциалов. Для идеального упругопластического тела задача является статически определимой. Приведены формулы для напряжений для любой кусочно-линейной функции пластичности. В рамках теории малых деформаций для условия пластичности максимального приведенного напряжения в приближении плоского напряженного состояния приведено решение задачи о быстровращающемся тонком диске постоянной толщины. Рассмотрены случаи, когда в пластической области реализуется один или несколько режимов пластичности. Определены условия перехода от одного режима пластичности к другому. Рассмотрен случай предельного состояния диска. Приведены графики для напряжений, пластических деформаций, а также графики годографа вектора напряжений, рассматриваемого как функцию радиальной координаты в пространстве напряжений.
Ключевые слова: математическое моделирование, плоское напряженное состояние, вращающиеся диски, упругопластическое тело, условие Ишлинского, ассоциированный закон пластического деформирования, годограф вектора напряжений, вычислительный эксперимент.

Введение

Задача об упругопластическом состоянии тонкого вращающегося диска является одной из простейших одномерных задач плоско напряженного состояния. Тем не менее, учитывая практическую важность оценки состояния быстро вращающихся дисков, которые являются элементами многих машин и конструкций, интерес к этой задачи сохраняется до настоящего времени. Одной из первых работ в этом направлении является работа Ф. Ласло 1925 г. [1], в которой рассматривались некоторые особенности состояния вращающихся дисков. Расчеты полей напряжений, деформаций и перемещений в рамках определенных математических моделей упругопластического состояния быстро вращающихся дисков были выполнены в последующие годы; приведем ссылки лишь на некоторые из многочисленных работ, в которых в разных постановках приводятся решения задачи о быстро вращающемся диске [2–10].

Можно выделить два вида условий пластичности: когда функция пластичности является кусочно-линейной и когда является гладкой. Выбор кусочно-линейных функций пластичности позволяет получить аналитические решения при определении напряжений и деформаций. Выбор гладких функций пластичности приводит к необходимости численного решения. При выборе некоторых гладких функций пластичности часто рассматривается параметрическое представление этих функций, что может приводить к громоздким преобразованиям [11]. Выбор кусочно-линейных функций пластичности позволяет выполнить интегрирование соотношений ассоциированного закона пластического течения для регулярных режимов и тем самым перейти к соотношениям ассоциированного закона пластического деформирования. Поскольку плоское напряженное состояние является определенным приближением общей трехмерной задачи [12], то при рассмотрении сингулярных режимов условий пластичности для идеально упругопластических тел не выполняется условие непрерывности радиальной компоненты тензора пластических деформаций, а также особенности обусловленные смещение границы для сингулярного режима в процессе нагружения.

1. Постановка задачи

В рамках теории малых деформаций, в приближении плоского напряженного состояния рассматривается задача о тонком диске постоянной толщины, вращающемся с угловой скоростью ω. Внешний контур диска $\rho = b$ свободен от усилий. Выбирается модель однородного изотропного идеального упругопластического тела, условие пластичности Ишлинского [13].

2. Математическая модель состояния диска в упругой области

Выбирается цилиндрическая система координат $\rho\theta z$, ось z которой проходит через центр диска $\rho = 0$, а плоскость $z = 0$ является средней плоскостью

Уравнение движения

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = -m\rho. \tag{1}$$

Соотношения закона Гука

$$E\varepsilon_\rho = \sigma_\rho - \nu\sigma_\theta, \quad E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu\sigma_\rho, \quad E\varepsilon_z = -\nu(\sigma_\rho + \sigma_\theta). \tag{2}$$

Условие совместности деформаций

$$\rho\frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_\rho = 0. \tag{3}$$

Соотношения Коши, определяющие деформации через перемещения

$$\varepsilon_\rho = \frac{du}{d\rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{\rho}. \tag{4}$$

Из уравнений (1)–(4) методом исключения переменных можно получить систему дифференциальных уравнения для определения напряжений

$$\begin{cases} \rho\dfrac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho - \sigma_\theta + m\rho^2 = 0, \\ \rho\dfrac{d\sigma_\theta}{d\rho} + \sigma_\theta - \sigma_\rho + \nu m\rho^2 = 0, \end{cases}$$

или дифференциальное уравнение второго порядка относительно радиальной компоненты тензора напряжений

$$\rho\frac{d^2\sigma_\rho}{d\rho^2} + 3\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + (3+\nu)m\rho^2 = 0,$$

или дифференциальное уравнение второго порядка для определения перемещений

$$\rho\frac{d^2Eu}{d\rho^2} + \frac{dEu}{d\rho} - \frac{Eu}{\rho} + (1-\nu^2)m\rho^2 = 0.$$

Компонент тензора напряжений и перемещений в упругой области диска определяются по формулам [10]

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= A - \frac{B}{\rho^2} - \frac{3+\nu}{8}m\rho^2, \\ \sigma_\theta &= A + \frac{B}{\rho^2} - \frac{1+3\nu}{8}m\rho^2, \\ Eu &= (1-\nu)A\rho + \frac{1+\nu}{\rho}B - \frac{1-\nu^2}{8}m\rho^3. \end{aligned} \tag{5}$$

Если весь диск находится в упругом состоянии, то, учитывая граничные условия,

$$\sigma_\rho\,|_{\rho=0}=\sigma_\theta\,|_{\rho=0},\quad \sigma_\rho\,|_{\rho=b}=0,$$

на основании формул (5) получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{3+\nu}{8}m\left(b^2-\rho^2\right),\\
\sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}m\left(b^2-\frac{1+3\nu}{3+\nu}\rho^2\right),\\
Eu &= (1-\nu)\left(\frac{3+\nu}{8}b^2-\frac{1+\nu^2}{8}\rho^2\right)m\rho.
\end{aligned} \tag{6}$$

Если для всех условий пластичности идеального пластического тела предел пластичности k на одноосное растяжение одинаков, то пластическая область зарождается в центре диска, когда

$$\sigma_\rho\,|_{\rho=0}=\sigma_\theta\,|_{\rho=0}=k. \tag{7}$$

Из (6), (7) находим условие зарождения пластической области в центре диска

$$m=m_1=\frac{8}{3+\nu}\frac{k}{b^2}. \tag{8}$$

3. Кусочно-линейные функции пластичности

При выборе кусочно-линейной функции пластичности рассматриваем регулярные режимы и сингулярные режимы. Для регулярного режима имеем статически определимую задачу

$$\begin{cases}
\dfrac{d\sigma_\rho}{d\rho}+\dfrac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=-m\rho,\\
F_i=\alpha_i\sigma_\theta+\beta_i\sigma_\rho=k.
\end{cases} \tag{9}$$

Решение (9) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{k}{\alpha_i+\beta_i}-\frac{\alpha_i}{3\alpha_i+\beta_i}m\rho^2+C\rho^{-1-\beta_i/\alpha_i},\\
\sigma_\theta &= \frac{k}{\alpha_i+\beta_i}+\frac{\beta_i}{3\alpha_i+\beta_i}m\rho^2-\frac{\beta_i}{\alpha_i}C\rho^{-1-\beta_i/\alpha_i}.
\end{aligned}$$

Для сингулярного режима

$$\begin{cases}
F_i=\alpha_i\sigma_\theta+\beta_i\sigma_\rho=k,\\
F_{i+1}=\alpha_{i+1}\sigma_\theta+\beta_{i+1}\sigma_\rho=k.
\end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta=\sigma_\theta^{(i)} &= \frac{\beta_i-\beta_{i+1}}{\beta_i\alpha_{i+1}-\beta_{i+1}\alpha_i}k,\\
\sigma_\rho=\sigma_\rho^{(i)} &= \frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{\beta_i\alpha_{i+1}-\beta_{i+1}\alpha_i}k.
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя (10) в уравнение равновесия, получаем

$$\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i+\beta_{i+1}-\beta_i}{\beta_i\alpha_{i+1}-\beta_{i+1}\alpha_i}k+m\rho^2=0. \tag{11}$$

Из (11) следует, что граница $\rho=\rho_c$ между регулярным и сингулярным режимами

$$\rho_c = \sqrt{\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i + \beta_{i+1} - \beta_i}{\beta_i \alpha_{i+1} - \beta_{i+1} \alpha_i} \frac{k}{m}}. \tag{12}$$

4. Условие пластичности Шмидта — Ишлинского

Рассмотрим случай, когда для условия пластичности Шмидта — Ишлинского. Для режима

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 2k. \tag{13}$$

Решая систему уравнений (1), (13), учитывая, что в центре диска

$$\sigma_\rho \,|_{\rho=0} = \sigma_\theta \,|_{\rho=0} = k, \tag{14}$$

находим

$$\sigma_\rho = k - \frac{m\rho^2}{4}, \quad \sigma_\theta = k + \frac{m\rho^2}{4}. \tag{15}$$

Для сингулярного режима

$$\begin{cases} \sigma_\theta + \sigma_\rho = 2k, \\ 2\sigma_\theta - \sigma_\rho = 2k. \end{cases} \tag{16}$$

напряжения

$$\sigma_\rho = \frac{2}{3}k, \quad \sigma_\theta = \frac{4}{3}k. \tag{17}$$

Для режима (13) напряжения будут вычисляться по формулам (15) до границы $\rho = c_1$ (радиус границы между областями с разными режимами), которая определяется из (14) и (17)

$$c_1 = \sqrt{\frac{4k}{3m}}. \tag{18}$$

Для режима (17) по формуле (12) находим, что

$$\rho_c = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}}. \tag{19}$$

Сравнивая (18) и (19) приходим к выводу, что режиму (17) не соответствует какая-либо кольцевая область $c_1 \le \rho \le c_2$. Поэтому при переходе от одного регулярного режима к другому в пластической области радиальная компонента тензора пластических деформаций будет претерпевать разрыв.

5. Один режим в пластической области

Рассмотрим случай, когда в пластической области выполняется только режим (13). Для всех регулярных режимов для плоского напряженного состояния идеального упругопластического тела задача статически определимая. В пластической области $0 \le \rho \le c$ напряжения вычисляются по формулам (15). Упругие деформации определяются согласно соотношениям закона Гука (2)

$$E\varepsilon_\rho^e = (1-\nu)k - \frac{1+\nu}{4}m\rho^2, \quad E\varepsilon_\theta^e = (1-\nu)k + \frac{1+\nu}{4}m\rho^2.$$

Пластические деформации

$$\varepsilon_\rho^p = \varepsilon_\rho - \varepsilon_\rho^e, \quad \varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^e, \quad \varepsilon_z^p = -\varepsilon_\rho^p - \varepsilon_\theta^p. \tag{20}$$

Учитывая соотношения ассоциированного закона пластического деформирования и формулы Коши, получаем уравнение для перемещений в пластической области

$$\frac{dEu}{d\rho}-\frac{Eu}{\rho}+\frac{1+\nu}{2}m\rho^2=0.$$

Решая это уравнение находим

$$Eu=\left(C-\frac{1+\nu}{4}m\rho^2\right)\rho. \tag{21}$$

Из условия равенства нулю пластических деформаций на упругопластической границе находим

$$C=\frac{1+\nu}{4}mc^2+(1+\nu)k.$$

Так что

$$\begin{gathered}Eu=\left(\frac{1+\nu}{2}m\left(2c^2-\rho^2\right)+\left(1-\nu\right)k\right)\rho,\\ E\varepsilon_\rho^p=E\varepsilon_\theta^p=\frac{1+\nu}{2}m(c^2-\rho^2),\quad \varepsilon_z^p=-2\varepsilon_\theta^p.\end{gathered} \tag{22}$$

Учитывая условия непрерывности напряжений на упругопластической границе

$$[\sigma_\rho]|_{\rho=c}=0,\quad [\sigma_\theta]|_{\rho=c}=0$$

в формулах (5) определяем

$$A=k+\frac{1+\nu}{4}mc^2,\quad B=\frac{1+\nu}{8}mc^4.$$

поэтому напряжения и перемещения в упругой области $c\le\rho\le b$

$$\sigma_\rho=k+\frac{1+\nu}{4}mc^2\left(1-\frac{c^2}{2\rho^2}\right)-\frac{3+\nu}{8}m\rho^2,$$

$$\sigma_\theta=k+\frac{1+\nu}{4}mc^2\left(1+\frac{c^2}{2\rho^2}\right)-\frac{1+3\nu}{8}m\rho^2,$$

$$Eu=\left((1-\nu)k+\frac{1+\nu}{4}mc^2\left(1-\nu+\frac{1+\nu}{2}\frac{c^2}{\rho^2}\right)-\frac{1-\nu^2}{8}m\rho^2\right)\rho.$$

На границе $\rho=b$

$$\sigma_\rho\,|_{\rho=b}=k+\frac{1+\nu}{4}mc^2\left(1-\frac{c^2}{2b^2}\right)-\frac{3+\nu}{8}mb^2.$$

Из условия $\sigma_\rho\,|_{\rho=b}=0$ находим радиус упругопластической границы

$$c=\sqrt{b\left(b-\sqrt{\frac{2}{1+\nu}\left(\frac{4k}{m}-b^2\right)}\right)}. \tag{23}$$

Если на упругопластической границе выполняются равенства (17), то из (18) и (23) находим максимальное значение параметра $m=m_2$

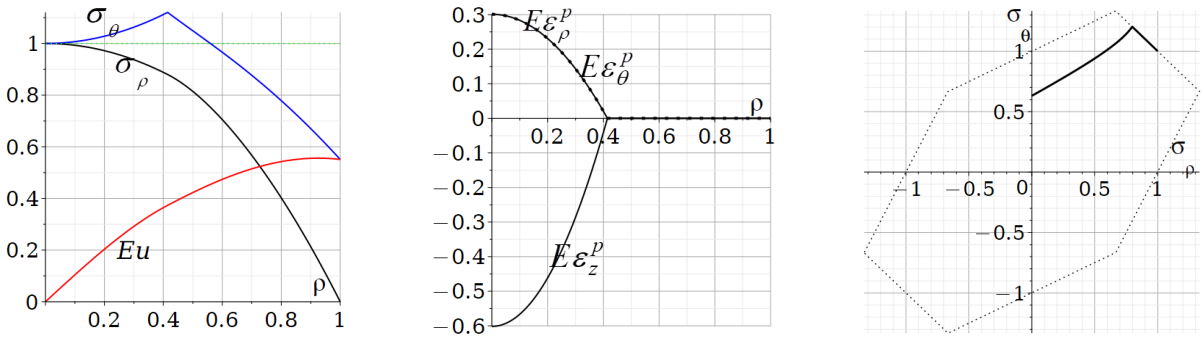
$$m_2=\frac{4k}{3b^2}\frac{4+\nu+\sqrt{13+4\nu}}{3+\nu},$$

для которого в пластической области будет выполнятся только один режим (13). Соответственно, в этом случае наибольшее значение радиуса упругопластической границы будет

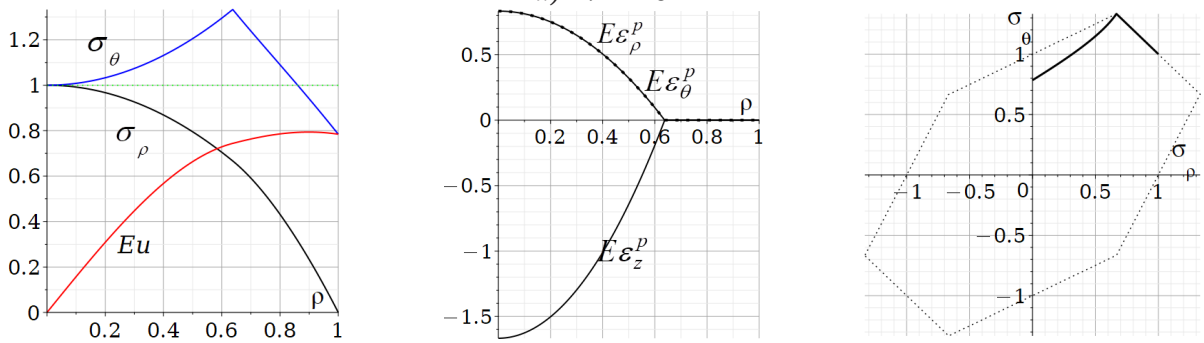
$$c=c_2=\sqrt{\frac{(3+\nu)b^2}{4+\nu+\sqrt{13+4\nu}}}.$$

Таким образом, при изменении параметра m в диапазоне $m_1\le m\le m_2$ в пластической области $0\le\rho\le c$ реализуется только один режим (13). Радиус упругопластической границы будет определяться по формуле (23).

На рис. 1 показаны графики напряжений, перемещений, пластических деформаций и годографа вектора напряжений, когда параметры $k=1,\ b=1,\ \nu=0.25$.



a) $m=2.8$



b) $m=3.2786$

Рис. 1

6. Разгрузка

Рассмотрим процесс, когда значение параметра m уменьшается от m_2 до нуля.

При уменьшении значение параметра m весь диск переходит в упругое состояние, в области $0\le\rho\le c_1$ остаются необратимые деформации $\varepsilon_\rho^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_z^p$, вычисляемые по формулам (22), в которых надо полагать

$$m=m_2,\quad c=c_1.$$

В указанной области полные деформации

$$\varepsilon_\rho=\varepsilon_\rho^e+\varepsilon_\rho^p,\ \ \varepsilon_\theta=\varepsilon_\theta^e+\varepsilon_\theta^p \tag{24}$$

должны удовлетворять условиям совместности (3). Из уравнения равновесия (1) следует, что

$$\sigma_\theta=\rho\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}+\sigma_\rho+m\rho^2. \tag{25}$$

Учитывая соотношения закона Гука (2), равенство (25), подставляя (24) в (3), приходим к уравнению

$$\rho^2\frac{d^2\sigma_\rho}{d\rho^2}+3\rho\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}+(3+\nu)m\rho^2+\rho\frac{dE\varepsilon_\theta^p}{d\rho}+E\varepsilon_\theta^p-E\varepsilon_\rho^p=0. \tag{26}$$

Решая уравнение (26) и учитывая (25), находим

$$\begin{aligned}\sigma_\rho&=C_1-\frac{C_2}{\rho^2}+\frac{1+\nu}{8}m_1\rho^2-\frac{3+\nu}{8}m\rho^2,\\ \sigma_\theta&=C_1+\frac{C_2}{\rho^2}+3\frac{1+\nu}{8}m_1\rho^2-\frac{1-3\nu}{8}m\rho^2.\end{aligned} \tag{27}$$

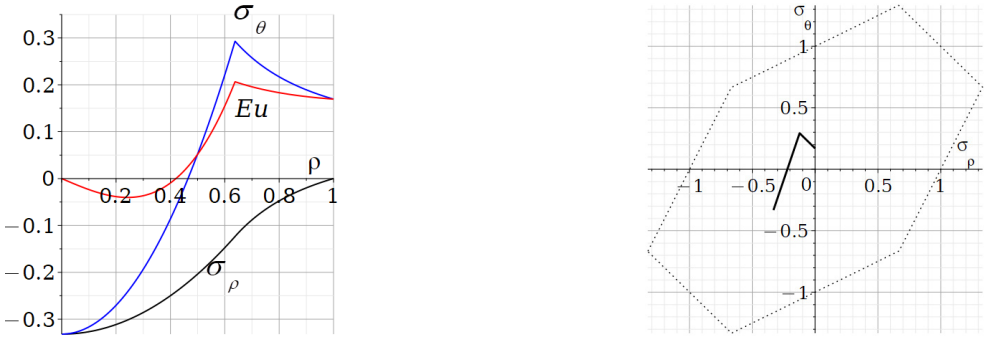
Неизвестная величина $C_2 = 0$.

В области $c_1 \le \rho \le b$ напряжения и перемещения определяются по формулам (5). Из условия $\sigma_\rho\,|_{\rho=b} = 0$ получаем, что

$$A = \frac{3+\nu}{8} mb^2 + \frac{B}{b^2}.$$

Величины A, C_1 определяются из условия непрерывности напряжений на границе $\rho = c_1$.

На рис. 2 приведены графики напряжений, перемещений и годографа вектора напряжений, когда параметры $k = 1,\ b = 1,\ \nu = 0.25,\ m_1 = 3.2786,\ m = 0,\ c_1 = 0.6377$.



a) *b)*

Рис. 2. a) напряжения и перемещения, b) годограф вектора напряжений

В области $c_1 \le \rho \le b$ напряжения и перемещения определяются по формулам (5). Из условия $\sigma_\rho\,|_{\rho=b} = 0$ получаем, что

$$A = \frac{3+\nu}{8} mb^2 + \frac{B}{b^2}.$$

Литература

1. *László F.* Geschleuderte Umdrehungskorper im Gebiet bleibender Deformation / F. László. – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Ingenieurwssenschaftliche Forschungsarbeiten. – 1925. – Band 5.– Hefi 4. – P. 281–293.

2. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел : пер. с англ. / А. Надаи. – Москва : Издательство иностранной литературы. – 1954. – 644 с.

3. *Соколовский В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – Москва : Высшая школа, 1969. – 608 с.

4. *Артемов М. А.* Математическое моделирование механического поведения вращающегося диска / М. А. Артемов, А. П. Якубенко. // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2014. – № 1. – С. 30–38.

5. *Lomakin E.* Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular discs / E. Lomakin, S. Alexandrov, Y. R. Jeng. // Archive of Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 86, Iss. 1–2. – P. 235–244. – DOI: 10.1007/s00419-015-1101-9.

6. *Лямина Е. А.* Дизайн равнопрочного вращающегося диска / Е. А. Лямина, О. В. Новожилова. // Инновационные транспортные системы и технологии. – 2023. – Т. 9, № 1. – С. 122–134.

7. *Paul SK.* Stress Analysis of Functionally Graded Disk with Exponentially Varying Thickness Using Iterative Method / SK Paul, M. Sahni. // WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics. – 2021.16. – P. 232–244. – DOI: 10.37394/232011.2021.16.26.

8. О появлении пластических областей во вращающемся диске / М. А. Артемов, Е. С. Барановский, Р. Г. Меджидов [и др.] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2024. – № 1 (59). – С. 21–39.

9. Mathematical modeling of rotating disk states / E. V. Semka, M. A. Artemov, Y. N. Babkina [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012122.

10. *Aleksandrova N.* Application of Mises yield criterion to rotating solid disk problem / N. Aleksandrova. – International Journal of Engineering Science. – 2012. – V. 51. – P. 333–337. – DOI: 10.1007/978-3-319-14580-8.

11. *Новацкий В.* Теория упругости. / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.

12. *Ишлинский А. Ю.* Математическая теория пластичности. / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. – Москва : Физматлит, 2001. 704 с.

13. *Timoshenko S. P.* Goodier J N Theory of Elasticity / S. P. Timoshenko. – New York : McGraw-Hill, 3rd ed., 1970. – 591 p.

УДК 519.6

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ ФИТОПЛАНКТОНА В МОРСКИХ ЭКОСИСТЕМАХ С УЧЁТОМ КИСЛОРОДНОГО РЕЖИМА

А. М. Атаян, Ю. В. Белова, А. Е. Чистяков

Донской государственный технический университет

Аннотация. Целью работы является построение программного комплекса для решения задачи динамики фитопланктонных популяций на системе с распределённой памятью. Рассматривается математическая модель динамики фитопланктонных популяций и превращения основных биогенных веществ, скомплексированная с моделью гидродинамики, позволяет рассмотреть различные сценарии развития гидробионтов в условиях различных кислородных режимов, которые устанавливаются при различных погодных условиях. Вегетационный период развития фитопланктонных популяций длится приблизительно с мая по сентябрь, что составляет более 13 миллионов секунд. Для решения трехмерных уравнений конвекции-диффузии-реакции использован модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ), шаг по времени берется равным 100 секундам. Необходимо будет сделать 130464 шагов на временной сетке для каждого уравнения. На каждом временном слое необходимо решить 10 уравнений, входящих в математическую модель динамики популяций фитопланктона, включая уравнение для кислорода. Такая задача представляется вычислительно трудоемкой даже для многопроцессорной вычислительной системы (МВС). Поэтому, разработка эффективных параллельных алгоритмов для реализации математической модели динамики фитопланктонных популяций является важной и актуальной задачей.

Ключевые слова: математическое моделирование, фитопланктонные популяции, разностная схема, параллельные алгоритмы, MPI, многопроцессорные вычислительные системы.

Введение

Вегетационный период развития фитопланктонных популяций длится приблизительно с мая по сентябрь, что составляет более 13 миллионов секунд. Для решения трехмерных уравнений конвекции-диффузии-реакции использован модифицированный попеременно-треугольный метод (МПТМ) [1], шаг по времени берется равным 100 секундам. Необходимо будет сделать 130464 шагов на временной сетке для каждого уравнения. На каждом временном слое необходимо решить 12 уравнений, входящих в математическую модель динамики популяций фитопланктона, включая уравнения для кислорода и углекислого газа [2]. Такая задача представляется вычислительно трудоемкой даже для многопроцессорной вычислительной системы (МВС). Поэтому, разработка эффективных параллельных алгоритмов для реализации математической модели динамики популяций фитопланктона является важной и актуальной задачей. Рассматриваемая задача, используемая для изучения газового режима Азовского моря, численно реализована с использованием технологии MPI, что позволило значительно сократить время работы программного модуля. Расчёты проводились на МВС с распределенной памятью, объемом 85 вычислительных узлов, имеющих по 2 процессора Intel Xeon E5-2690 v4 на каждом. Было задействовано 24 вычислительных узла, максимальное ускорение параллельного алгоритма – 24 раза (в сравнении с последовательной реализацией). Исследование модели параллельных расчетов при разном количестве вычислителей позволило разработать оптимальный режим работы алгоритмов при разном объеме передаваемых данных.

1. Постановка задачи

Математическая модель динамики популяций фитопланктона основана на системе уравнений конвекции-диффузии, записанных в симметричной форме, с нелинейными коэффициентами и функциями источников R_{q_i} [3, 4]:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\nabla\cdot\left(\mathbf{V}q_i\right)+\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)q_i\right)=\operatorname{div}\left(k\cdot\nabla q_i\right)+R_{q_i}, \tag{1}$$

где q_i — концентрация i-й компоненты, [мг/л]; $i=\overline{1,8}$, 1 — фитопланктон — основа пищевой цепи в водоеме; 2 — фосфаты, минеральная форма фосфора, доступная для потребления фитопланктонным популяциям; 3 — растворенный органический фосфор, образуется в процессе экскреции фитопланктонных популяций, в процессе фосфатофикации переходит в фосфаты; 4 — взвешенный органический фосфор, образуется в процессе отмирания фитопланктонных популяций, в процессе автолиза переходит в растворенную форму и в процессе фосфатофикации — в фосфаты; 5 — нитраты; 6 — нитриты, окисляются до нитратов в присутствии кислорода; 7 — аммиак, окисляется до нитритов в присутствии кислорода, фитопланктонные популяции потребляют все три формы азота; 8 — растворенный кислород (гидратированные молекулы O_2); $\mathbf{V}=\{u,v,w\}$ — вектор скорости водного потока, [м/с]; k — коэффициент турбулентного обмена, [м^2/с]; R_{q_i} — функция-источник биогенных веществ [5], [мг/(л·с)]; ∇ — градиент.

Расчетная область G представляет собой замкнутый бассейн, ограниченный цилиндрической боковой поверхностью σ [6], невозмущенной поверхностью водоема Σ_0, дном $\Sigma_H=\Sigma_H(x,y)$. Здесь Σ — кусочно-гладкая граница области G, $\Sigma=\Sigma_0\cup\Sigma_H\cup\sigma$.

Пусть $U_{\mathbf{n}}$ — нормальная составляющая поля скорости водного потока, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к Σ.

Начальные условия:

$$c_i\Big|_{t=0}=c_{io}\left(x,y,z\right),\ i=\overline{1,8}. \tag{2}$$

Граничные условия:

$$c_i=0 \text{ на } \sigma, \text{ если } U_{\mathbf{n}}<0;\ \frac{\partial c_i}{\partial\mathbf{n}}=0, \text{ если } U_{\mathbf{n}}\geq 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial z}=-\xi_i c \text{ на } \Sigma_H;\ \frac{\partial c_i}{\partial z}=\varphi\left(c_i\right) \text{ на } \Sigma_0,\ \varphi\left(c_i\right)=\begin{cases}\gamma_i c_i,\ i\in\{3,4,6,7\},\\ \dfrac{\alpha_0}{v_i}\left(K_i-c_i\right),\ i=8,\\ 0,\ i\in\{1,2,5\}\end{cases} \tag{4}$$

где α_0 — коэффициент аэрации; K_{10} — концентрация растворенного в воде кислорода при насыщении; ξ_i — коэффициент поглощения i-й субстанции донными отложениями.

2. Аппроксимация уравнений гидродинамики

Аппроксимация задачи динамики фитопланктонных популяций осуществляется на основе уравнения диффузии-конвекции-реакции, после её линеаризации [7, 8]:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}+\left(w+w_s\right)\frac{\partial c}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(cu\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(cv\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(cz\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial c}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial c}{\partial z}\right)+f\left(x,y,z\right), \tag{5}$$

$$\left(x,y,z\right)\in G,\ \overline{G}=G\cup\Gamma,\ \Gamma=\sum_{side}\cup\sum_{top}\cup\sum_{bot},$$

где c — концентрация субстанции [мг/л]; $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — вектор скорости водного потока [м/с]; w_s — гидравлическая крупность или скорость осаждения субстанции в вертикальном направлении [м/с]; H — глубина [м]; μ, ν — горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии [м^2/с]; x, y — координаты в горизонтальном направлении [м]; z — координата в вертикальном направлении [м]; t — временная переменная [с]; F — функция, описывающая интенсивность распределения источника [мг/л·с].

Начальные условия:

$$0 < t < T; \quad c(x, y, z, 0) = c_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \overline{G}. \tag{6}$$

Граничные условия:

– в вертикальном направлении $\dfrac{\partial c}{\partial z} = 0$;

– вблизи поверхности дна: $\mu \dfrac{\partial c}{\partial z} = -w_S c$; (7)

– на боковой поверхности $\dfrac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0, \ (\mathbf{V}, \mathbf{n}) > 0; \ \nu \dfrac{\partial c}{\partial x} = \mathbf{V}_\mathbf{n} c, \ (\mathbf{V}, \mathbf{n}) < 0,$

где $\mathbf{V}_\mathbf{n}$ — нормальная составляющая вектора скорости, $\mathbf{n}$ — вектор нормали, направленный внутрь расчетной области.

Запишем начальные условия для боковой поверхности, на которой находятся граничные узлы сетки $\overline{\omega}^* \setminus \overline{\omega}$:

– на тех участках боковой границы, где поток втекает в область ($u_\mathbf{n} < 0$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль) задается значение концентрации взвеси, то есть формируются граничные условия первого рода (Дирихле);

– на тех участках боковой границы, где поток движется «наружу» ($u_\mathbf{n} > 0$) задается условие свободного движения частиц взвеси, то есть $\partial c / \partial \mathbf{n} = 0$ (граничные условия Неймана).

Поток движения субстанции отсутствует на границе расчётной области, где нормальная составляющая скорости движения водной среды направлена внутрь. Если нормальная составляющая скорости водной среды направлена наружу, то осуществляется свободный выход субстанции за границы расчетной области.

3. Параллельные алгоритмы модифицированного попеременно-треугольного метода для решения задачи динамики фитопланктонных популяций

В рамках данной работы построен параллельный алгоритм модифицированного попеременно-треугольного метода [9], реализующий поставленную задачу динамики фитопланктонных популяций (субстанций) на многопроцессорной вычислительной системе с использованием гибридной технологии MPI + OpenMP [10] (рис. 1).

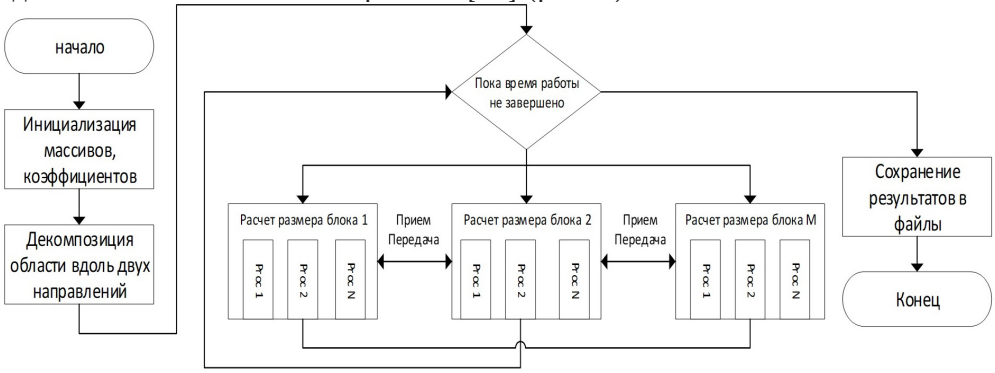
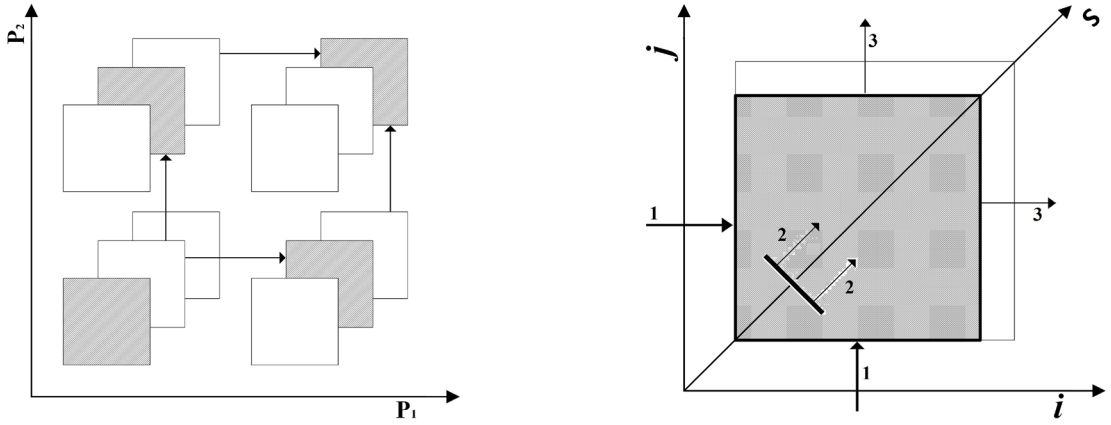


Рис. 1. Алгоритм работы программы с использованием гибридной технологии параллельных вычислений MPI + OpenMP

Для повышения эффективности параллельных расчетов выполнена декомпозиция расчетной области по двум пространственным направлениям [11, 12]. Как было сказано ранее использован способ разбиения по p_1 прямоугольников вдоль одного направления и p_2 — вдоль другого. Данный способ декомпозиции позволяет уменьшить объем передаваемых данных. При использовании декомпозиции по одному направлению объем пересылок равен $2 \times p \times Ny \times Nz$, где p — задействованное число процессоров. В случае декомпозиции по двум направлениям объем пересылок равен $2 \times (p_1 \times Ny + p_2 \times Nx) \times Nz$, где Nx, Ny, Nz — количество расчетных узлов вдоль направлений осей Ox, Oy и Oz соответственно (рис. 2.).



а) *б)*

Рис. 2. а) схема расчетов на основе технологии MPI; б) схема параллельных расчетов при использовании технологии OpenMP

Получена Зависимость ускорения параллельных алгоритмов на основе технологий MPI и MPI + OpenMP от числа вычислителей (рис. 3).

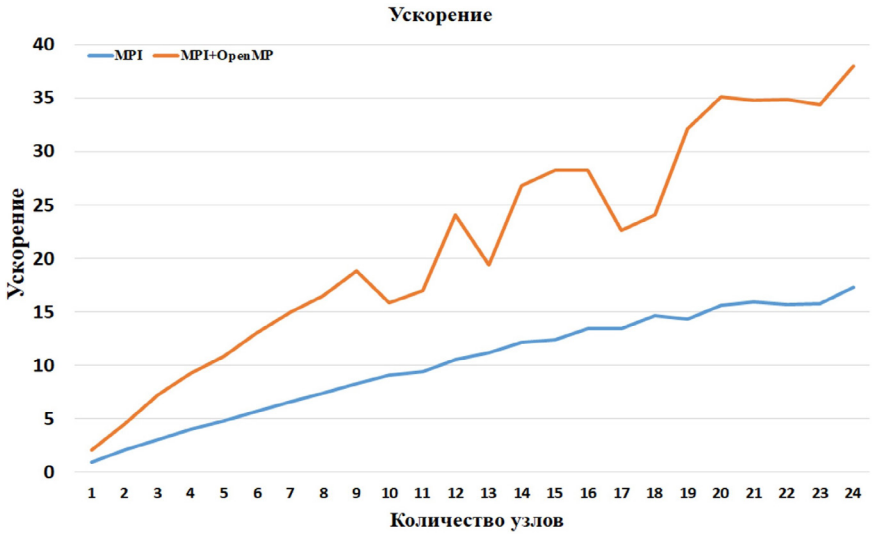


Рис. 3. Зависимость ускорения параллельных алгоритмов на основе технологий MPI и MPI + OpenMP от числа вычислителей (сетка $1000 \times 1000 \times 60$)

4. Результаты численного эксперимента

На рис. 4а представлено трехмерное распределение концентрации синезеленых водорослей, преобладающих в Таганрогском заливе, и диатомовых водорослей, распространенных в основной акватории, которые вносят основной вклад в образование детрита (рис. 4б) вследствие экскреции и отмирания, а также минерального питания (нитратов, рис. 4в).



а) *б)* *с)*

Рис. 4. Результаты численного эксперимента, концентрации: а) фитопланктона c_1; б) детрита c_4; в) биогенного вещества c_5 (нитратов)

Временной интервал моделирования — 50 дней, что соответствует временному периоду от начала вегетации до бурного цветения водорослей в летнее время. Численный эксперимент показал, что наибольшая концентрация детрита наблюдается в Таганрогском заливе, так как в нем продуцируется основная часть биомассы фитопланктона. Взвешенные частицы детрита выносятся течением в основную часть моря, где оседая на дно могут вызывать явление аноксии при определенных ветровых и температурных режимах. Считается, что фотосинтез пропорционален скорости роста первичных продуцентов с постоянным для каждой группы коэффициентом ассимиляции. В описании химико-биологического источника кислорода учтены другие процессы, приводящие к потере кислорода при окислении биогенных веществ. В балансовом соотношении для кислорода учитывался его поток через границу с атмосферой. В свою очередь этот поток сильно зависит от температуры воды.

Заключение

Разработанная математическая модель и программный модуль открывают новые перспективы для экологического мониторинга и управления водными экосистемами, особенно в условиях изменяющегося климата и антропогенного воздействия. Возможность моделирования динамики популяций фитопланктона с учетом изменения концентрации кислорода позволяет более точно прогнозировать последствия различных экологических сценариев, таких как эвтрофикация или гипоксия. Это, в свою очередь, помогает при разработке стратегий по предотвращению и смягчению последствий экологических катастроф.

Кроме того, использование гибридной технологии MPI+OpenMP для параллельных вычислений значительно ускоряет процесс моделирования, что делает возможным проведение более сложных и детализированных расчетов в реальном времени. Это особенно важно для оперативного принятия решений в кризисных ситуациях.

Программное обеспечение, созданное в рамках данного исследования, может быть адаптировано для использования в других мелководных водоемах, что расширяет его применимость и значимость. В дальнейшем планируется интеграция модели с системами дистанционного зондирования и геоинформационными системами для улучшения точности и оперативности экологического мониторинга. Таким образом, данная работа представляет собой важный шаг вперед в области математического моделирования экосистем и может стать основой для дальнейших исследований и разработок в области экологии и охраны окружающей среды.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10102, https://rscf.ru/project/22-71-10102/

Литература

1. *Сухинов А. И.* Адаптивный модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором / А. И. Сухинов, А.Е. Чистяков // Матем. моделирование. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 3–20.

2. Computational aspects of mathematical modeling of the shallow water hydrobiological processes / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, V. N. Litvinov [et. all] // Num. Meth. Prog. – 2020. – Vol. 21, № 4. – P. 452–469.

3. *Yakushev E. V.* Analysis of the water column oxic/anoxic interface in the Black and Baltic seas with a numerical model / E. V. Yakushev [et. al] // Marine Chemistry. – 2007. – Vol. 107, № 3. – P. 388–410.

4. *Сухинов А. И.* Математическая модель транспорта трехкомпонентной взвеси / А. И. Сухинов, И. Ю. Кузнецова // Computational Mathematics and Information Technologies. – 2023. – 7(3). – С. 39–48. – DOI: 10.23947/2587-8999-2023-7-3-39-48.

5. *Лященко Т. В.* Моделирование процесса распространения загрязнения водной экосистемы фосфатами / Т. В. Лященко, А. Е. Чистяков, А. В. Никитина // Computational Mathematics and Information Technologies. – 2023. – 7(4). – С. 47–53. – DOI: 10.23947/2587-8999-2023-7-4-47-53.

6. *Sukhinov A.* Mathematical modeling of the phytoplankton populations geographic dynamics for possible scenarios of changes in the Azov Sea hydrological regime / A. Sukhinov, Y. Belova, A. Chistyakov [et. all] // Mathematics. – 2021. – Т. 9, № 23. – С. 3025. – DOI: 10.3390/math9233025.

7. *Белова Ю. В.* Изучение качественных закономерностей процесса эвтрофирования мелководного водоема на основе математической модели биологической кинетики / Ю. В. Белова [и др.] // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2023. – Т. 16, № 2. – С. 14–27. ‑ DOI: 10.14529/mmp230202.

8. Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, В. В. Сидорякина [и др.] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 2. – С. 298–315.

9. The difference scheme for the two-dimensional convection-diffusion problem for large Peclet numbers / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, Y. V. Belova // MATEC Web of Conferences. – 2018. – С. 04030. DOI: 10.1051/matecconf/201822604030

10. *Сухинов А. И.* Вычислительные аспекты математического моделирования гидробиологических процессов в мелководном водоеме / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, В. Н. Литвинов [и др.] // Вычислительные методы и программирование. – 2020. – Т. 21, № 4. – С. 452–469. DOI: 10.26089/NumMet.v21r436.

11. *Милюкова О. Ю.* Способы MPI+OpenMP реализации метода сопряженных градиентов с предобусловливанием блочного неполного обратного треугольного разложения IC1 / О. Ю. Милюкова // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2022. – № 002. – 30 с.

12. *Ильин В. П.* Параллельные методы декомпозиции в пространствах следов / В. П. Ильин, Д. В. Кныш // Вычислительные методы и программирование. – 2011. – Т. 12. – С. 110–119.

13. *Беликов Д. А.* Распараллеливание пространственной модели переноса примеси на системах с распределенной памятью с помощью одно- и двумерной декомпозиции области / Д. А. Беликов, А. В. Старченко // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование. – 2009. – Т. 150, № 17. – С.12–23.

УДК 621.396

ЛИНЗА ПОЛУСФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ИЗ МЕТАМАТЕРИАЛА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ДВУХ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ МНОГОЛУЧЕВЫХ АНТЕНН

И. А. Баранников, Е. А. Ищенко, Ю. Г. Пастернак, Д. К. Проскурин, Р. Е. Рогозин, С. М. Фёдоров

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В статье рассматривается многолучевая апертурная антенна, способная работать с ортогональными типами поляризации. Особенностью антенны является полусферическая линза Люнеберга, составленная из метаматериальных структур. Диапазон рабочих частот расположен от 1 до 3 ГГц. Коэффициент направленного действия антенны составляет 18.8 дБи, а уровень боковых лепестков –10 дБ.
Ключевые слова: многолучевые антенны, линза Люнеберга, метаматериал, КПД, ДН.

Введение

Многолучевые антенные системы находят применение во многих радиосистемах благодаря возможности осуществлять прием и передачу сигналов на нескольких направлениях одновременно, что оказывается полезным в задачах радиопеленгации, радиолокации, а также при обеспечении связи в системах с пространственным разделением каналов [1]. Для формирования таких систем используются диаграммообразующие устройства (ДОУ), которые отвечают за создание требуемого фазового-амплитудного распределения. В зависимости от принципа построения ДОУ многолучевые антенные системы можно разделить на: апертурные многолучевые антенны и многолучевые антенные решетки.

Апертурные антенны в качестве ДОУ используют зеркало или объемную линзу, что негативно сказывается на их габаритах и массе. При этом они, в отличие от многолучевых антенных решеток, использующих различные схемы микрополосковые схемы на печатных платах, обладают лучшими характеристиками излучения.

Рассматриваемая в данной работе антенна относится к апертурным и использует линзу Люнеберга в качестве ДОУ. Особенностью такой линзы является изменяющийся коэффициент преломления, который должен уменьшаться от центра линзы к ее краям по следующей формуле:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}. \qquad (1)$$

При этом каждая точка поверхности линзы будет являться фокусом для излучения с противолежащей стороны. Сферические или полусферические линзы Люнеберга являются наиболее распространенными, но их конструкции сложны в производстве и обладают большими габаритами.

Одно из решений недостатков использования линзы Люнеберга было предложено авторами работы [2]. Предлагаемая многолучевая антенна использует четверть сферы линзы Люнеберга, размещенную внутри раскрыва уголкового отражателя. Такая конструкция антенны позволила снизить габариты, а также упростить процесс изготовления антенны, но при этом снижается возможный угол сканирования.

Также можно снизить габариты многолучевых антенн с линзами Люнеберга, если сократить ее плоского варианта. Такая конструкция рассматривалась в работе [3]. Она состоит из нескольких пластин, изготовленных из диэлектрика. В отличие от обычных линз, она имеет меньшие размеры и вес, помимо этого возросла простота изготовления. Недостатком этой антенны является ограничение степени свободы направлений излучения.

Двумерные линзы также рассматривались в работах [4–6]. При этом конструкции использовали метаматериалы для формирования линзы, что позволило увеличить диапазон рабочих частот, а также снизить стоимость изготовления, избежав применения дорогостоящих диэлектриков.

Рассматриваемая в данной статье многолучевая антенна использует полусферу линзы Люнеберга в качестве ДОУ. При этом линза состоит из метаматериальных ячеек, что позволило упростить процесс производства и снизить его стоимость.

Конструкция линзы

Линза представляет собой полусферу высотой 230 мм и имеющую диаметр основания 480 мм (рис. 1), состоящую из нескольких слоев метаматериала, нанесенного на печатные платы, имеющих форму окружности, с меняющимся от слоя к слою радиусом.



Рис. 1. Внешний вид линзы

Метаматериальные ячейки представляют собой печатные структуры в виде иерусалимских крестов, нанесенных на плату с подложкой из FR-4. Толщина платы составляет 0.2 мм. Кресты имеют длину 5.5 мм, а их наконечники — 3.5 мм. Эта конструкция крепится к соседним платам с помощью металлических штырей, которые концами припаиваются к специальным круглым площадкам. Длина штырей составляет 3.1 мм, а их диаметр — 0.2 мм. Площадки для крепления имеют диаметр 0.5 мм. Такая конструкция позволяет увеличить механическую жесткость всей линзы, а также снижает анизотропию метаматериала. Внешний вид одной ячейки метаматериала представлен на рис. 2.

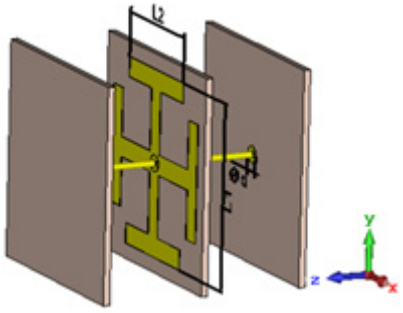


Рис. 2. Внешний вид метаматериальных ячеек линзы

Предложенная конструкция метаматериала на основе иерусалимского креста также позволяет использовать для работы с линзой два типа ортогональной поляризации.

Характеристики антенны

Рассматриваемая антенна предполагает возможность использования двух типов поляризации. Для этого в качестве излучателя предполагается использование антенной системы,

которая была описана в [7]. Она может работать с двумя ортогональными линейно поляризованными электромагнитными волнами и состоит из 2 сверхширокополосных вибраторов, позади которых размещен рефлектор. Рассматриваемые далее характеристики антенны были получены с помощью электродинамического моделирования.

При рассмотрении характеристик антенны будет оцениваться ее работа с обоими типами поляризации. Для простоты их различения они будут обозначены как вертикальная поляризация и горизонтальная поляризация. Линейно поляризованное электромагнитное излучение, векторы напряженности электрического поля которого направленны перпендикулярно платам, из которых состоит линза, будет принято за вертикальную поляризацию. В случае же, когда векторы электрической напряженности излучения направленны параллельно печатным платам линзы, излучение будет принято за горизонтальную поляризацию.

Характеристики излучения антенны будут оцениваться по ее диаграммам направленности (ДН). Направление основного луча ДН не играет роли при рассмотрении направленных характеристик антенны, т. к. ее конструкция, в силу полусферической формы линзы, способна обеспечивать полноазимутальное сканирование. Диаграммы направленности антенны будут приведены на частотах от 1 до 6 ГГц с шагом 1 ГГц для оценки возможных изменений характеристик направленности антенны. На рис. 3 приведены ДН антенны при ее работе с электромагнитным излучением вертикальной поляризации.

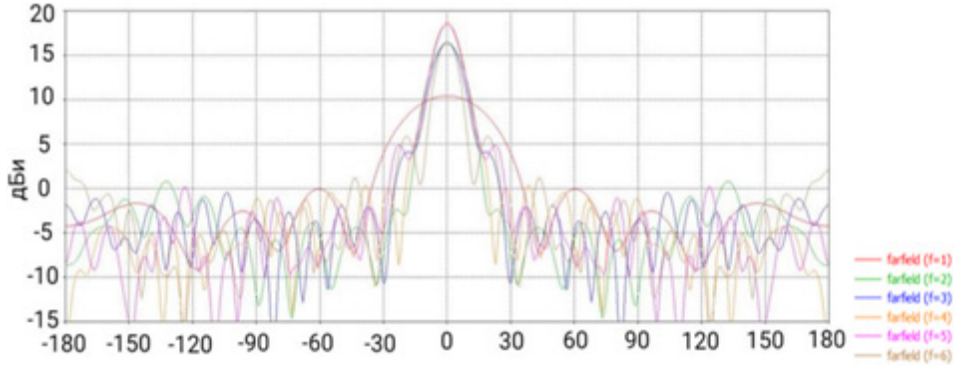


Рис. 3. Диаграммы направленности антенны в азимутальной плоскости при ее работе с электромагнитными волнами вертикальной поляризации

Из данных рис. 3 видно, что в случае использования вертикальной поляризации антенна обладает увеличивающимся вместе с частотой коэффициентом направленного действия, который меняется от 12.3 дБи до 18.8 дБи. При дальнейшем увеличении частоты излучения КНД антенны уменьшался. Ширина основного лепестка ДН по уровню –3 дБ закономерно снижается от 26° до 10° на рассматриваемом диапазоне частот. Уровень боковых лепестков диаграммы направленности при этом оставался ниже –10 дБ на всем диапазоне частот. Далее будут рассмотрены ДН антенны при ее работе с электромагнитным излучением горизонтальной поляризации. Они приведены на рис. 4.

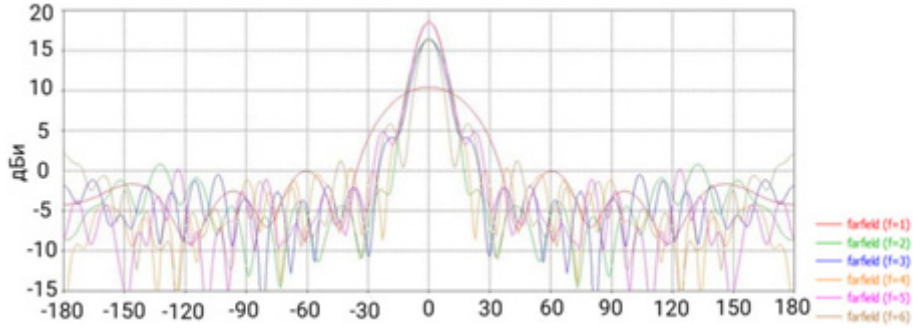


Рис. 4. ДН антенны на частотах от 1 до 6 ГГц с шагом 1 ГГц для произвольного положения луча в азимутальной плоскости при работе с горизонтальной поляризацией

Из рис. 4 видно, что коэффициент направленного действия антенны увеличивается от 11.3 дБи до 19 дБи при росте частоты, что аналогично его поведению при работе антенны с другой поляризацией. Также уменьшается ширина основного лепестка ДН по уровню –3 дБ при увеличении частоты до 6 ГГц от 27° до 8°. Уровень боковых лепестков ДН не превышает –10 дБ на всем рассматриваемом диапазоне частот.

На рис. 5 для лучшей визуализации направления излучения антенны относительно линзы приведена ее ДН на частоте 4 ГГц в трехмерном виде.

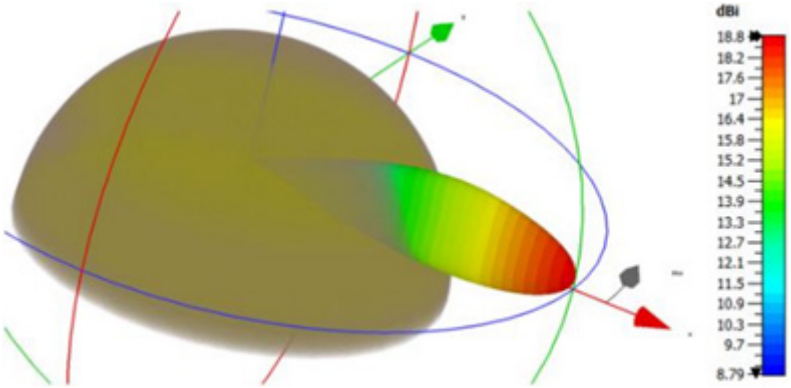


Рис. 5. Диаграмма направленности на частоте 4 ГГц

Исходя из характеристик излучения антенны можно считать, что ее рабочий диапазон частот расположен от 1 до 6 ГГц, при условии одновременной работы с обоими типами поляризации. Помимо этого, важными являются энергетические характеристики антенны при определении ее диапазона рабочих частот. Их оценка будет производиться по графикам частотной зависимости коэффициента полезного действия антенны при ее работе с обоими поляризациями, которые представлены на рис. 6.

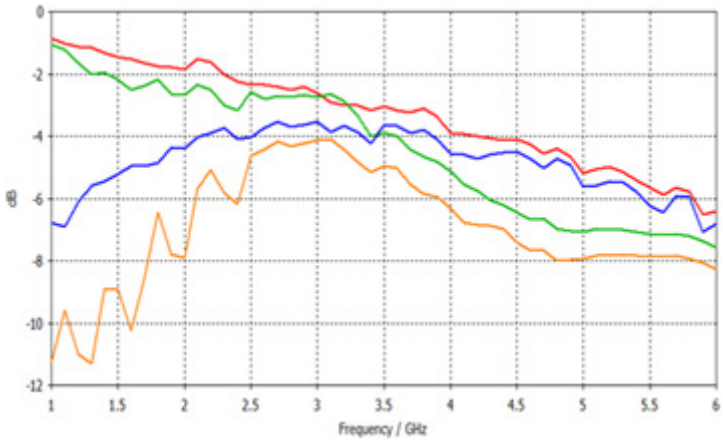


Рис. 6. Зависимости КПД антенны от частоты на промежутке от 1 до 6 ГГц

Представленные графики имеют следующие обозначения: красным и синим цветом обозначены КПД антенны при работе с вертикальной поляризацией (последним обозначен КПД, учитывающий потери при согласовании); КПД при работе с горизонтальной поляризацией обозначены зеленым и желтым (последний также учитывает потери на согласование). Полученные графики показывают, что рост частоты приводит к уменьшению КПД антенны. На частотах выше 3 ГГц он не превышает уровень –3 дБ. КПД вертикальной поляризации на всем промежутке частот, кроме 3.1 ГГц, оказался выше, чем при горизонтальной. При рассмотрении полного КПД антенны, учитывающего потри при согласовании, можно увидеть, что его наиболее приемлемые значения лежат на частотах на частотах от 2 до 3.9 ГГц для излучения

вертикальной поляризации, а для горизонтальной — на частотах от 2.5 до 3.1 ГГц. Улучшить полученные результаты возможно посредством использования более совершенных согласующих устройств для излучателя. Исходя из этого, в качестве рабочего диапазона частот следует выбрать частоты от 1 до 3 ГГц. Для удобства представления все полученные характеристики антенны при работе с волнами разной поляризации сводятся в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики антенны

Характеристика	Вертикальная поляризация	Горизонтальная поляризация
Коэффициент направленного действия	От 12.3 до 18.8 дБи (в зависимости от частоты)	От 11.3 до 20.1 дБи (в зависимости от частоты)
Ширина основного лепестка ДН по уровню –3 дБ	От 26° до 10°	От 27° до 8°
Уровень боковых лепестков ДН	Не более –10 дБ	Не более –10 дБ
Диапазон рабочих частот	От 1до 3 ГГц	От 1 до 3 ГГц
Минимальное значение КПД (без учета потерь на согласование)	–2.5 дБ	–3 дБ

Заключение

Рассмотренная антенна обеспечивает полноазимутальное сканирование, обладая при этом высокой направленностью и хорошим КПД на всем рабочем диапазоне от 1 до 3 ГГц. Применение метаматериальных структур позволило упростить процесс производства антенны и снизить ее стоимость в сравнении с традиционными конструкциями антенн на основе полусферических линз Люнеберга. Учитывая все особенности предложенной конструкции, можно найти для нее применение в задачах радиолокации и радионавигации, а также в системах связи с пространственным разделением каналов.

Литература

1. *Fujimoto K.* Mobile Antenna Systems Handbook / K. Fujimoto, J. R. James. – Third Edition. – Artech, 2008. – 769 p.

2. *Nikolic N., James G. L., Hellicar A., Greene K.* Quarter-sphere Luneburg lens scanning antenna // 2012 15 International Symposium on Antenna Technology and Applied Electromagnetics, Toulouse, France, 2012. – P. 1–4. – doi: 10.1109/ANTEM.2012.6262330.

3. *Chou H.-T., Yan Z. -D.* Parallel-Plate Luneburg Lens Antenna for Broadband Multibeam Radiation at Millimeter-Wave Frequencies With Design Optimization // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Nov. 2018. – V. 66, No 11. – P. 5794–5804. – doi: 10.1109/TAP.2018.2867060.

4. *Pfeiffer C., Grbic A.* A Printed, Broadband Luneburg Lens Antenna. Antennas and Propagation // IEEE Transactions on. – 2010. – 58. P. 3055–3059. – 10.1109/TAP.2010.2052582.

5. *Yu H., Ding X., Wu Q., Wu Y.* Broadband two-dimensional planar luneburg lens composed of gradient index metamaterials // 2014 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), Memphis, TN, USA. – 2014. – P. 773–774. – doi: 10.1109/APS.2014.6904716.

6. *Zetterstrom O., Fonseca N. J. G., Quevedo-Teruel O.* Compact Half-Luneburg Lens Antenna Based on a Glide-Symmetric Dielectric Structure // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – Nov. 2022. – V. 21, No 11. – P. 2283–2287. – doi: 10.1109/LAWP.2022.3179639.

7. *Быков К. А.* Сферическая линза Люнеберга на основе печатных плат с электрически малыми рассеивателями / К. А. Быков, Л. Н. Коротков, Пастернак Ю. Г., Р. Е. Рогозин, С. М. Федоров // Вестник ВГТУ. – 2019. – Т. 15, № 1. – С. 78–83.

УДК 621.396

МЕТАМАТЕРИАЛЬНАЯ ЛИНЗА ЛЮНЕБЕРГА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ДЛЯ СОЗДАНИЯ МНОГОЛУЧЕВЫХ АНТЕНН

И. А. Баранников, Е. А. Ищенко, Ю. Г. Пастернак, Д. К. Проскурин, Р. Е. Рогозин, С. М. Фёдоров

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В статье рассматривается перспективная конструкция многолучевой апертурной антенны. Особенностью антенны является использование метаматериалов для построения линзы, осуществляющей фокусировку основного луча диаграммы направленности. Метаматериальные структуры являются Н-образными и нанесены на печатные платы, из которых составлена линза. Рабочий диапазон частот антенны от 10 до 17 ГГц, коэффициент направленного действия –15.8 дБи.

Ключевые слова: метаматериальная линза, линза Люнеберга, апертурная антенна, ДН, ДОУ.

Введение

Радиолокационные и различные современные системы связи требуют от антенных систем возможности осуществлять изменения положения главного луча диаграммы направленности (ДН). Для этого применяются различные конструкции, среди которых можно выделить многолучевые антенны, т.к. они не используют сложных механических и электрических устройств, а также позволяют формировать несколько лучей одновременно, что может быть полезно при реализации систем связи с пространственным разделением каналов [1].

По конструктивным особенностям многолучевые антенны можно разделить на два подкласса: апертурные многолучевые антенны и многолучевые антенные решетки. Их различие заключается в том, какое диаграммообразующее устройство (ДОУ) они используют: различные конструкции линз или микрополосковые схемы. При этом апертурные многолучевые антенны формируют ДН с лучшей направленностью и меньшим уровнем боковых лепестков, но дороже и сложнее в производстве.

Одним из примеров конструкции апертурной многолучевой антенны является, рассмотренная в работе [2], антенна на основе линзы Люнеберга. Ее особенностью является изменяющийся коэффициент преломления, который будет уменьшаться от центра к краям линзы по формуле:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}. \quad (1)$$

Но использование таких линз затруднено их дороговизной и сложностью в изготовлении.

Одно из решений этих проблем предлагалось авторами работы [3]. Предложенная линза была выполненная из нескольких слоев полимерного материала с помощью технологии аддитивной печати. Это позволило значительно упростить процесс производства и снизить стоимость линзы. При этом полученная антенна не претерпела значительных искажений характеристик.

Другим подходом к устранению недостатков многолучевых антенн, использующих линзы является использование части линзы, вместо целой. Такая конструкция была предложена в статье [4]. Авторы предлагают использовать четверть линзы, размещенную в раскрыве уголкового отражателя. Полученная конструкция обладает значительно меньшими габаритами по сравнению со сферической линзой, но имеет ограничения по направлению луча диаграммы направленности.

Также снизить габариты линзы и, соответственно, уменьшить ее стоимость, можно за счет использования ее двухмерного варианта, такого как конструкция в работе [5]. Предлагаемая там линза составлена из нескольких диэлектрических пластин. Полученная конструкция имеет сниженные габариты и более простой процесс изготовления, но ограничена в степенях свободы вращения лучей ДН.

Помимо этого, двумерные линзы были рассмотрены в работах [6 – 8]. Особенностью их конструкции стало использование метаматериалов, которые дешевле диэлектриков. Также преимуществом конструкций стало увеличение рабочего диапазона частот антенн.

В данной статье будет рассматриваться конструкция многолучевой апертурной антенны на основе двумерной цилиндрической линзы Люнеберга, особенностью которой является использование печатных плат с нанесенными на них метаматериальными структурами.

Конструкция антенны

Конструкция антенны состоит из цилиндрической линзы Люнеберга и излучателей. Линза сформирована из расставленных последовательно друг за другом печатных плат, на которые нанесены метаматериальные структуры. Всего в линзе 30 печатных плат. Они расставлены с шагом 3.24 мм и составляют цилиндр с диаметром 100 мм. При этом платы расположены перпендикулярно основанию цилиндра. Высота полученной таким образом линзы составляет 33.3 мм. Внешний вид всей антенны приведен на рис. 1.

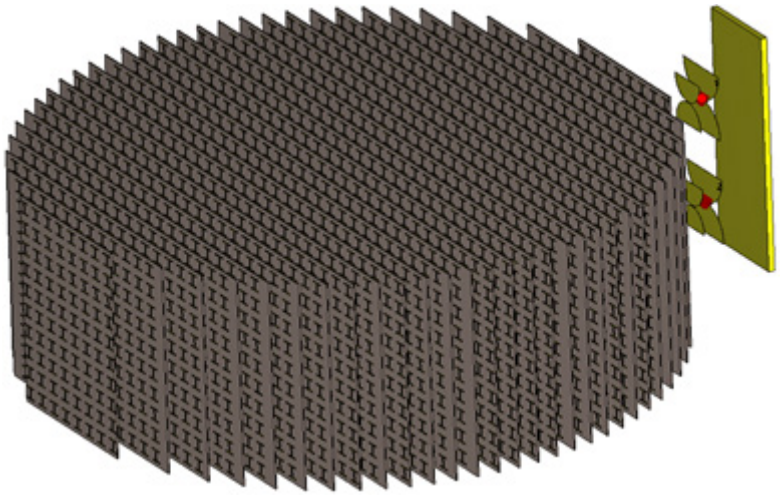


Рис. 1. Внешний вид конструкции антенны

Метаматериальные ячейки, которыми покрыты платы линзы имеют H-образную форму. Они составлены из проводящих полосок длиной 3.33 мм и толщиной 0.035 мм. Толщина подложки платы составляет 0.2 мм, а в качестве материала выбран FR-4. Конструкция отдельной ячейки метаматериала приведена на рис. 2.

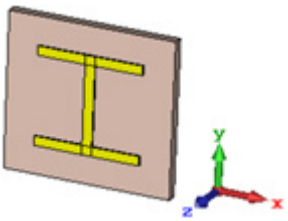
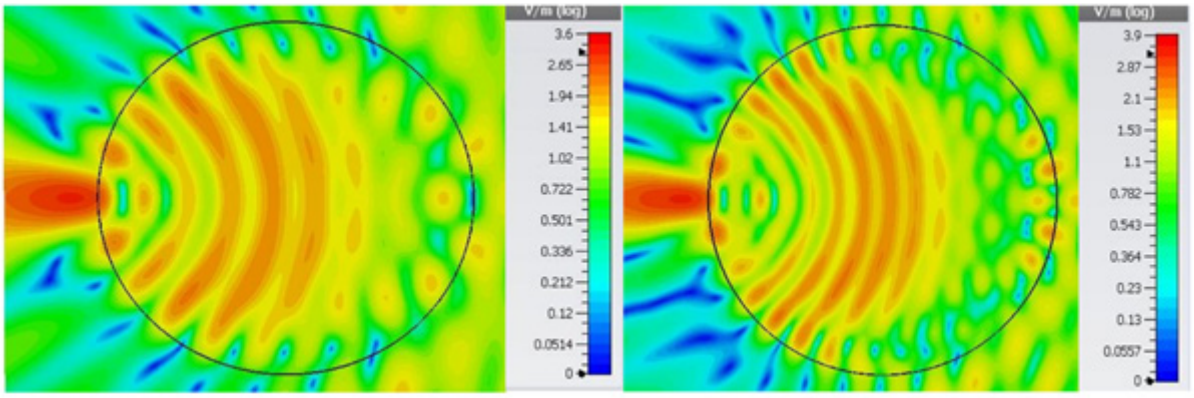


Рис. 2. Конструкция метаматериала

Излучателем в антенне выступает антенная решетка из двух диполей с рефлектором. Поворот основного луча диаграммы направленности осуществляется за счет изменения положения этой решетки.

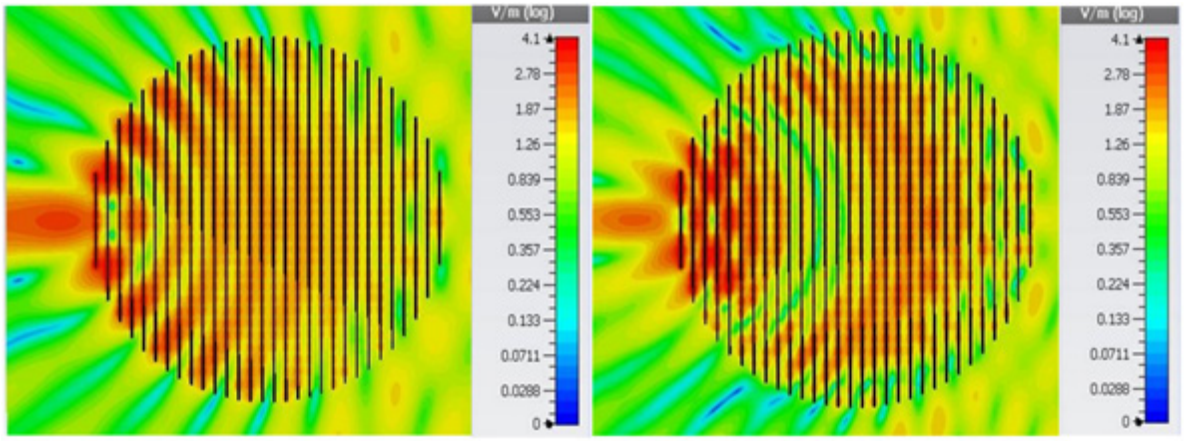
Характеристики антенны

Так как данная конструкция антенны предполагает использование вместо аналогичной, но с линзой из однородного диэлектрика, то сначала будет произведено сравнение распределения поля аналогичной однородной линзы и используемой линзы из печатных плат. Для этого на рис. 3 будет приведено распределение поля в однородной цилиндрической линзе в горизонтальной плоскости на частотах 10 ГГц и 15 ГГц, а на рис. 4 распределение поля для разработанной конструкции линзы.



а) 10 ГГЦ *б) 15ГГц*

Рис. 3. Распределение поля в горизонтальной плоскости однородной линзы



а) 10ГГц *б) 15ГГц*

Рис. 4. Распределение поля в горизонтальной плоскости линзы из печатных плат

Данные рис. 3 и 4 указывают, что полученная линза имеет схожее фокусное расстояние, которое не изменяется с ростом частоты. То есть линза имеет характеристики, аналогичные однородной и может ее заменить.

Характеристики излучения антенны будут оцениваться по ее диаграммам направленности. На рис. 5 приводятся ДН в азимутальной плоскости на частоте 10 ГГц при разных углах поворота излучателей. На рис. 6 представлена трёхмерная диаграмма направленности центрального положения луча для наибольшей наглядности.

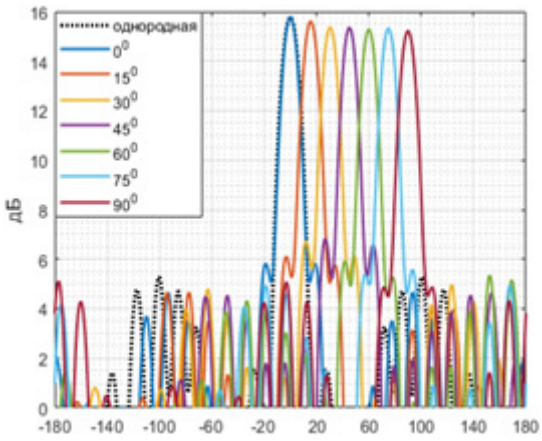


Рис. 5. ДН антенны для разных положений луча на частоте 10 ГГц

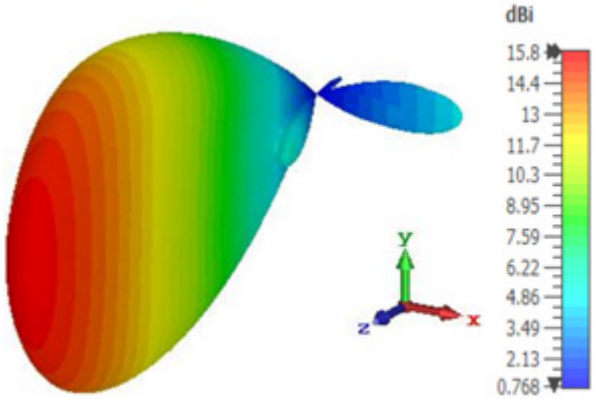


Рис. 6. Трехмерная диаграмма направленности антенны на частоте 10 ГГц

По данным рис. 5 и 6 видно, что коэффициент направленного действия (КНД) антенны составляет 15.8 дБи и не претерпевает значительных изменений, как и форма ДН, на всех возможных углах поворота излучателей. Для дальнейшей оценки характеристик излучения антенны приводятся графики частотной зависимости ширины главного луча ДН по уровню –3 дБ на рис. 7 и уровня боковых лепестков на рис. 8.

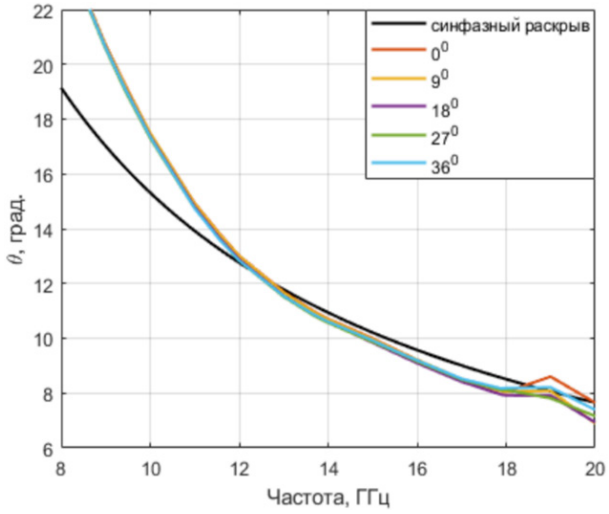


Рис. 7. Частотная зависимость ширины главного луча ДН антенны при разных направлениях луча

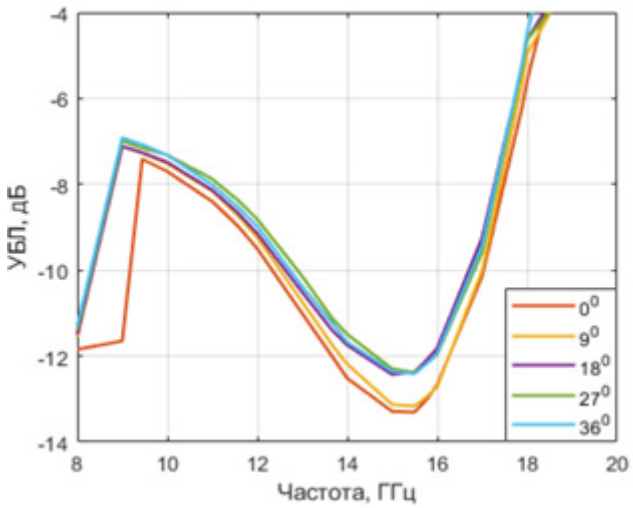


Рис. 8. Частотная зависимость уровня боковых лепестков при разных направлениях луча

Полученный график ширины основного луча ДН антенны по уровню –3 дБ показывает, что с ростом частоты излучения ширина главного лепестка уменьшается с 17° до 8°. График уровня боковых лепестков диаграммы направленности демонстрирует, что приемлемые значения находятся на частотах от 13 ГГц до 17 ГГц. Эти частоты можно выбрать в качестве рабочего диапазона частот антенны, т.к. на них она имеет наилучшие характеристики излучения. Помимо характеристик излучения, рабочий диапазон частот также будет определять энергетическая эффективность работы антенны, а именно ее коэффициенты отражения по входу и коэффициент полезного действия. Частотная зависимость коэффициента отражения антенны при разных углах поворота излучателей приведена на рис. 9.

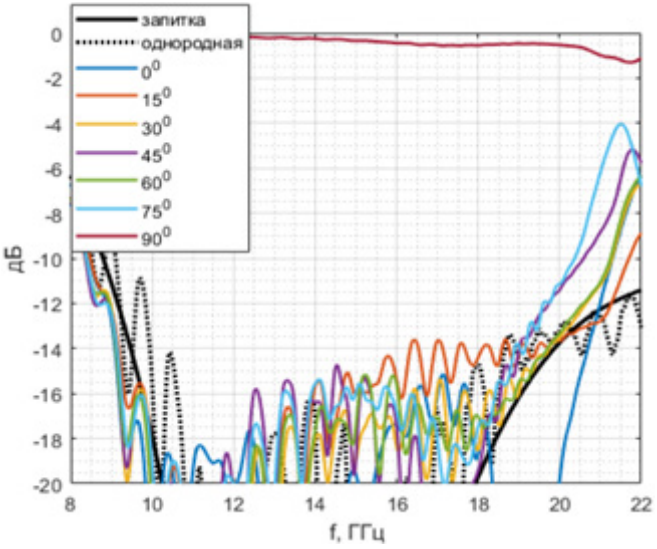


Рис. 9. Частотная зависимость коэффициента отражения антенны при различных углах поворота излучателей

По данным рис. 9 видно, что полученный ранее промежуток частот от 13 до 17 ГГц хорошо согласуется с уровнем возвратных потерь в антенне. Но стоит отметить, что угол поворота излучателя 90° приводит к слишком большим потерям, т.е. целесообразно использовать углы поворота излучателей до 75°, что соответствует сектору сканирования 150°. Далее на рис. 10 приводится частотная зависимость коэффициента полезного действия антенны.

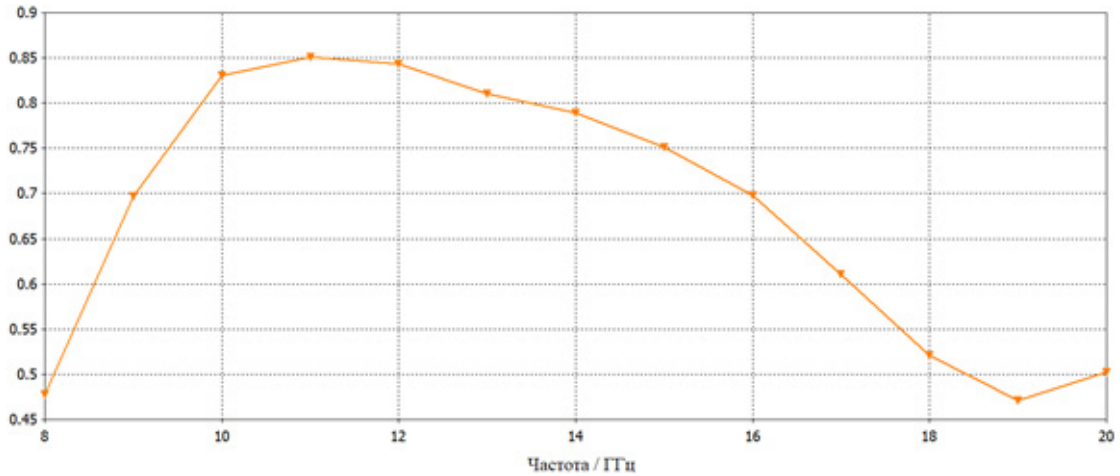


Рис. 10. Частотная зависимость КПД антенны

По данным рис. 10 видно, что на выбранном рабочем диапазоне частот КПД антенны не опускается ниже 60 %, что показывает ее достаточную энергетическую эффективность.

Заключение

Рассмотренная конструкция многолучевой антенны обладает хорошей направленностью и широким диапазоном рабочих частот, при этом является более простой в изготовлении и более дешевой в производстве, чем традиционные конструкции многолучевых антенн с линзами Люнеберга. Наибольшее применение полученная конструкция может найти в системах радиопеленгации и радиолокации для обнаружения малогабаритных целей и системах связи с пространственным и частотным разделением каналов.

Литература

1. *Fujimoto K.* Mobile Antenna Systems Handbook / K. Fujimoto, J. R. James. – Third Edition. – Artech, 2008. – 769 p.

2. *Panda A. K.* Modeling of Luneburg Lens for Broadband Communication // 2018 International Conference on Applied Electromagnetics, Signal Processing and Communication (AESPC), Bhubaneswar, India. – 2018. – P. 1–3. – doi: 10.1109/AESPC44649.2018.9033255.

3. *Liang M., Ng W. -R., Chang K., Gehm M. E., Xin H.* An X-band Luneburg Lens antenna fabricated by rapid prototyping technology // 2011 IEEE MTT-S International Microwave Symposium, Baltimore, MD, USA. – 2011. – P. 1–4. – doi: 10.1109/MWSYM.2011.5972738.

4. *Nikolic N., James G. L., Hellicar A., Greene K.* Quarter-sphere Luneburg lens scanning antenna // 2012 15 International Symposium on Antenna Technology and Applied Electromagnetics, Toulouse, France, 2012. – P. 1–4. – doi: 10.1109/ANTEM.2012.6262330.

5. *Chou H.-T., Yan Z. -D.* Parallel-Plate Luneburg Lens Antenna for Broadband Multibeam Radiation at Millimeter-Wave Frequencies With Design Optimization // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – Nov. 2018. – V. 66, No 11. – P. 5794–5804. – doi: 10.1109/TAP.2018.2867060.

6. *Pfeiffer C., Grbic A.* A Printed, Broadband Luneburg Lens Antenna. Antennas and Propagation // IEEE Transactions on. – 2010. – 58. P. 3055–3059. – 10.1109/TAP.2010.2052582.

7. *Yu H., Ding X., Wu Q., Wu Y.* Broadband two-dimensional planar luneburg lens composed of gradient index metamaterials // 2014 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), Memphis, TN, USA. – 2014. – P. 773–774. – doi: 10.1109/APS.2014.6904716.

8. *Zetterstrom O., Fonseca N. J. G., Quevedo-Teruel O.* Compact Half-Luneburg Lens Antenna Based on a Glide-Symmetric Dielectric Structure // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – Nov. 2022. – V. 21, No 11. – P. 2283–2287. – doi: 10.1109/LAWP.2022.3179639.

УДК 621.396

МНОГОСЛОЙНАЯ ЛИНЗА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОЛУЧЕВЫХ АНТЕНН С ВОЗМОЖНОСТЬЮ СКАНИРОВАНИЯ ПО ДВУМ КООРДИНАТАМ

И. А. Баранников, Е. А. Ищенко, Ю. Г. Пастернак, Д. К. Проскурин, Р. Е. Рогозин, С. М. Фёдоров

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В статье рассматривается многолучевая апертурная антенна, использующая многослойную печатную линзу, построенную из метаматериальных структур. Антенна предназначена для использования в системах связи 5G. Ее центральная частота 28 ГГц. Коэффициент направленного действия антенны составляет 22 дБи, а ширина луча по уровню –3 дБ — 8°. При этом антенная система обеспечивает вращение главного луча диаграммы направленности в азимутальной плоскости с максимальным отклонением 10°.
Ключевые слова: антенна, линза, 28 ГГц, 5G, линза Люнеберга.

Введение

Важной частью современных систем радиолокации, радиопеленгации и связи являются устройства, обеспечивающие прием и передачу сигналов в различных направлениях. Для этого обычно применяются сложные в производстве антенные решетки. Их более дешевой альтернативой являются многолучевые антенны, которые позволяют формировать несколько лучей диаграммы направленности (ДН) без использования сложных механических или электрических устройств [1].

За формирование требуемого фазово-амплитудного распределения в таких антеннах отвечают диаграммообразующие устройства (ДОУ). Один из способов формирования многолучевых антенн заключается в использовании объемных линзовых устройств или зеркал (антенны построенные таким образом называются апертурными), что позволяет добиться хороших характеристик излучения. Однако недостатком таких многолучевых антенн являются большие габариты.

Снизить габариты апертурных многолучевых антенн можно ограничив размеры линзы. Одно из таких решений было рассмотрено в работе [2]. Предлагаемая линза выполнена в виде полусферы. Изменение направления излучения предполагается за счет изменения положения излучателя, также сама линза была изготовлена из ударопрочного полистирола, что позволило значительно снизить затраты на производство.

Работа [3] рассматривает конструкцию линзы Люнеберга, использующую только четверть сферы, которая размещена в раскрыве уголкового отражателя. Данная антенна имеет еще меньшие габариты, но при этом снижается возможный угол сканирования.

Авторы работы [4] предлагают конструкцию двумерной линзы Люнеберга, что позволило значительно уменьшить ее размеры, сохранив при этом характеристики линзы. Сама линза также имеет сниженную стоимость производства, за счет использования метаматериала вместо диэлектрика. К недостаткам конструкции можно отнести отсутствие возможности менять направление излучения.

Конструкции многолучевых апертурных антенн на основе двумерных линз Люнеберга также предлагались в работах [5–7]. Их особенностью является использование метаматериалов вместо диэлектрика, что дало увеличение полосы рабочих частот и снижение стоимости изготовления. Помимо этого, предлагаемые конструкции обладают возможностью формирования нескольких лучей диаграммы направленности одновременно.

В данной статье рассматривается конструкция многолучевой апертурной антенной системы, использующей планарную печатную линзу, состоящую из метаматериальных структур, в качестве ДОУ.

Конструкция антенны

Антенна представляет собой линзу в форме круга и антенную решетку излучателей. Линза выполнена из многослойной печатной платы, на которой находятся метаматериальные ячейки, обеспечивающие фокусировку луча. Внешний вид всей антенны представлен на рис. 1.

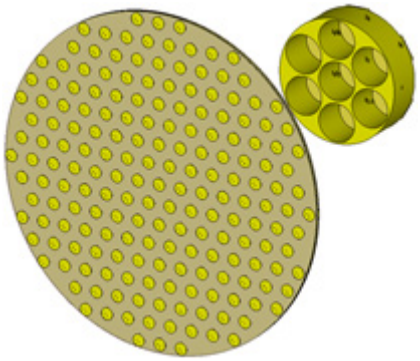


Рис. 1. Внешний вид антенны

Поверхность линзы покрыта с двух сторон решетками круговых патч-антенн, размеры которых получены в соответствии с [8]. Шаг между ними составляет 6.22 мм, каждая патч-антенна имеет два входа. Радиус печатной платы линзы равен 91 мм, а толщина — 1,29 мм. В качестве материала подложки используется диэлектрик Rogers3003, имеющий диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_r = 3$ и тангенс угла диэлектрических потерь $\mathrm{tg}(\delta) = 0.001$. Между слоями патч антенн располагается структура метаматериала, которая также обеспечивает поляризационную развязку между стороной линзы, направленной к излучателям и той, что должна принимать и передавать сигналы.

Метаматериальная структура состоит из слоя, на котором расположен квадратурный делитель мощности, слоев, содержащих полосковые линии задержки, слоев заземления и металлических штырей, которые служат для соединения контактов. Взаимное расположение слоев структуры приведено на рис. 2, диэлектрик и линии задержки не показаны для лушей видимости.

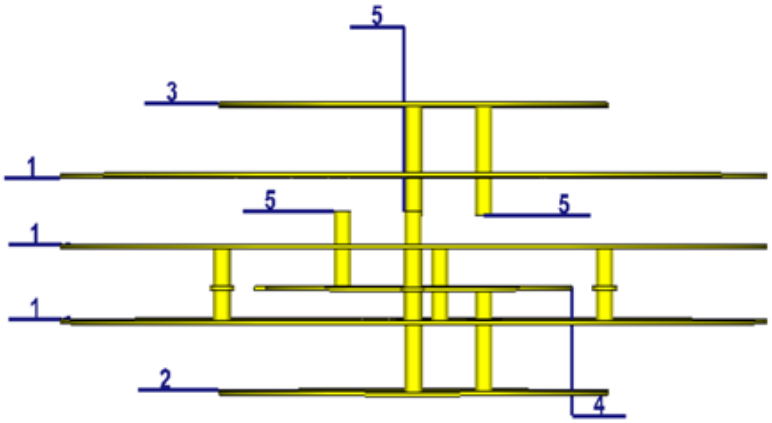


Рис. 2. Взаимное расположение слоев метаматериальной структуры линзы:
1 — слои заземления; 2 — слои патч-антенн на стороне линзы, направленной на излучатели;
3 — слои патч-антенн на стороне линзы, служащей для приема и передачи излучения;
4 — слой, на котором расположен квадратурный делитель мощности;
5 — места подключения линий задержек

Структура метаматериала обеспечивает развязку между сторонами линзы по поляризациям. Для этого полосковый делитель мощности подключается выходами к патч-антенне на стороне линзы, обращенной к излучателям. А патч-антенна на другой стороне линзы подключены ко входам делителя мощности через линии задержки, которые имеют форму полукруга. Такая связь между антеннами дает разность фаз 90° между их входами, что требуется для реализации круговой поляризации патч-антенны на стороне линзы, направленной на излучатели [8]. При этом другая сторона линзы предназначена для работы с линейно поляризованным электромагнитным полем. Внешний вид части линзы без диэлектрика и слоев заземления представлен на рис. 3.

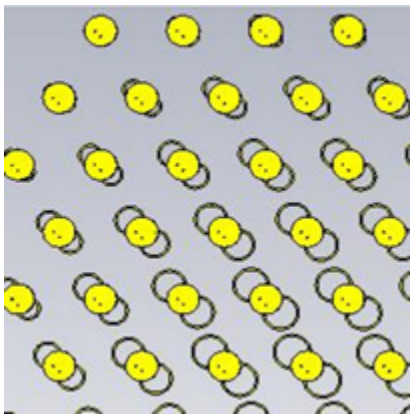
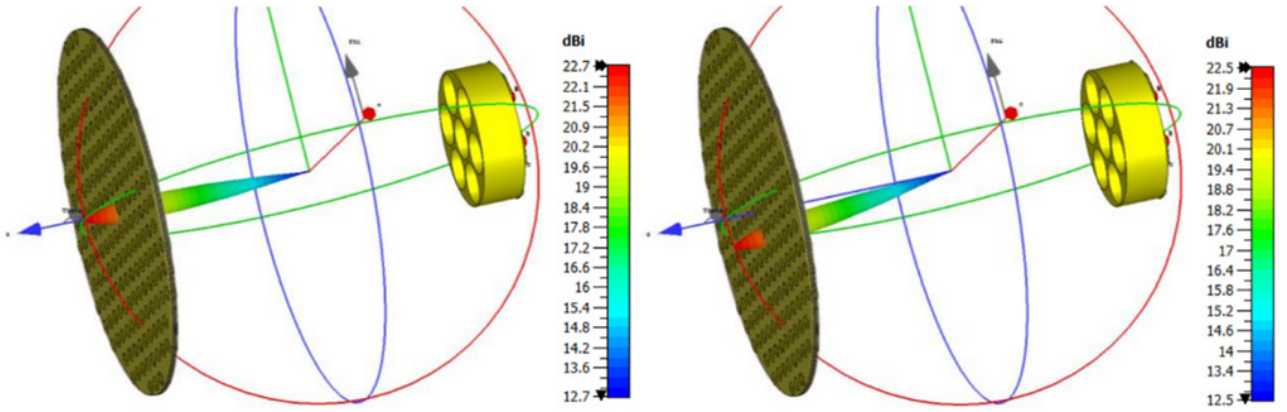


Рис. 3. Фрагмент линзы без диэлектрика и слоев заземления

Решетка излучателей антенны составлена из патч-антенн, аналогичных используемым при формировании линзы. Они накрыты металлической пластиной с отверстиями. Всего излучателей 7. Пластина обеспечивает лучшую изоляцию между отдельными элементами решетки. Для формирования лучей антенны используется каждый отдельный элемент этой решетки.

Характеристики антенны

Центральной частотой антенны является 28 ГГц. Оценка ее характеристик излучения будет проведена с помощью диаграмм направленности на центральной частоте. Они представлены на рис. 4 в трехмерном виде и на рис. 5 в горизонтальной плоскости для центрального и крайнего положений луча.



а) *б)*

Рис. 4. Трехмерные ДН антенны на центральной частоте: а — центральное положение луча; б — максимальное отклонение луча

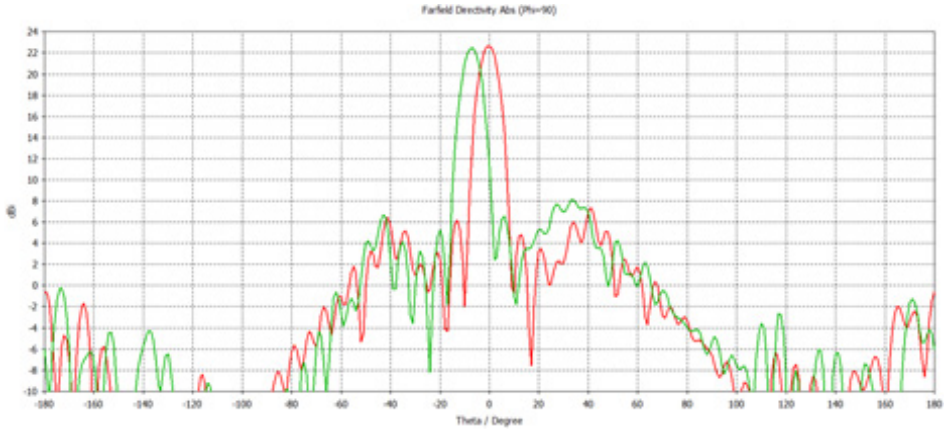


Рис. 5. ДН антенны в азимутальной плоскости на частоте 28 ГГц

По данным рис. 4 и 5 видно, что коэффициент направленного действия (КНД) антенны не опускается меньше 22 дБи, а ширина луча по уровню –3 дБ составляет 8°, что указывает на хорошую направленность полученной системы. При этом максимальное отклонение луча, обеспечиваемое системой, составляет 10°.

Далее для оценки эффективности работы антенны и диапазона рабочих частот приводятся графики зависимости возвратных потерь (рис. 6) и коэффициента полезного действия (КПД) (рис. 7) от частоты излучения. На рис. 7 принято: красная и синяя линии обозначают КПД для центрального положения луча антенны (последняя с учетом потерь на согласование); зеленая и желтая — КПД для крайнего положения луча (желтая линия показывает КПД с учетом потерь на согласование).

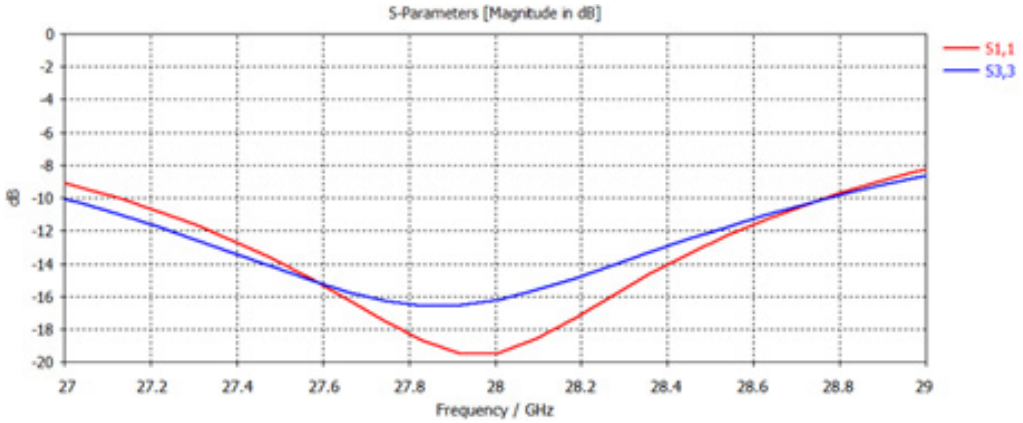


Рис. 6. Зависимость возвратных потерь антенны от частоты: красным обозначен график для центрального направления луча; синим — для крайнего

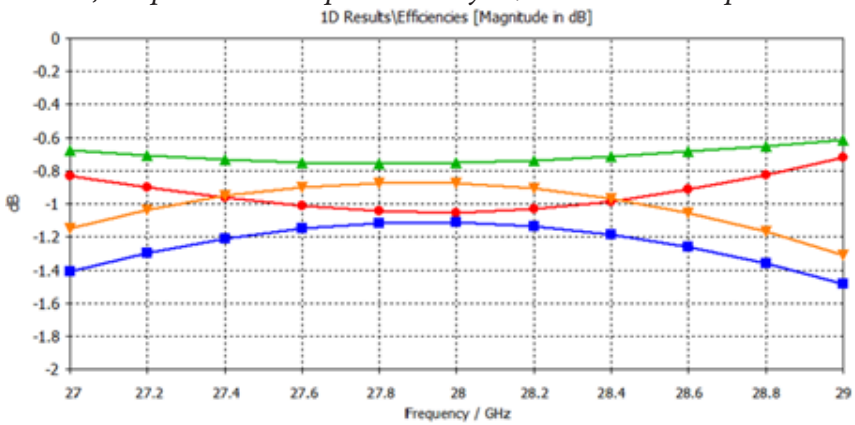


Рис. 7. Зависимость антенны КПД от частоты

Данные рис. 6 и 7 указывают на то, что рабочий диапазон частот антенны расположен от 27.1 до 28.68 ГГц. Суммарные потери в системе при этом не превышают 1.35 дБ на всем рабочем диапазоне, что говорит о высокой эффективности антенны. Все характеристики сведем в табл. 1 для удобства анализа.

Таблица 1

Характеристики антенны

Характеристика	Центральное положение луча	Крайнее положение луча
Коэффициент направленного действия	22.5 дБи	22.25 дБи
Ширина главного луча ДН по уровню –3 дБ	10°	10°
Минимальный уровень возвратных потерь	–16.5 дБ	–19.5 дБ
Минимальное значение КПД антенны (без учета потерь при согласовании)	–1.05 дБ	–0.75 дБ

Заключение

Рассмотренная конструкция многолучевой антенной системы обладает высокой направленностью и эффективностью, несмотря на сложную многослойную конструкцию из 4 слоев печатной платы. Рабочая частота антенны (28 ГГц) предполагает ее использование в системах сотовой связи диапазона 5G, но, учитывая хорошую направленность и ширину луча ДН, возможно также применение в задачах радиопеленгации.

Литература

1. *Fujimoto K.* Mobile Antenna Systems Handbook / K. Fujimoto, J. R. James. – Third Edition. – Artech, 2008. – 769 p.

2. *Santos R. A., Fre G. L., Mejia F. B., Spadoti D. H.* Reconfigurable Hemispherical Dielectric Lens Antennas in MM-Waves // 2018 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), Cartagena, Colombia. – 2018. – P. 456–459. – doi: 10.1109/ICEAA.2018.8520435.

3. *Nikolic N., James G. L., Hellicar A., Greene K.* Quarter-sphere Luneburg lens scanning antenna // 2012 15 International Symposium on Antenna Technology and Applied Electromagnetics, Toulouse, France, 2012. – P. 1–4. – doi: 10.1109/ANTEM.2012.6262330.

4. *Dhouibi A., Burokur S. N., de Lustrac A., Priou A.* Compact Metamaterial-Based Substrate-Integrated Luneburg Lens Antenna // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2012. – V. 11. – P. 1504–1507. – doi: 10.1109/LAWP.2012.2233191.

5. *Pfeiffer C., Grbic A.* A Printed, Broadband Luneburg Lens Antenna. Antennas and Propagation // IEEE Transactions on. – 2010. – 58. P. 3055–3059. – 10.1109/TAP.2010.2052582.

6. *Yu H., Ding X., Wu Q., Wu Y.* Broadband two-dimensional planar luneburg lens composed of gradient index metamaterials // 2014 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), Memphis, TN, USA. – 2014. – P. 773–774. – doi: 10.1109/APS.2014.6904716.

7. *Zetterstrom O., Fonseca N. J. G., Quevedo-Teruel O.* Compact Half-Luneburg Lens Antenna Based on a Glide-Symmetric Dielectric Structure // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – Nov. 2022. – V. 21, No 11. – P. 2283–2287. – doi: 10.1109/LAWP.2022.3179639.

8. *James J. R.* Handbook of Microstrip Antennas / J. R. James. – London : Peter Peregrinus Ltd., 1989. – 1312 p.

УДК 519.6

АНАЛИЗ ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СТРУКТУРЫ 2D-ГОЛОГРАММ ИСТОЧНИКА ЗВУКА В ГИДРОАКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

В. А. Башкарев[1], С. А. Переселков[1], В. М. Кузькин[2], А. С. Переселков[1]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук

Аннотация. В работе представлен анализ частотной зависимости структуры 2D-голограммы источника в океаническом волноводе. В рамках численного эксперимента на основе модового описания звукового поля рассмотрен однородный по глубине океанический волновод. Рассмотрен широкий диапазон частот от 100 Гц до 1000 Гц. Проанализированы параметры углового распределения 2D-голограммы: положение и ширины максимума. Представлены результаты численного эксперимента для зависимости параметров углового распределения 2D-голограммы от расстояния источник-приемник и скорости движения источника.
Ключевые слова: гидроакустический волновод, источник звука, звуковое поле, голографическая обработка, интерферограмма, голограмма.

Введение

Опираясь на интерферометрическую модель шумового сигнала, в работах [1, 2] впервые предложена и обоснована голографическая обработка широкополосных гидроакустических сигналов с использованием векторно-скалярных приемников (ВСП). Обзор нынешнего состояния голографической обработки отражен в книге [3], где приведен подробный список литературы по рассматриваемому вопросу. Обработка основана на применении к интерферограмме двумерного частотно-временного преобразования Фурье. Это дает возможность с высокой помехоустойчивостью и малой чувствительностью к вариациям параметров среды распространения решать комплексную задачу локализации источника: обнаружения [4–7], разрешения [8, 9], пеленгования [10, 11], определения радиальной скорости (проекция скорости в направлении приемника) и удаления [1, 2, 12–16], восстановления глубины [17, 18]. Восстановление пеленга осуществляется с применением ВСП. Ключевой фактор голографической обработки – решение задач обнаружения, разрешения, определение пеленга и глубины осуществляется в отсутствие знания о характеристиках сигнала и среды распространения. Для оценивания удаления и радиальной скорости требуются знания о передаточной функции акватории. В отличие от методов пространственной обработки сигналов, согласованных со средой распространения, обработка позволяет установить простые и универсальные соотношения между восстанавливаемыми параметрами источника и измеряемыми величинами. Важно, что процедура обнаружения, разрешения и оценивания параметров источника возможна при использовании одиночных приемников. Чрезвычайно существенным шагом для развития голографической обработки явилось установление адаптивных алгоритмов, которые позволяют восстанавливать удаление и радиальную скорость источника без знания априорной информации о характеристиках среды распространения [19, 20]. Это позволяет расширить область применения голографической обработки и решать проблему идентификации малошумных источников в акваториях с неизвестными передаточными функциями.

В данной работе в рамках численного эксперимента анализируется частотная зависимость структуры 2D-голограммы источника в мелководном океаническом волноводе.

1. Математическая модель

Рассмотрим звуковое поле в следующей модели мелководного волновода [21]. Волновод в координатах (X, Y, Z) представляет собой водный слой воды со скоростью звука $c(\vec{r}, z)$. Здесь $\vec{r} = (x, y)$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости. Водный слой ограничен на глубине свободной поверхностью $(z = 0)$ и дном $(z = H)$. ВСП находится в точке $Q(\vec{r_r}(x_r, y_r, z_r)$. Источник звука — $S(\vec{r_s}(x_s(t), y_s(t), z_s(t))$. Здесь, $\vec{r_s}(t) = \vec{r_0} + \vec{v}t$, где $\vec{v}$ — скорость источника. Спектр сигнала обозначен $s(f)$, где f — частота звука.

Звуковое давление в точке приема в рамках модового подхода можно представить в виде:

$$P(f,t) = s(f)\sum_{m=1}^{M} \frac{\varphi_m(z_s, f)\varphi_m(z_r, f)\exp[ir(t)h_m(f)]}{\sqrt{r(t)h_m(f)}}, \quad (1)$$

где $r(t) = \left|\vec{r_s}(t) - \vec{r_r}\right|$ — расстояние между источником и приемником, $\varphi_m(z, f)$, $h_m(f)$ — мода волновода и ее горизонтальное волновое число. На основе временной зависимости давления $P(f,t)$ формируется интерферограмма источника:

$$I_P(f,t) = P(f,t)P^*(f,t), \quad (2)$$

где верхний индекс «*» обозначает комплексно-сопряженную величину. Для повышения контрастности на сформированной интерферограмме устраняется среднее значение $\bar{I}_P(f,t)$, $I(f,t) = I_P(f,t) - \bar{I}_P(f,t)$.

2D-голограмма источника $F(\tau, v)$ формируется применением к интерферограмме $I(f,t)$ двумерного преобразования Фурье:

$$F(\tau, v) = \int_0^{\Delta t}\int_{f_1}^{f_2} I(f,t)\exp[i2\pi(vt - f\tau)]dtdf. \quad (3)$$

Здесь v и τ — частота и время голограммы; $f_{1,2} = f_0 \mp (\Delta f / 2)$, f_0 — средняя частота спектра. Спектральная плотность $F(\tau, v)$ сигнала движущегося источника локализована в 2-х узких полосах, зеркально перевернутых относительно начало координат, в виде отдельных фокальных пятен, вызванных интерференцией мод разных номеров [1, 2]. Они расположены в первом и третьем квадрантах голограммы, если радиальная скорость источника $v < 0$ (источник приближается к приемнику), и во втором и четвертом квадрантах, когда он удаляются от приемника $(v > 0)$. В случае неподвижного или движущегося источника с нулевой радиальной скоростью координаты пиков фокальных пятен расположены на оси времени τ. Область локализации содержит $(M-1)$ пиков с координатами (τ_μ, v_μ), которые расположены на прямой $v = \varepsilon\tau$ с угловым коэффициентом $\varepsilon = v_\mu / \tau_\mu$. Здесь M — число мод, формирующих поле, $\mu = \overline{1,(M-1)}$ — номер фокального пятна. Ближайший к началу координат пик первого фокального пятна, обусловленный интерференцией соседних мод, приходится на значения (τ_1, v_1). Координаты соседнего пика, вызванного интерференцией мод номеров $(m, m+2)$, расположены в точке (τ_2, v_2) и т. д. И, наконец, координаты самого удаленного пика, продиктованного интерференцией первой и последней моды — (τ_{M-1}, v_{M-1}). Спектральная плотность шумоизлучения источника сосредоточена в полосе, ограниченной прямыми

$$v_I = \varepsilon\tau + \delta v, \; v_{II} = \varepsilon\tau - \delta v, \quad (6)$$

где $\delta v = 1/\Delta t$ — полуширина фокальных пятен в направлении оси v. В направлении оси τ полуширина фокальных пятен $\delta\tau = 1/\Delta f$. Вне этой полосы спектральная плотность практически подавлена. Угловые коэффициенты ε и интерференционных полос $\delta f / \delta t$ связаны соотношением

$$\varepsilon = -\frac{\delta f}{\delta t}, \quad (7)$$

где δf — частотный сдвиг интерференционных максимума (ЧСИМ) поля за время δt.

Радиальная скорость v и удаление источника от приемника r_0 в начальный момент времени $t=0$, если $r_0 \gg |v|\Delta t$, связаны с координатами пиков фокальных пятен зависимостями

$$\dot{v} = -2\pi k_{w\mu} \nu_\mu, \quad \dot{r}_0 = k_{r\mu} \tau_\mu. \tag{8}$$

где

$$k_{w\mu} = [\overline{h_{m(m+\mu)}(f_0)}]^{-1}, \quad k_{r\mu} = 2\pi[\overline{dh_{m(m+\mu)}(f_0)/df}]^{-1}. \tag{9}$$

— коэффициенты, определяющие пространственные и частотные масштабы изменчивости передаточной функции волновода [21]. Здесь $h_{mn}(f_0) = h_m(f_0) - h_n(f_0)$, $h_m(f_0)$ — действительная составляющая горизонтального волнового числа (постоянная распространения) m-й моды. Восстановленные параметры источников, в отличие от их истинных значений, отмечены точкой сверху. Черта сверху означает усреднение по номерам мод. В соотношения (8) входят непосредственно измеряемые по голограмме координаты максимумов фокальных пятен (τ_μ, ν_μ), и неизвестные величины (9). Они могут быть определены по данным акустической калибровки района исследований или по результатам моделирования на основе априорной информации о характеристиках волновода.

Функция углового распределения спектральной плотности сигнала на голограмме (функция обнаружения) определяется выражением

$$G(\chi) = \int_0^{\Delta\tau} |F(\tau, \chi\tau)| d\tau. \tag{10}$$

Здесь $\Delta\tau$ — линейный размер области локализации по оси времени τ; χ — варьируемое значение углового коэффициента при интегрировании вдоль прямых $v = \chi\tau$. Максимум $G(\chi)$ приходится на значение $\chi = \tau$.

2. Численный эксперимент

Горизонтально-однородный волновод глубиной $H = 50$ *м*, равномерный профиль скорости звука $c = 1500$ *м/с*. Диапазон частот $f = 100 - 1000$ *Гц*. Параметры поглощающего жидкого однородного дна: отношение плотности грунта и воды $\rho = 1.8$, комплексный показатель преломления $n = 0.84(1 + i0.03)$. Скорость источника $v = 2$ *м/с*. Глубина приемника $z_Q = 48$ *м*, глубина источника $z_s = 10$ *м*. Приемник $Q_0(0,0)$ расположен в начале неподвижной системы координат (X, Y, Z). Начальное горизонтальное расстояние r_0. Время наблюдения $\Delta t = 300$ *с*, длительность шумовой реализации $t_1 = 5$ *с*, временной интервал между ними $t_2 = 10$ с, число шумовых реализаций $J = 20$.

3. Результаты численного эксперимента

Результаты численного эксперимента приведены на рис. 1–3. На рис. 1 представлены нормированные интерферограммы $I(f,t)$ (а), голограммы $F(\tau,v)$ (б), угловые распределения голограммы $G(\chi)$ (в). Предполагается, что источник в начале находится на расстоянии $r_0 = 10$ *км* и движется со скоростью $v = 2$ *м/с*. Результаты на рис. 1 соответствуют трем частотным диапазонам: $100 - 150$ *Гц* (1), $500 - 550$ *Гц* (2), $900 - 950$ *Гц* (3). Как видно из представленных на рис. 1 результатов, при увеличении частоты излучения увеличивается модовый спектр звукового поля.

В частотном диапазоне $100 - 150$ *Гц* модовый спектр звукового поля содержит только пару мод. В результате в пространстве голограммы формируется одно фокальное пятно. В частотном диапазоне $500 - 550$ *Гц* количество мод увеличивается до 16. В пространстве голограммы наблюдается множественные фокальные пятна. Число фокальных пятен еще более увеличивается при переходе от частотного диапазона $500 - 550$ *Гц* к частотному диапазону $900 - 950$ *Гц*. Следует отметить, что для всех трех диапазонов фокальные пятна располагаются на прямой $v = \varepsilon\tau$, проходящей через начало координат.

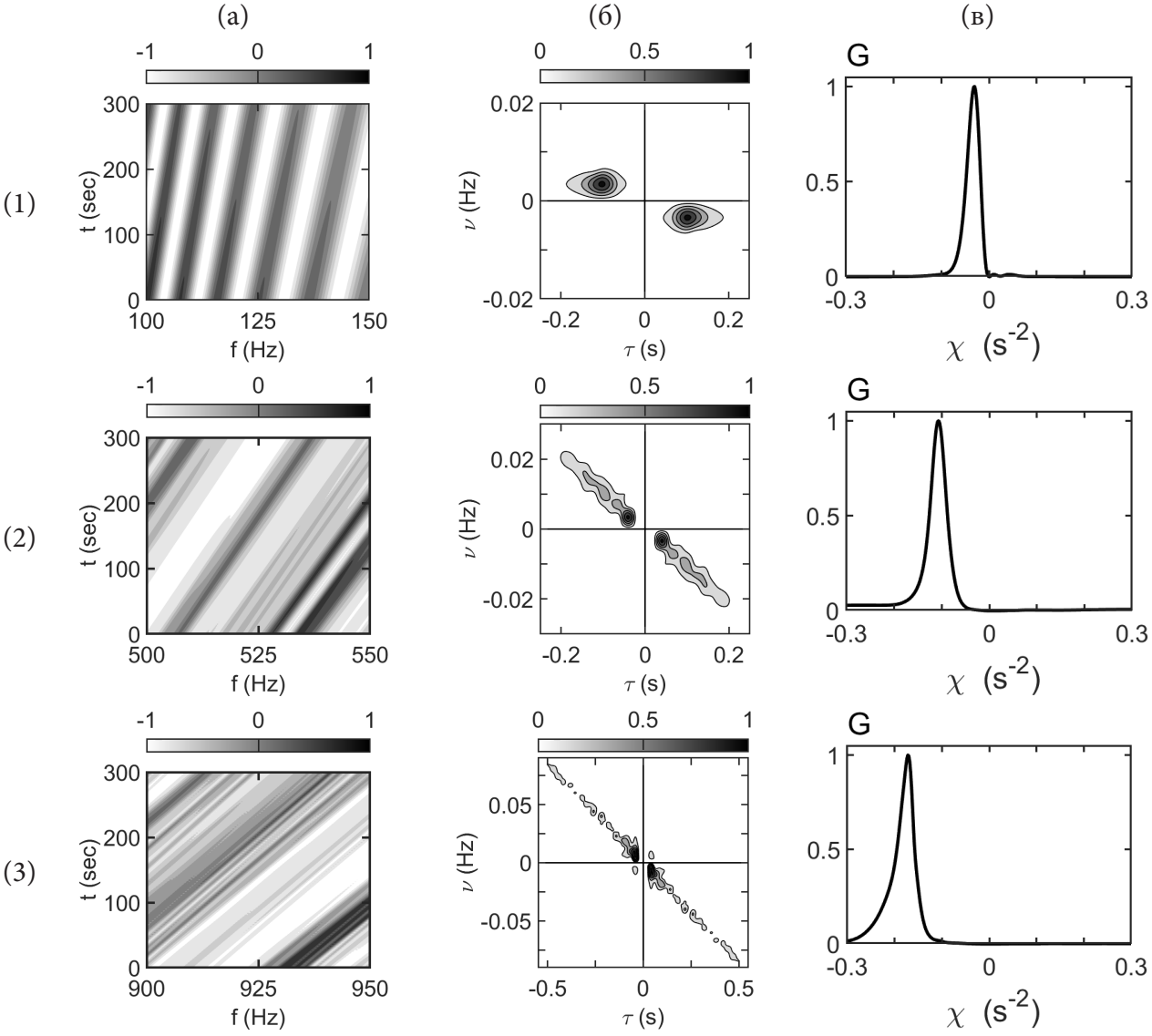
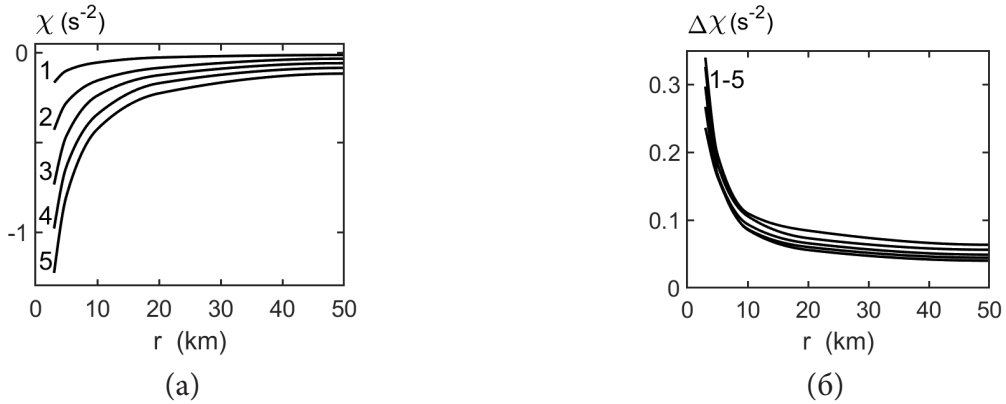
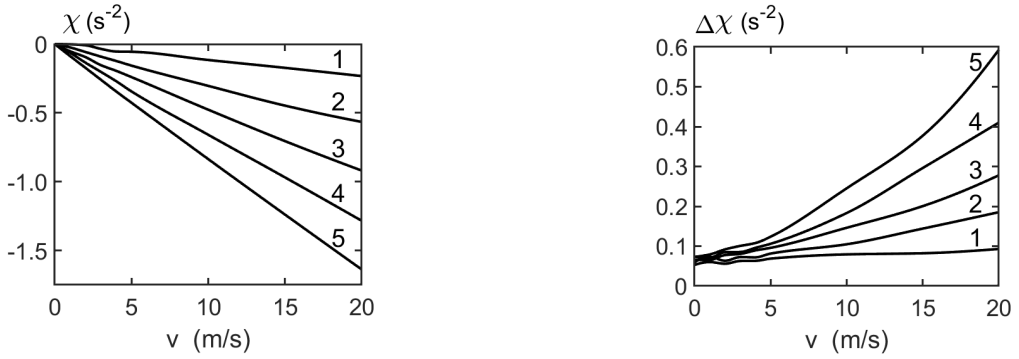


Рис. 1. Нормированные интерферограмма (а), модуль голограммы (б), угловое распределение голограммы (в). Источник на расстоянии $r_0 = 10$ *км движется со скоростью* $v = 2$ *м/с. Частотные диапазоны:* $100 - 150$ *Гц (1),* $500 - 550$ *Гц (2),* $900 - 950$ *Гц (3)*



(а) (б)

Рис. 2. Зависимость от расстояния до источника экстремума углового распределения голограммы χ *(а), ширины углового распределения голограммы* $\Delta\chi$ *(б). Источник движется со скоростью* $v = 2$ *м/с. Кривая 1:* $100 - 150$ *Гц, кривая 2:* $300 - 350$ *Гц, кривая 3:* $500 - 550$ *Гц, кривая 4:* $700 - 750$ *Гц, кривая 5:* $900 - 950$ *Гц*



(а) (б)

Рис. 3. Зависимость от скорости источника экстремума углового распределения голограммы χ (а), ширины углового распределения голограммы $\Delta\chi$ (б). Источник на расстоянии $r_0 = 10$ км движется со скоростью v. Кривая 1: $100-150$ *Гц, кривая 2:* $300-350$ *Гц, кривая 3:* $500-550$ *Гц, кривая 4:* $700-750$ *Гц, кривая 5:* $900-950$ *Гц*

На рис. 2. представлена зависимость от расстояния до источника экстремума углового распределения голограммы χ (а), ширины углового распределения голограммы $\Delta\chi$ (б). Предполагается, что источник движется со скоростью $v = 2$ *м/с*. На рис. 2 кривая 1: $100-150$ *Гц*, кривая 2: $300-350$ *Гц*, кривая 3: $500-550$ *Гц*, кривая 4: $700-750$ *Гц*, кривая 5: $900-950$ *Гц*. Как следует из представленных на рис. 2 результатов, при увеличении расстояния до приемника положение экстремума углового распределения голограммы χ приближается к началу координат, а ширина углового распределения голограммы $\Delta\chi$ существенно уменьшается. Также следует отметить, что с ростом частоты излучения координата экстремума углового распределения голограммы χ увеличивается по величине, ширина углового распределения $\Delta\chi$ практически не изменяется.

На рис. 3. представлена зависимость от скорости источника экстремума углового распределения голограммы χ (а), ширины углового распределения голограммы $\Delta\chi$ (б). Предполагается, что источник на расстоянии $r_0 = 10$ *км* движется со скоростью v. Кривая 1: $100-150$ *Гц*, кривая 2: $300-350$ *Гц*, кривая 3: $500-550$ *Гц*, кривая 4: $700-750$ *Гц*, кривая 5: $900-950$ *Гц*. Как следует из представленных на рис. 3 результатов, при увеличении скорости источника положение экстремума углового распределения голограммы χ удаляется от начала координат, а ширина углового распределения голограммы $\Delta\chi$ существенно увеличивается. Также следует отметить, что с ростом частоты излучения координата экстремума углового распределения голограммы χ увеличивается по величине. Также ширина углового распределения $\Delta\chi$ увеличивается с ростом частоты.

Заключение

В работе представлен анализ частотной зависимости структуры 2D-голограммы источника в океаническом волноводе. В рамках численного эксперимента на основе модового описания звукового поля рассмотрен однородный по глубине океанический волновод. Рассмотрен широкий диапазон частот от 100 Гц до 1000 Гц. Проанализированы параметры углового распределения 2D-голограммы: положение и ширины максимума. Представлены результаты численного эксперимента для зависимости параметров углового распределения 2D-голограммы от расстояния источник-приемник и скорости движения источника.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/

Литература

1. *Кузнецов Г. Н.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море / Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

2. *Казначеев И. В.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником / И. В. Казначеев, Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2018. – Т. 64, № 1. – С. 33–45.

3. *Переселков С. А.* Голографическая обработка широкополосных гидроакустических сигналов / С. А. Переселков, В. М. Кузькин. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. – 183 с.

4. *Казначеева Е. С.* Оценка дальности обнаружения малогабаритного подводного аппарата по его шумовому полю / Е. С. Казначеева, В. М. Кузькин, Ю. В. Матвиенко, С. А. Пересёлков, Ю. А. Хворостов // Подводные исследования и роботехника. – 2021. – № 4 (38). – С. 80–85.

5. *Кузькин В. М.* Предельная дальность обнаружения подводного шумового источника с применением голографической обработки / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, В. И. Грачев, П. В. Рыбянец, С. А. Ткаченко // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 1. – С. 129–136. – DOI: 10.17725/rensit.2024.16.129.

6. *Кузькин В. М.* Обнаружение источника в диспергирующих средах / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Ю. В. Матвиенко, С. А. Ткаченко // РЭНСИТ. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344. – DOI: 10.17725/rensit.2019.11.337.

7. *Kuz'kin V. M.* Noise-source detection in an oceanic waveguide using interferometric processing / V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, Yu. V. Matvienko, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2020. – V. 28, No 1. – P. 68–74.

8. *Kuz'kin V. M.* Resolving power of the interferometric method of source localization / V. M. Kuz'kin, G. N. Kuznetsov, S. A. Pereselkov, V. A. Grigor'ev // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, No 2. – P. 150–159.

9. *Кузькин В. М.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, В. И. Грачев, П. В. Рыбянец, С. А. Ткаченко // РЭНСИТ. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 395–406.

10. *Kuz'kin V. M.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, G. N. Kuznetsov, I. A. Kaznacheev // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, No 1. – P. 63–73.

11. *Kuznetsov G. N.* Direction finding of a noise sound source / G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskiy // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, No 3. – P. 237–241.

12. *Pereselkov S. A.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization / S. A. Pereselkov, V. M. Kuz'kin // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – Vol. 151, No 2. – P. 666–676.

13. *Кузькин В. М.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, П. В. Рыбянец // РЭНСИТ. – 2022. – Т. 14, № 2. – С. 197–204. DOI: 10.17725/rensit.2022.14.197.

14. *Ehrhardt M.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water / M. Ehrhardt, S. Pereselkov, V. Kuz'kin, I. Kaznacheev, P. Rybyanets // Sound and Vibration. – 2023. – Vol. 544. – P. 117388.

15. *Кузькин В. М.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, Н. В. Ладыкин, М. В. Куцов // РЭНСИТ. – 2023. – Т. 15, № 3. – С. 317–326.

16. *Pereselkov S.* The formation of 2D holograms of a noise source and bearing estimation by a vector scalar receiver in the high-frequency band / S. Pereselkov, V. Kuz'kin, M. Ehrhardt, Yu. Matvienko, S. Tkachenko, P. Rybyanets // J. Mar. Sci. Eng. – 2024. – Vol. 12. – P. 704.

17. *Беседина Т. Н.* Определение глубины источника звука в мелком море на фоне интенсивного шума / Т. Н. Беседина, Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2015. – Т. 61, № 6. – С. 718-728.

18. *Kuznetsov G. N.* Wave method for estimating the sound source depth in a oceanic waveguide / G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskiy // J. Phys. Wave Phenom. – 2016. – Vol. 24, No 4. – P. 310–316.

19. *Kaznacheeva E. S.* Measurement capability of the interferometric method of sound source localization in the absence of data on the waveguide transfer function / E. S. Kaznacheeva, G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, No 1. – P. 73–78.

20. *Kaznacheeva E. S.* Adaptive algorithms for interferometric processing / E. S. Kaznacheeva, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, No 3. – P. 267–273.

21. *Бреховских Л. М.* Теоретические основы акустики океана / Л. М. Бреховских, Ю. П. Лысанов. – М. : Наука, 2007. – 370 с.

УДК 004.942

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА НА ПОДВИЖНОЙ ОСНОВЕ

И. А. Бексаев

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В статье построены математические модели перевернутого маятника на подвижной основе. Исследованы свойства модели, такие как полная управляемость, полная наблюдаемость, устойчивость. Разработана компьютерная модель на языке Scilab. Построенные модели могут быть использованы для изучения устойчивости и динамики перевернутого маятника, а также для оптимизации поведения при различных значениях параметров модели. Модели могут быть полезны как для теоретических исследований, так и для практического приложения в области автоматического управления и робототехники.
Ключевые слова: математическая модель, линейная динамическая система, перевернутый маятник на подвижной основе.

Введение

Возникшая изначально в механике проблема стабилизации объектов типа «перевернутый маятник» получила свое развитие в теории автоматического управления. Соответствующие физические объекты можно рассматривать как успешные лабораторные представления неустойчивых механических систем. В последние десятилетия задача прошла несколько этапов развития, начиная с теоретических исследований, заканчивая аппаратным внедрением систем. Появилось большое число отечественных и иностранных публикаций, посвященных разработке алгоритмов стабилизации перевернутого маятника. Это можно объяснить тем, что в сегодняшних реалиях существенно расширился класс объектов управления, имеющих схожую природу. В качестве одного из примеров можно назвать космическую отрасль, где с точки зрения перевернутого маятника можно рассматривать модель ракеты при взлете или солнечные батареи искусственных спутников. В энергетике примером перевернутого маятника может служить модель управления скоростью реакции в ядерном реакторе. В кибернетике к подобной модели можно отнести шагающих роботов, которые в иностранной литературе получили название “biped walking machines” [1].

1. Математическая модель

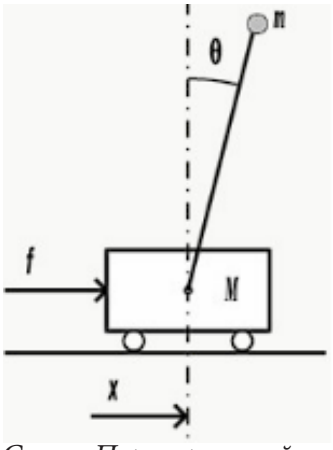


Рис. 1. Схема Перевернутый маятник на подвижной основе

На рис. 1 m — масса маятника, кг; M — масса каретки, кг; l — длина маятника, м, а также переменные: $\theta(t)$ — угол отклонения маятника, рад; $x(t)$ — положение каретки, м.

Уравнения динамики системы перевернутого маятника на подвижной основе имеют следующий вид:

$$m \cdot l^2 \cdot \theta'' - m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta + m \cdot l^2 \cdot \cos\theta \cdot x'' = 0,$$

$$(M+m) \cdot x'' + m \cdot l \cdot \cos\theta \cdot \theta'' - m \cdot l \cdot \sin\theta \cdot \theta^2 = f,$$

Разрешим уравнение относительно старших производных:

$$\begin{pmatrix} l & \cos\theta \\ m\cdot l\cdot\cos\theta & M+m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \theta'' \\ x'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g\cdot\sin\theta \\ m\cdot l\cdot\theta^2\cdot\sin\theta+f \end{pmatrix},$$

Теперь получим уравнения объекта в форме задачи Коши:

$$\frac{d\theta}{dt}=\theta',$$
$$\frac{d\theta}{dt}=d\cdot\theta''=((M+m)\cdot g\cdot\sin\theta-ml\theta'^2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta-f\cdot\cos\theta)/D,$$
$$\frac{dx}{dt}=x',$$
$$\frac{dx}{dt}=x''=(m\cdot l^2\cdot\sin\theta+l\cdot f-m\cdot g\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta)/D,$$

Запишем линейную систему в матричной форме с использованием вектора состояний $V=(\theta,\theta',x,x')$

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(m+M)\cdot g}{l\cdot m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m\cdot g}{M} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \\ x \\ x' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{l\cdot m} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}\cdot u(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot x(t).$$

1.1. Модель в форме передаточной функции

Применяя общую формулу для вычисления передаточной функции линейной динамической системы [2], найдем передаточную функцию модели «перевернутого маятника на подвижной основе», которая имеет следующий вид:

$$G(s)=\frac{l^2\cdot m^2\cdot M\cdot s^2-l\cdot m\cdot M^2\cdot g}{l^2\cdot m^2\cdot M^2\cdot s^4-l\cdot m\cdot M^3\cdot g\cdot s^2-l\cdot m^2\cdot M^2\cdot g\cdot s^2}.$$

1.2. Непрерывная модель в форме системы ДУ первого порядка (СУМ, СНМ, КМ, ФМ)

Физическая модель (ФМ) — это математическая модель, которая основана на законах физики и предназначена для описания физических процессов [3].

ФМ перевернутого маятника:

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(m+M)\cdot g}{l\cdot m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m\cdot g}{M} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \\ x \\ x' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{l\cdot m} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix}\cdot u(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot x(t).$$

Стандартная наблюдаемая модель (СНМ) — это модель, которая предназначена для наблюдения за состоянием системы и оценки ее параметров на основе измерений [3].

Построим СНМ перевернутого маятника:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\\ x\\ x'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{(m+M)\cdot g}{l\cdot m} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\\ x\\ x'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{M}\\ 0\\ \frac{g}{M\cdot l}\end{pmatrix}\cdot u(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot x(t).$$

Стандартная управляемая модель (СУМ) — это модель, которая описывает систему с точки зрения ее управляемости [3].

СУМ перевернутого маятника будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\\ x\\ x'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{(m+M)\cdot g}{l\cdot m} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\\ x\\ x'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\cdot u(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}\frac{-g}{l\cdot m} & 0 & \frac{1}{M} & 0\end{bmatrix}\cdot x(t).$$

Каноническая модель (КМ) — это модель, которая имеет особую форму или структуру, которая является наиболее удобной или эффективной для проведения анализа свойств модели [3].

Построим КМ перевернутого маятника:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\\ x\\ x'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{l\cdot m\cdot(m+M)\cdot g}}{l\cdot m} & 1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{l\cdot m\cdot(m+M)\cdot g}}{l\cdot m}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta\\ \theta'\\ x\\ x'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\cdot u(t)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{m+M} & 0 & \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{M\cdot g\cdot l\cdot m+g\cdot l\cdot m^2\cdot m}}{(m+M)^2\cdot g\cdot M} & -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{M\cdot g\cdot l\cdot m+g\cdot l\cdot m^2\cdot m}}{(m+M)^2\cdot g\cdot M}\end{bmatrix}\cdot x(t).$$

1.3. Анализ свойств полной управляемости и полной наблюдаемости построенных моделей

Проведем анализ свойств полной управляемости и полной наблюдаемости построенных моделей. Управляемость модели означает, что можно перевести систему из любого начального состояния в любое конечное состояние за конечный промежуток времени с помощью подходящего управляющего воздействия [4]. Матрица управляемости для ФМ имеет вид:

$$W_{CTI} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{m \cdot M} & 0 & \frac{(m+M) \cdot g}{l^2 \cdot m^2} \\ \frac{-1}{m \cdot M} & 0 & \frac{(m+M) \cdot g}{l^2 \cdot m^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{g}{M \cdot l} \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{g}{M \cdot l} & 0 \end{pmatrix}$$

$rankW_{CTI} = 4$. Отсюда следует, что физическая модель является полностью управляемой.

Матрица управляемости для СНМ имеет вид:

$$W_{CTI} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & \frac{g}{M \cdot l} \\ \frac{1}{M} & 0 & \frac{g}{M \cdot l} & 0 \\ 0 & \frac{g}{M \cdot l} & 0 & \frac{(m+M) \cdot g^2}{l^2 \cdot m \cdot M} \\ \frac{g}{M \cdot l} & 0 & \frac{(m+M) \cdot g^2}{l^2 \cdot m \cdot M} & 0 \end{pmatrix}$$

$rankW_{CTI} = 4$. Отсюда следует, что стандартная наблюдаемая модель также является полностью управляемой.

Матрица управляемости для СУМ имеет вид:

$$W_{CTI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{(m+M) \cdot g}{l \cdot m} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{(m+M) \cdot g}{l \cdot m} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rankW_{CTI} = 4$. Отсюда следует, что стандартная управляемая модель является полностью управляемой. Матрица управляемости для КМ:

$$W_{CTI} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g}}{l \cdot m} & \frac{(m+M) \cdot g}{l \cdot m} & \frac{(m+M) \cdot g \cdot \sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g}}{l^2 \cdot m^2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g}}{l \cdot m} & \frac{(m+M) \cdot g}{l \cdot m} & \frac{-(m+M) \cdot g \cdot \sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g}}{l^2 \cdot m^2} \end{pmatrix}$$

$$\det(W_{CTI}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot (m+M)^2 \cdot g^2 \cdot \sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g} \cdot m}{l^3 \cdot m^3}.$$

При любых параметрах m, l, M, не равных нулю, определитель матрицы не равен 0. Следовательно, КМ является полностью управляемой при ненулевых значениях параметров l, m, M.

Теперь проверим, обладают ли модели свойством полной наблюдаемости. Вычислим матрицу наблюдаемости для ФМ:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{-m \cdot g}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-m \cdot g}{M} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rank\ M = 4$. Отсюда следует, что ФМ является полностью наблюдаемой. Матрица наблюдаемости для СНМ имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $rank\ M = 4$. Матрица наблюдаемости для СУМ имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{-g}{M \cdot l} & 0 & \dfrac{1}{M} & 0 \\ 0 & \dfrac{-g}{M \cdot l} & 0 & \dfrac{1}{M} \\ 0 & 0 & \dfrac{g}{M \cdot l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{g}{M \cdot l} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $rank\ M = 4$. Отсюда следует, что СУМ является полностью наблюдаемой. Матрица наблюдаемости для КМ:

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{m+M} & 0 & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g} \cdot m}{(m+M)^2 \cdot g \cdot M} & -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g} \cdot m}{(m+M)^2 \cdot g \cdot M} \\ 0 & \dfrac{1}{m+M} & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m}{(m+M) \cdot M} & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m}{(m+M) \cdot M} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g}}{(m+M) \cdot l \cdot M} & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g}}{(m+M) \cdot l \cdot M} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{g}{M \cdot l} & \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{g}{M \cdot l} \end{pmatrix}$$

$\det(M) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{l \cdot m \cdot (m+M) \cdot g} \cdot g}{(m+M)^3 \cdot M^2 \cdot l^2}$, $\det(M) \neq 0$ при $\forall\ m,\ l$ кроме $M = 0$ или $l = 0$.

Следовательно, КМ является полностью управляемой при ненулевых значениях параметров $l,\ m,\ M$.

Таким образом, проанализировав свойства полной управляемости и полной наблюдаемости построенных моделей, можно сделать вывод о том, что все модели обладают свойствами полной управляемости и полной наблюдаемости и могут быть использованы для решения задачи моделирования перевернутого маятника на подвижной основе.

1.4. Устойчивость моделей

Данное свойство показывает, насколько модель сохраняет свои характеристики и эффективность в различных условиях и при воздействии внешних факторов. Устойчивая модель будет продолжать работать, несмотря на возможные изменения входных данных или другие внешние воздействия [5].

Матрица устойчивости по критерию Рауса — Гурвица имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ l^2 \cdot m^2 \cdot M^2 & l \cdot m \cdot M^3 - l \cdot m^2 \cdot M \cdot g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l \cdot m \cdot M^3 - l \cdot m^2 \cdot M \cdot g & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что все главные миноры равны нулю. Таким образом, система является неустойчивой и при увеличении временного интервала значения элементов вектора состояния будут стремиться к бесконечности.

2. Компьютерная модель

Разработка компьютерной модели перевернутого маятника на подвижной основе выполнена на языке Scilab. Приведем общее описание этого процесса компьютерного моделирования. Входные данные: M — масса тележки, m — масса маятника, l — длина маятника, g — ускорение свободного падения, F — сила, действующая на тележку.

Модель перевернутого маятника на тележке: тележка может перемещаться горизонтально, а маятник прикреплен к ней и может качаться в вертикальной плоскости.

Цель — изучить движение перевернутого маятника на каретке при различных входных данных.

Условия моделирования: 1) начальные условия: указать значения (m, M, l) на начальный момент времени и входные воздействия, применяемые к модели; 2) продолжительность моделирования: заданный период времени, в течение которого будет выполняться моделирование.

Выходные данные: 1) график зависимости положения тележки от времени; 2) график зависимости угла отклонения маятника от времени; 3) график зависимости скорости тележки от времени; 4) график зависимости угловой скорости маятника от времени.

Шаги для реализации модели: 1) задание начальных значений для параметров M, m, l, g, F; 2) определение уравнений движения тележки и маятника в форме пространства состояний; 3) решение дифференциальных уравнений движения; 4) отображение результатов моделирования. Используется функция plot() для отображения графиков положения, угла, скорости и угловой скорости.

Вычислительный эксперимент. Параметры Модели: $l = 1$; $m = 1$; $M = 1$; $t0 = 0$; $t\max = 50$; $x0 = [0;0;0;0]$; $t = t0 : 0.1 : t\max$. Рис. 2–5.

Заключение

Практическое применение компьютерной модели перевернутого маятника на подвижной основе заключается в возможности оптимизации работы в зависимости от различных условий и параметров. Разработанные математические модели перевернутого маятника на подвижной основе позволяют описать и проанализировать сложное движение системы с высокой точностью и эффективностью. Исследования показали, что изменение параметров системы существенно влияет на ее движение и характеристики. Таким образом, анализ различных вариантов параметров позволяет оптимизировать работу системы и предсказывать ее поведение в различных условиях.

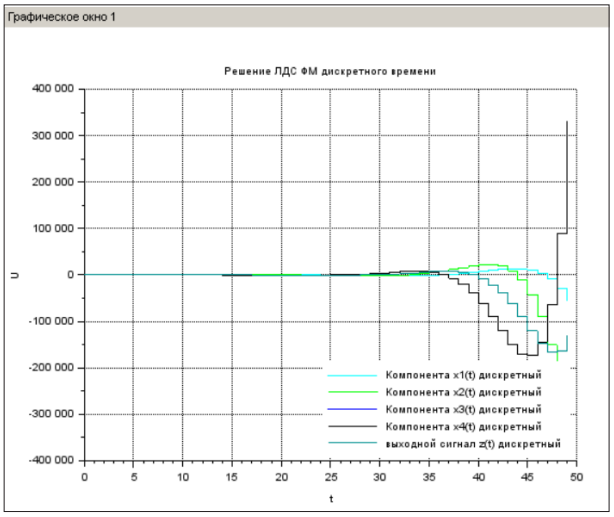


Рис. 2. График элементов вектора состояния и выходного сигнала моделей ФМ в дискретном времени, эксперимент 2

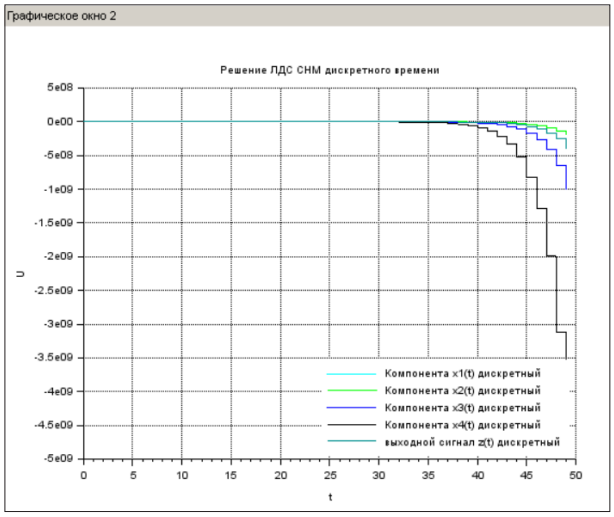


Рис. 3. График элементов вектора состояния и выходного сигнала моделей СНМ, в дискретном времени, эксперимент 2

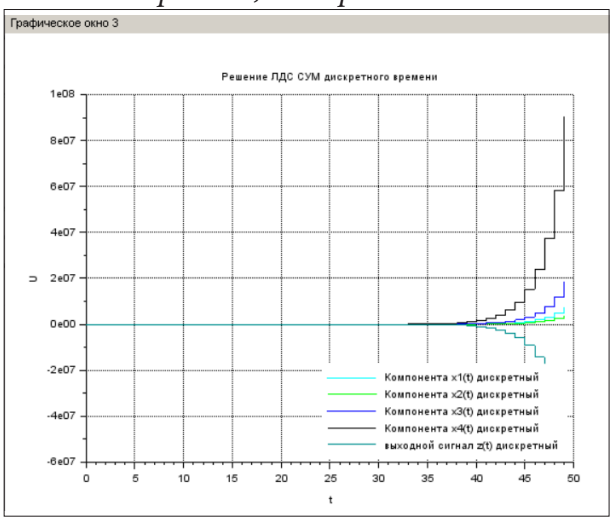


Рис. 4. График элементов вектора состояния и выходного сигнала моделей СУМ в дискретном времени, эксперимент 2

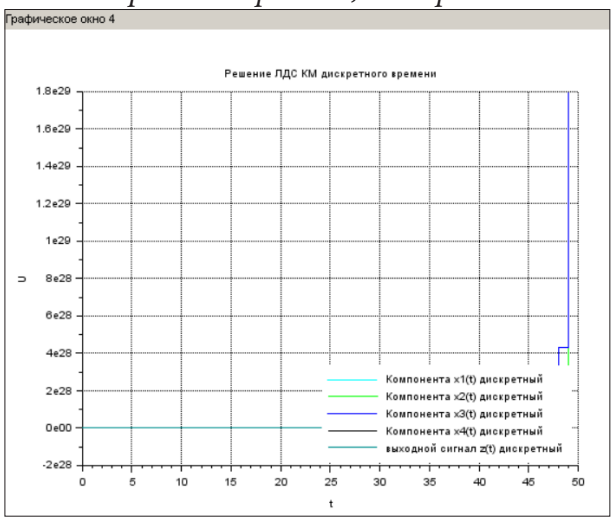


Рис. 5. График элементов вектора состояния и выходного сигнала моделей КМ в дискретном времени, эксперимент 2

Литература

1. *Raibert M. H.* Legged Robots That Balance / M. H. Raibert. – Cambridge, MA : MIT Press, 1986. – 224 p.

2. *Филиповский В. М.* Дискретные системы в пространстве состояний. Учебное пособие / В. М. Филипинский. – СПб., 2020. – 35 с.

3. *Звонарев С. В.* Основы математического моделирования: учебное пособие / С. В. Звонарев. – Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2019. – 112 с.

4. *Семушин И. В.* Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения / под ред. проф. И. В. Семушина. – Ульяновск : УлГУ, 2011. – 298 с.

5. *Колесов Ю. Б., Сениченков Ю. Б.* Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. Учебное пособие. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 224 с.

УДК 539.214, 539.374, 539.383

АНАЛИЗ РАБОТЫ ОПОРНОЙ ЧАСТИ С ШАРОВЫМ СЕГМЕНТОМ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЗАДАЧИ

А. П. Богданова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Аннотация. Вопрос о выборе модели поведения материалов стоит весьма актуальный при моделировании работы конструкции. Полимерные материалы применяются в разных сферах промышленности, в частности, работающим как слой скольжения. Одной из таких конструкцией является опорная часть с шаровым сегментом (ОЧШС), где полимерный материал служит антифрикционной прослойкой между двумя балансирами. Ранее задача рассматривалась в упруго-пластической постановке, однако для рассмотрения работы конструкции на всем рабочем диапазоне необходимо учитывать вязкоупругое/вязкоупругопластическое поведение материалов. В работе рассматривается первый этап перехода к рассмотрению вязкоупругого слоя скольжения. Выявлено, что при втором варианте рассмотрения задачи, максимальные значения контактных параметров ниже, а также существенно не зависят от толщины слоя скольжения.

Ключевые слова: опорная часть, полимерные материалы, модифицированный фторопласт, упруго-пластичное тело, вязкоупругое тело, механика контактного взаимодействия, идеальный контакт, адгезионный контакт, фрикционный контакт, осесимметричная задача.

Введение

Мостовые сооружения [1–3] и их элементы, воспринимающие нагрузки от пролетного строения, такие как опоры мостов [4], являются одними из важнейших узлов транспортных систем, требующих постоянного мониторинга и отслеживания их технического состояния. Опоры являются «сердцем» мостовых конструкций и воспринимают широкий спектр нагрузок: от пролетного строения моста, от различных транспортных средств, ветровых, сейсмических, температурных и т. д. Таким образом, опорные части работают в сложных температурных и силовых режимах, к ним предъявляются повышенные требования, связанные с несущей способностью, работоспособностью в течение длительных периодов времени, надежностью и устойчивостью. Широко распространенной в мостостроении является сферическая или шаровая сегментная опора [5, 6]. Она состоит из двух стальных балансиров, взаимодействующих между собой через антифрикционный слой или слой скольжения.

В качестве материала антифрикционного слоя используются полимеры и композиты на их основе. Одним из наиболее распространенных материалов антифрикционного слоя является политетрафторэтилен (ПТФЭ) или тефлон, также используются его модификации. Однако сегодня производители стараются заменить PTFE на полимерный/композитный материал с улучшенными характеристиками. При выборе материала антифрикционного слоя необходимо, чтобы он обладал определенными параметрами прочности, надежности, реологии, физико-механических и антифрикционных свойств. Актуальным направлением является разработка новых полимерных материалов и композитов на их основе. Благодаря этому появляются комплексы материалов с расширенной областью применения, в частности в качестве антифрикционного слоя [8–10]. Такими материалами могут быть: полиэфирэфиркетон (ПЭЭК), полиметилметакрилат (ПММА), полиуретан (ПУ), полиамид (ПА), сверхвысокомолекулярные полиэтилены UHMWPE, композиты на основе фторопласта-4 с различными нанонаполнителями, ПТФЭ [11]. Проектный учет с моделированием таких свойств, как: термомеханические,

фрикционные, физико-механические — позволит лучше оценить и оптимизировать работу антифрикционного слоя в конкретных условиях эксплуатации конструкции [6, 7].

Особый интерес представляют эксплуатационные и деформационные характеристики, качественные и количественные закономерности изменения параметров контактной зоны, особенности эксплуатации в экстремальных эксплуатационных и температурных режимах и т.д. Особый интерес представляет оптимизация выбора антифрикционных материалов. Оптимизация выбора материалов антифрикционного слоя деталей подшипников позволит увеличить срок службы конструкции.

1. Материалы и методы

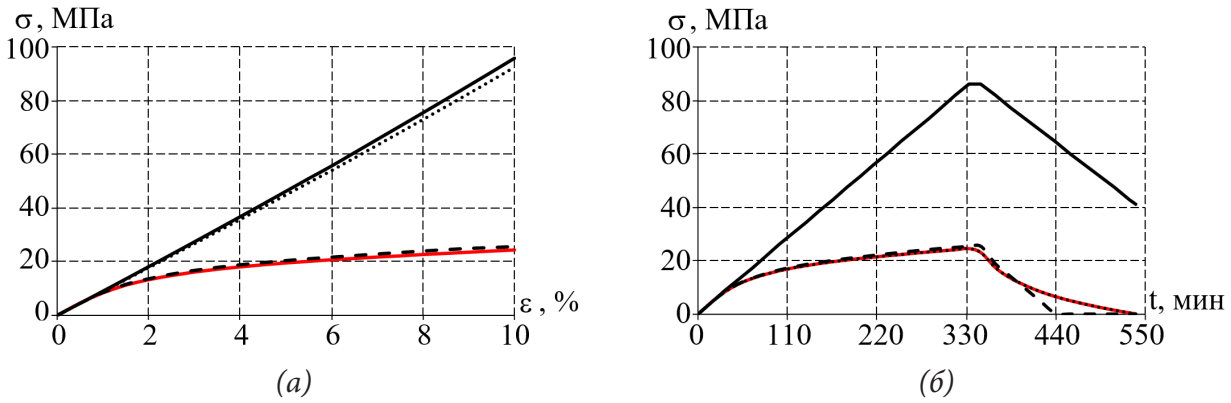
Ранее задача рассматривалась в рамках упруго-пластичной постановки. Однако для решения задачи в динамической постановке, что позволит провести более качественный анализ работоспособности полимерных/композиционных материалов в опорной части с шаровым сегментом (ОЧШС), мы перешли к рассмотрению слоя скольжения, как вязкоупругого тела. Параметризированная модель реализована в инженерном пакете Ansys Mechanical с использованием языка APDL, решается с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Одними из простых и подходящих моделей вязкоупругости в данном комплексе являются модели Ананд и Прони. Однако в данной работе мы рассматриваем конструкцию с описанием слоя скольжения моделью Прони.

Первый этап моделирования вязкоупругого поведения

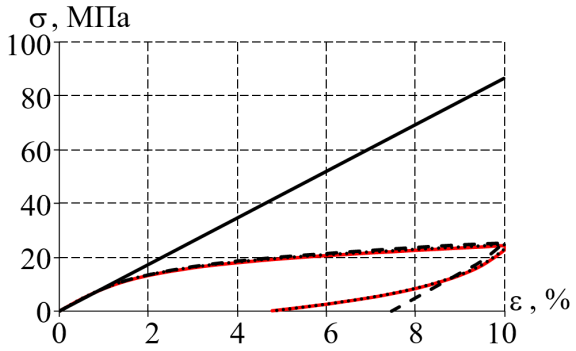
Д.ф.-м.н. А. А. Адамовым на базе филиала ПФИЦ УрО РАН (ИМСС УрО РАН) ранее были проведены исследования физико-механических и эксплуатационных свойств перспективных полимерных материалов разного производства. Исследование проводилось с помощью натурных экспериментов при сложном нагружении в рамках одноосного напряженного и одноосно-деформированного состояний при комнатной температуре. Одним из материалов в группе перспективных был γ-модифицированный фторопласт (ПТФЭ).

С помощью программно-аппаратного комплекса, были получены коэффициенты для описания вязкоупругого поведения материала. И реализовано численное напряженно-деформированное состояние цилиндрического образца, которое повторяет состояние натурного эксперимента (деформирование до 10 %).

На рис. 1(а) показана диаграмма напряжения-деформации при статическом расчете задачи. На рис. 1(б, в) показаны зависимости, полученные при численном моделировании эксперимента в зависимости от времени воздействия нагрузки на образец.



(а) *(б)*



(в)

Рис. 1. Диаграмма напряжение-деформация (а); зависимость напряжения от времени (б); зависимость напряжения от деформации (в): красная линия — экспериментальные данные; черная: сплошная линия — упругое тело, пунктир — упругопластическое тело, точки — вязкоупругое тело

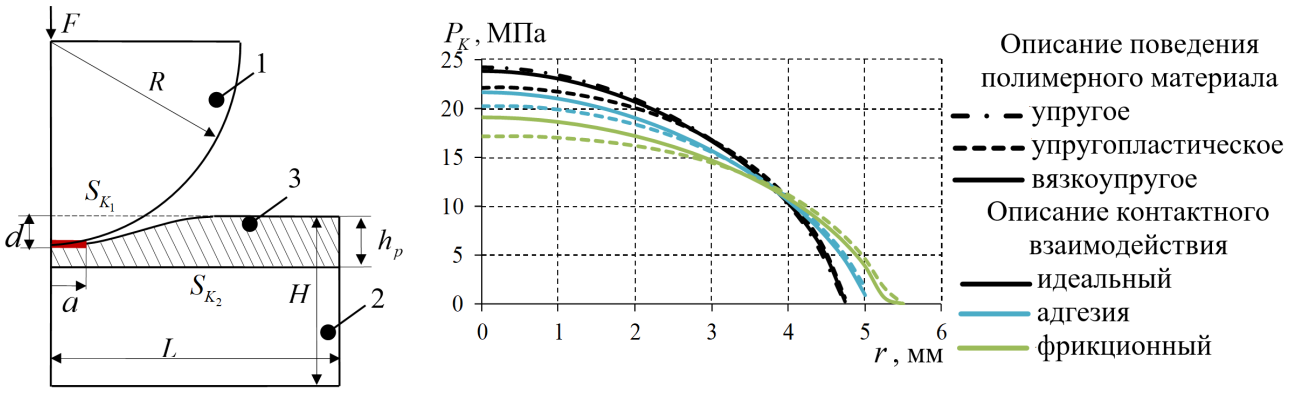
В рамках численного анализа установлено, что моделирование полимерного материала как упругопластического тела следует реализовывать непосредственно при первичных статических расчетов, которые позволят оценить прочностные характеристики конструкции. Однако для проведения анализа работы конструкции на всех этапах жизненного цикла, следует моделировать полимерный слой скольжения, как вязкоупругое тело.

2. Анализ полученных результатов

Для моделирования взякоупругого слоя скольжения получены коэффициенты уравнений. Далее на простейшей модели проводим верификацию численной модели.

2.1. Верификация численной модели

При моделировании контактной задачи, в зависимости от работы конструкции есть возможность задавать разный вид контактного взаимодействия. В данной задаче рассмотрено три вида контакта: идеальный — сетка моделируется «узел в узел», происходят совместные напряжения и деформации; адгезия — перемещения узлов равны между сопрягаемыми поверхностями, напряжения различны; фрикционный контакт — между поверхностями реализуется Кулоновское трение (коэффициент трения = 0,04 в настоящей работе). Для первого этапа решения задачи была выбрана модифицированная задача Герца (рис. 2(а)). Данная модель состоит из: 1 — сферический стальной индентор; 2 — стальное полупространство; 3 — полимерный слой скольжения (из ПТФЭ).



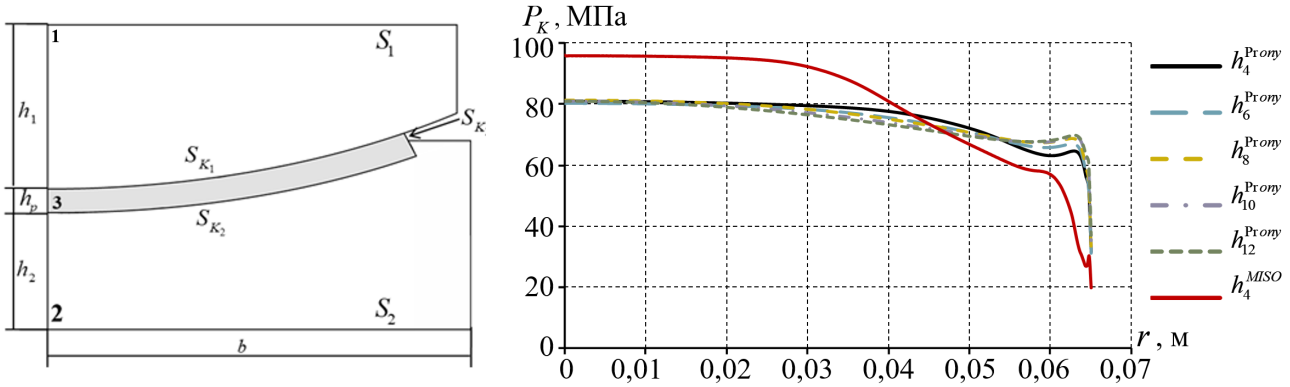
(а) *(б)*

Рис. 2. Расчетная схема (а); распределение контактного давления по контактной поверхности (б)

На рис. 2(б) представлено распределение контактного давления для трех вариантов моделирования поведения полимерного слоя скольжения при разном контактном взаимодействии. Стоит отметить, что в данном случае упругое и вязкоупругое поведение материала даёт схожие результаты, так как задача решается в статической постановке с пошаговым нагружением. И вязкости материала ещё не наблюдается. Однако при сравнении вида контактного взаимодействия стоит отметить, что за счет наибольшей области контакта значения контактного давления более равномерно распределены, в связи, с чем и максимальный уровень значений значительно ниже, относительно идеального контакта.

2.2. Расчет вязкоупругой модели

На следующем этапе проведем анализ работы конструкции при разной толщине слоя скольжения и двумя вариантами моделирования его поведения. Рассмотрим ОЧСШ в осесимметричной постановке (рис. 3(а)), где: 1, 2 — стальная плита со сферическим сегментом и вырезом соответственно, 3 — антифрикционный полимерный материал. Стандартная толщина слоя скольжения на производстве $h_p = 4$ мм. Однако производители рассматривают возможность увеличения толщины слоя скольжения, что может послужить увеличению безремонтному срока службы конструкции. Что может сократить временные и экономические траты производителей.



(а) *(б)*

Рис. 3. Распределение контактного давления для: упругопластической прослойки $h_p = 4$ мм; вязкоупругой прослойки $h_p = 4 \div 12$ мм

На рис 3(б) представлено распределение контактного давления на поверхности S_{K_1} для всех рассматриваемых состояний слоя скольжения. Стоит отметить, что при моделировании слоя скольжения как вязкоупругого тела, контактное давление не только значительно ниже, чем при упруго-пластичском рассмотрении, но и влияние толщины слоя скольжения не существенно.

Следующая поверхность S_{K_3} важная для рассмотрения, так как на ней имеет бесконтактная область, где материал имеет возможность перемещаться. Так, при больших перемещениях материала, может возникать срез края слоя скольжения, что в дальнейшем может стать последствием некорректной работы ОЧСШ и сокращения её безремонтной эксплуатации. На рис. 4 представлено распределения контактного давления.

Стоит отметить, что максимальные значения возникают в концентраторе напряжений. Однако при увеличении толщины слоя скольжения основной характер распределения не меняется, а максимальные значения контактного давления меньше всего возникают на слое скольжения толщиной 6 и 8 мм.

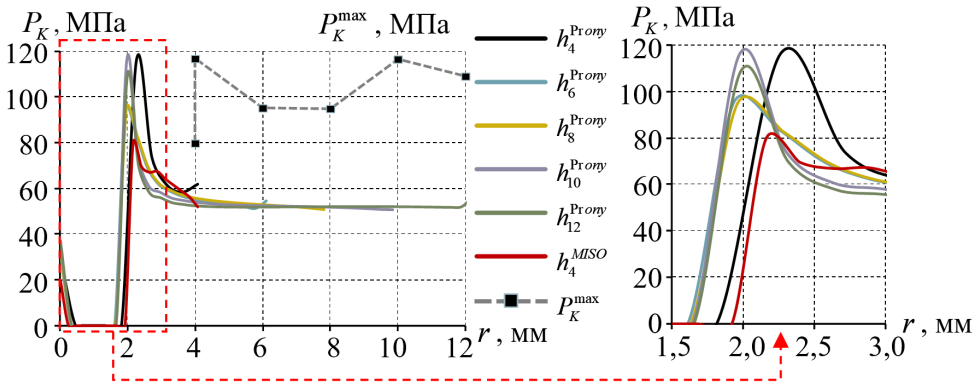


Рис. 4. Распределение контактного давления на торце прослойки для: упругопластической прослойки $h_p = 4$ мм; вязкоупругой прослойки $h_p = 4 \div 12$ мм

При моделировании слоя скольжения, как вязкоупругого тела перемещения, возникающие на торце почти в 4 раза ниже, чем при моделировании его как упругопластического тела (рис. 5).

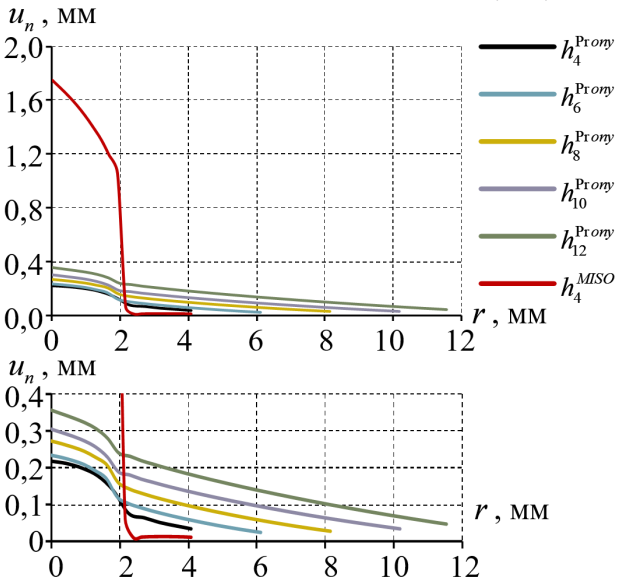


Рис. 5. Распределение перемещений по нормали торца антифрикционной прослойки для упругопластической прослойки $h_p = 4$ мм; вязкоупругой прослойки $h_p = 4 \div 12$ мм

При анализе влияния толщины слоя скольжения на возникающие перемещения, стоит отметить, что оно незначительно и зависимость толщины от величины перемещений прямо пропорциональная в данной задаче.

Заключение

В ходе работы с помощью программно-аппаратного комплекса подобраны коэффициенты для описания вязкоупругого поведения материала. Получено, что для расчета прочностных характеристик конструкции достаточно использовать упруго-пластическую постановку. Однако для описания работы конструкции на всем рабочем диапазоне конструкции необходимо моделировать материал как вязкоупругое/вязкоупругопластическое тело.

Рассмотрена работа ПТФЭ в качестве слоя скольжения при разном моделировании его поведения. Получено, что при сравнении трех вариантов контактных взаимодействий (идеальное, адгезия, фрикционное) меньшее значение контактных параметров наблюдается у модели с фрикционным контактом, за счет увеличения площади контакта.

Влияние толщины слоя скольжения на контактные и деформационные параметры не значительны. При моделировании слоя скольжения как вязкоупругого тела наблюдается значительное снижение уровня как контактных параметров, так и перемещений, возникающих на торце прослойки.

Дальнейшей реализацией будет рассмотреть работу конструкции при динамическом нагружении.

Благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю Каменских Анне Александровне за ценные советы при планировании исследования и рекомендации по оформлению статьи.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0007).

Литература

1. On Determination of the Linear Viscoelastic Compliance and Relaxation Functions for Polymers in One Tensile Test / R. T. S. Freire, S. G. Nunes, S. C. Amico et al. // Mechanics of Composite Materials. – 2023. – Vol. 58. – P. 765–786. https://doi.org/10.1007/s11029-023-10067-0

2. *Erdélyi J.* Spatial Data Analysis for Deformation Monitoring of Bridge Structures / J. Erdélyi, A. Kopáčik, P. Kyrinovič // Appl. Sci. – 2020. – Vol. 10. – Art. 8731. https://doi.org/10.3390/app10238731

3. *Noori Hoshyar A.* Proposed Machine Learning Techniques for Bridge Structural Health Monitoring: A Laboratory Study / A. Noori Hoshyar, M. Rashidi, Y. Yu, B. Samali // Remote Sens. – 2023. – Vol. 15. – Art. 1984. https://doi.org/10.3390/rs15081984

4. *Locke R.* Techniques for simulating frozen bearing damage in bridge structures for the purpose of drive-by health monitoring / R. Locke, L. Redmond, S. Atamturktur // Dynamics of Civil Structures. – 2021. – Vol. 2. – P. 39–52. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47634-2_6

5. *Nosov Y. O.* Influence Analysis of Lubricant Recesses on the Working Capacity of the Bridge Span Spherical Bearing / Y. O. Nosov, A. A. Kamenskikh // Lubricants. – 2022. – Vol. 10. – Art. 283. https://doi.org/10.3390/lubricants10110283

6. *Yi X.* Composite materials engineering, volume 1: fundamentals of composite materials / X. Yi, S. Du, L. Zhang; Springer. – Singapore, 2018. https://doi.org/10.1007/978-981-10-5696-3

7. *Shelestova V. A.* New antifriction materials of the Fluvis group based on modified carbon fibers / V. A. Shelestova, P. N. Grakovich, S. G. Danchenko, V. A. Smirnov // Chemical and Petroleum Engineering. – 2006. – Vol. 42. – P. 663–666. https://doi.org/10.1007/s10556-006-0160-8

8. *Wang Q. J., Chung Y. W.* Antifriction materials and composites / Q. J. Wang, Y. W. Chung; Springer. – Boston, USA, 2013. https://doi.org/10.1007/978-0-387-92897-5_100044

9. *Lin Z.* The effects of filler type on the friction and wear performance of PEEK and PTFE composites under hybrid wear conditions / Z. Lin, K. Zhang, J. Ye [et al] // Wear. – 2022. – Vol. 490–491. – Art. 204178. https://doi.org/10.1016/j.wear.2021.204178

10. *Abdul Samad M.* Recent Advances in UHMWPE/UHMWPE Nanocomposite/UHMWPE Hybrid Nanocomposite Polymer Coatings for Tribological Applications: A Comprehensive Review / M. Abdul Samad // Polymers. – 2021. – Vol. 13. – Art. 608. https://doi.org/10.3390/polym13040608

11. *Bakbak O.* Modeling wide range of viscoelastic–viscoplastic behaviorof Araldite LY 564 epoxy using cooperative viscoplasticitytheory based on overstress model / O. Bakbak, O. Colak // J. Appl. Polym. Sci. – 2023. – Vol. 140, № 9. – Art. e53557. https://doi.org/10.1002/app.53557

УДК 004.94

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОМЫСЛОВОЙ РЫБЫ-ДЕТРИТОФАГА В АКВАТОРИИ АЗОВСКОГО МОРЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМНОЙ РЕГУЛЯЦИИ

Д. В. Бондаренко, А. В. Никитина, Ю. В. Белова

Донской государственный технический университет

Аннотация. Разработана и исследована математическая модель биологической кинетики, включающая систему уравнений в частных производных с реактивными членами, учитывающая пищевой таксис (движение промысловой рыбы пиленгас в сторону пищи — детрита и личинок комара-звонца Chironomidae — мотыля), каждое уравнение которой может быть сведено к задаче типа диффузии-конвекции. Основная идея численного решения данной задачи заключается в построении схем с весами специального вида. Описана программная реализация математической модели ихтиологического процесса мелководного водоема в виде программного комплекса, проведен ряд вычислительных экспериментов на основе сценарного подхода.
Ключевые слова: промысловые рыбы, хирономиды, мелководный водоем, математическая модель, гидробиология, алгоритм, программный модуль.

Введение

На сегодняшний момент очень важной является проблема сохранения и реабилитации акваторий мелководных водоемов, таких как Азовское море, наиболее подверженных антропогенным воздействиям и природно-климатическим изменениям. Промысловые виды рыб, такие как судак, тарань, пиленгас, имеют тенденцию к сокращению и полному вымиранию [1]. Антропогенные изменения окружающей среды, рыболовный промысел, изменения биохимического состава водной среды могут привести к значительному ухудшению процессов воспроизводства ценных и промысловых рыб, а также могут нарушить механизм самоочищения водоема. Для улучшения ситуации необходимо обеспечить мальков данных видов постоянным источником пищи, которым могут выступать комары вида *Chironomidae*. Комары-звонцы *Chironomidae* имеют широкое распространение в акватории Азово-Черноморского бассейна [2]. Способом размножения этих комаров являются личинки, которые они откладывают в места водоема со слабым течением. Обычно, такие места расположены в поймах рек или на стыке с мелководными солёными водоемами. Имея представление о пространственном распространении личинок комаров в водной среде, можно прогнозировать динамику развития рыбных популяций. На основе полученных данных разрабатывать стратегии устойчивого развития прибрежных регионов, а также вырабатывать рекомендации по рекреации акватории.

Постановка задачи

Комары-звонцы Хирономиды в стадии личинки проводят от нескольких недель до двух лет. Высокая степень экологической пластичности дает им широкие возможности для освоения новых, создаваемых человеком местообитаний. В благоприятных условиях обитания личинки хирономид доминируют над другими донными беспозвоночными рек и озёр. Они часто играют важную роль в сообществах: перерабатывают органическое вещество в минеральное, питаясь детритом, участвуют в процессе самоочищения водной среды. Пиленгас (*Planiliza haematocheilus*) — вид морских рыб-детритофагов из семейства кефалевых, который обитает в Азовском море, питаясь преимущественно детритом и мотылём. Для моделирования рас-

пространения личинок комара вида *Chironomidae* предложена модель, базирующаяся на известной модели Лотки — Вольтерры, а именно «хищник-жертва» [3]. Модель описывает диффузионное перемещение и динамику изменения концентрации жертв (личинки комаров вида Chironomidae (мотыль)) и описывающее диффузионное и динамику изменения концентрации за счет роста и смертности хищников (пиленгас):

$$\begin{cases} N'_t = \left(\mu_N N'_x\right)'_x + \left(\mu_N N'_y\right)'_y + C_1\left(N_0 - N\right)N - C_2 P, \\ P'_t + uP'_x + vP'_y = \left(\mu_P P'_x\right)'_x + \left(\mu_P P'_y\right)'_y - C_3 P + C_4 NP, \end{cases}$$

где N — концентрация мотыля; P — концентрация пиленгаса; N_0 — предельная концентрация мотыля; u, v — компоненты вектора скорости конвективного движения пиленгаса; C_1, C_2 — коэффициенты роста и смертности мотыля, C_3, C_4 — коэффициенты роста и смертности пиленгаса; C_5 — коэффициент пищевого таксиса (движение рыбы в сторону личинок комара); μ_N, μ_P — коэффициенты диффузионного перемещения мотыля и рыбы.

Уравнения для вычисления компонентов вектора скорости движения рыбы в направлении градиента пищи (мотыля) описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha u + \beta\left(u'_t + uu'_x + vu'_y\right) = \left(\mu_u u'_x\right)'_x + \left(\mu_u u'_y\right)'_y + C_5 N'_x, \\ \alpha u + \beta\left(v'_t + uv'_x + uv'_y\right) = \left(\mu_v u'_x\right)'_x + \left(\mu_v u'_y\right)'_y + C_5 N'_y, \end{cases}$$

где α и β — весовые коэффициенты.

Преобразуем дискретный аналог уравнения движения жертв к канонической форме с выделением коэффициентов сеточного уравнения, которые располагаются вблизи центра шаблона. Эти коэффициенты могут быть выражены как:

$$B\left(Q_0, Q_m\right) = \sigma\frac{\mu_N\left(Q_m\right) + \mu_N\left(Q_0\right)}{2h_x^2} q_m\left(Q_0\right),\ m = \overline{1,2},$$

$$B\left(Q_0, Q_m\right) = \sigma\frac{\mu_N\left(Q_m\right) + \mu_N\left(Q_0\right)}{2h_y^2} q_m\left(Q_0\right),\ m = \overline{3,4}.$$

Коэффициент для центра шаблона будет иметь вид:

$$A\left(Q_0\right) = \frac{q_0\left(Q_0\right)}{\tau} + \sum_{m=1}^{4} B\left(Q_0, Q_m\right) - C_1 q_0\left(Q_0\right)\left(N_0 - N\left(Q_0\right)\right)\sigma.$$

Для формулировки правой части сеточного уравнения вводятся вспомогательные коэффициенты:

$$B\left(Q_0, Q_{m+5}\right) = \left(1-\sigma\right)\frac{\left(\mu_N\left(Q_m\right) + \mu_N\left(Q_0\right)\right)}{2h_x^2} q_m\left(Q_0\right),\ m = \overline{1,2},$$

$$B\left(Q_0, Q_{m+5}\right) = \left(1-\sigma\right)\frac{\left(\mu_N\left(Q_m\right) + \mu_N\left(Q_0\right)\right)}{2h_y^2} q_m\left(Q_0\right),\ m = \overline{3,4},$$

$$B\left(Q_0, Q_5\right) = \frac{q_0\left(Q_0\right)}{\tau} - \sum_{m=6}^{9} B\left(Q_0, Q_m\right) + C_1 q_0\left(Q_0\right)\left(N_0 - N\left(Q_0\right)\right)\left(1-\sigma\right),$$

в результате чего правые части сеточных уравнений принимают вид:

$$F\left(Q_0\right) = \sum_{m=0}^{4} B\left(Q_0, Q_{m+5}\right)N\left(Q_m\right) - C_2 q_0\left(Q_0\right)P\left(Q_0\right).$$

Запишем дискретный аналог уравнения движения промысловой рыбы в канонической форме. Коэффициенты сеточного уравнения, стоящие в окрестности центра шаблона, имеют вид:

$$B(Q_0,Q_1)=\sigma\left(-\frac{u(Q_1)+u(Q_0)}{4h_x}+\frac{\mu_P(Q_1)+\mu_P(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_1(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_2)=\sigma\left(-\frac{u(Q_2)+u(Q_0)}{4h_x}+\frac{\mu_P(Q_2)+\mu_P(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_2(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_3)=\sigma\left(-\frac{v(Q_3)+v(Q_0)}{4h_y}+\frac{\mu_P(Q_3)+\mu_P(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_3(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_4)=\sigma\left(-\frac{v(Q_4)+v(Q_0)}{4h_y}+\frac{\mu_P(Q_4)+\mu_P(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_4(Q_0).$$

Коэффициент для центра шаблона имеет вид:

$$A(Q_0)=\frac{q_0(Q_0)}{\tau}+\sum_{m=1}^{4}B(Q_0,Q_m)+\left(C_3-C_4N(Q_0)\right)\sigma.$$

Коэффициенты сеточного уравнения, стоящие в окрестности центра шаблона, будут следующего вида:

$$B(Q_0,Q_6)=(1-\sigma)\left(-\frac{u(Q_1)+u(Q_0)}{4h_x}+\frac{\mu_P(Q_1)+\mu_P(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_1(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_7)=(1-\sigma)\left(-\frac{u(Q_2)+u(Q_0)}{4h_x}+\frac{\mu_P(Q_2)+\mu_P(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_2(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_8)=(1-\sigma)\left(-\frac{v(Q_3)+v(Q_0)}{4h_y}+\frac{\mu_P(Q_3)+\mu_P(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_3(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_9)=(1-\sigma)\left(-\frac{v(Q_4)+v(Q_0)}{4h_y}+\frac{\mu_P(Q_4)+\mu_P(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_4(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_5)=\frac{q_0(Q_0)}{\tau}-\sum_{m=6}^{9}B(Q_0,Q_m)+\left(C_3-C_4N(Q_0)\right)(1-\sigma).$$

Тогда правые части сеточных уравнений имеют вид:

$$F(Q_0)=\sum_{m=0}^{4}B(Q_0,Q_{m+5})P(Q_m).$$

Запишем дискретный аналог уравнений таксиса в канонической форме взаимодействия. Коэффициенты сеточного уравнения, стоящие в окрестности центра шаблона, имеют вид:

$$B(Q_0,Q_1)=\sigma\left(-\frac{u(Q_1)+u(Q_0)}{4h_x}\beta+\frac{\mu_u(Q_1)+\mu_u(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_1(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_2)=\sigma\left(-\frac{u(Q_2)+u(Q_0)}{4h_x}\beta\frac{\mu_u(Q_2)+\mu_u(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_2(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_3)=\sigma\left(-\frac{v(Q_3)+v(Q_0)}{4h_y}\beta+\frac{\mu_v(Q_3)+\mu_v(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_3(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_4)=\sigma\left(-\frac{v(Q_4)+v(Q_0)}{4h_y}\beta+\frac{\mu_v(Q_4)+\mu_v(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_4(Q_0).$$

Коэффициент для центра шаблона примет значение:

$$A(Q_0)=\frac{q_0(Q_0)}{\tau}\beta+\sum_{m=1}^{4}B(Q_0,Q_m)+\sigma\alpha.$$

После записи правой части сеточного уравнения с введением вспомогательных коэффициентов, получим следующее:

$$B(Q_0,Q_6)=(1-\sigma)\left(-\frac{u(Q_1)+u(Q_0)}{4h_x}\beta+\frac{\mu_u(Q_1)+\mu_u(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_1(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_7)=(1-\sigma)\left(-\frac{u(Q_2)+u(Q_0)}{4h_x}\beta+\frac{\mu_u(Q_2)+\mu_u(Q_0)}{2h_x^2}\right)q_2(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_8)=(1-\sigma)\left(-\frac{v(Q_3)+v(Q_0)}{4h_y}\beta+\frac{\mu_v(Q_3)+\mu_v(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_3(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_9)=(1-\sigma)\left(-\frac{v(Q_4)+v(Q_0)}{4h_y}\beta+\frac{\mu_v(Q_4)+\mu_v(Q_0)}{2h_y^2}\right)q_4(Q_0),$$

$$B(Q_0,Q_5)=\frac{q_0(Q_0)}{\tau}\beta-\sum_{m=6}^{9}B(Q_0,Q_m)-(1-\sigma)\alpha.$$

Правые части сеточных уравнений будут иметь следующий вид:

$$F(Q_0)=\sum_{m=0}^{4}B(Q_0,Q_{m+5})u(Q_m)+C_5\frac{N(Q_1)-N(Q_2)}{2h_x}.$$

Уравнения различаются лишь правыми частями, поэтому запишем только правую часть канонической формы:

$$F(Q_0)=\sum_{m=0}^{4}B(Q_0,Q_{m+5})v(Q_m)+C_5\frac{N(Q_3)-N(Q_4)}{2h_y}.$$

На основе данных методов было разработано программное обеспечение на языке C# и проведен численный эксперимент в области правильной формы, представленный на рис. 1. На основе сценарного подхода исследовано изменение концентраций промысловой рыбы пиленгас и мотыля — личинок комара, обитающих в детрите.

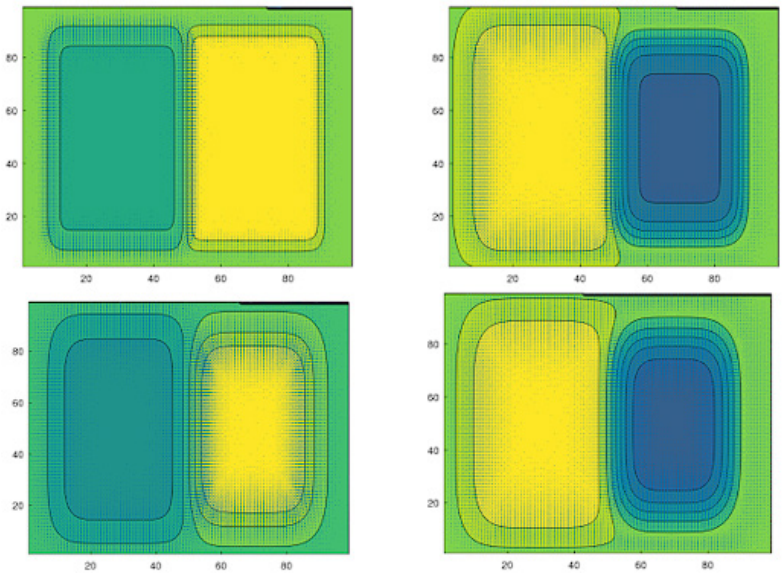


Рис. 1. Результаты численного эксперимента
(временные промежутки сверху вниз: $t=20, t=60, t=90, t=130$)

В дальнейшем планируется осуществить математическое моделирование рассматриваемого ихтиологического процесса динамки рыбы – донного мелиоратора с помощью программного комплекса, реализующего алгоритм решения задачи в расчетной области сложной формы — Ейском лимане, на основе экспедиционных данных и баз геоинформационных систем. Исходя из представленных данных об условиях для репродукции комаров вида *Chironomidae*, идеально подходящие условия можно обнаружить в акватории Ейского лимана на стыке с поймой реки Ея [4].

География Ейского лимана представлена на рис. 2 [5].



Рис. 2. Спутниковый снимок Ейского лимана

Слабые течения и небольшая глубина создают идеальные условия для размножения этого вида, более того, подобные же факторы благоприятны для рыб, которые испытывают негативную тенденцию в динамике количественных показателей и которые используют личинки комаров на ранних этапах роста в качестве пищи.

Заключение

Исследование вопросов сохранения и реабилитации акватории Азовского моря связано с важностью изучения взаимодействия между популяциями рыб-детритофагов и личинок комаров вида Chironomidae. Использование предложенной математической модели ихтиологического процесса мелководного водоема позволяет не только описать динамику изменения численности промысловой рыбы, но и прогнозировать дальнейшие изменения в экосистеме региона. Полученные результаты численных экспериментов подтверждают теоретические предположения о наличии благоприятных условий для размножения комаров в Ейском лимане, что, в свою очередь, создает перспективы для устойчивого роста популяций ценных и промысловых рыб, использующих личинки комара в качестве пищи.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10102, https://rscf.ru/project/22-71-10102/

Литература

1. Электронный ресурс. Показатели промысла в азовском море подтверждают прогнозы ученых ГНЦ РФ ФГБНУ ВНИРО. URL: https://azniirkh.vniro.ru/content/read/azniirkh-news/surveys/25892226-19-09-2024

2. *Беляков В. П.* Влияние солёности на личинок хирономид (diptera, chironomidae) в гиперсолёных водоёмах Крыма / В. П. Беляков, Е. В. Ануфриева, А. И. Бажора, Н. В. Шадрин // Поволжский экологический журнал. – 2017. – (3). – P. 240–250. https://doi.org/10.18500/1684-7318-2017-3-240-250

3. *Сухинов А. И.* Математическое моделирование процессов эвтрофикации в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе / А. И. Сухинов, А. В. Никитина, А. Е. Чистяков, И. С. Семенов, А. А. Семенякина, Д. С. Хачунц // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2016. – Т. 5, № 3. – С. 36–53.

4. *Sukhinov A. I.* The use of supercomputer technologies for predictive modeling of pollutant transport in boundary layers of the atmosphere and water bodies / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, T. V. Lyashchenko, A. A. Filina, V. N. Litvinov // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Т. 1063. – С. 225–241.

5. Электронный ресурс. Карта Ейского лимана. Google Maps. URL: https://www.google.com/maps/@46.7116005,38.471369,22875m/data=!3m1!1e3?entry=ttu&g_ep=EgoyMDI0MTAxNC4wIKXMDSoASAFQAw%3D%3D

УДК 538.91; 519.216

ФАЗОВЫЕ СОСТОЯНИЯ В СИСТЕМАХ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР

А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская, Е. А. Семин

Воронежский государственный аграрный университет имени Императора Петра I

Аннотация. Структуры, моделируемые посредством рандомизированных систем итерированных функций, могут быть представлены в виде фрактальных множеств. Алгоритмы, генерирующие такие структуры, воспроизводят винеровские процессы. После преобразований вычислительной схемы можно перейти к модификации алгоритма, которая соответствует марковским процессам. Структуры, генерируемые этими процессами, рассматриваются как отдельные фазовые состояния. Для различения типов процессов, а, следовательно, и фазовых состояний, предлагается использовать преобразование Лежандра.
Ключевые слова: рандомизированные системы итерированных функций, аттрактор системы, фазовые состояния, винеровский процесс, марковский процесс.

Введение

Равновесное состояние вещества, которое отличается по своим *физическим* свойствам (и условиям формирования) от других состояний этого же вещества, принято называть фазой. Фазовые состояния, соответствующие одному агрегатному состоянию, различаются структурой и физическими свойствами. Так, например, твердому агрегатному состоянию могут соответствовать два фазовых состояния: кристаллическое и аморфное (стеклообразное) [13]. Для моделирования различных фазовых состояний мы предлагаем использовать линейные алгоритмы рандомизированных систем итерированных функций (РСИФ) [1, 4, 10]. В самом общем случае РСИФ представляет собой набор функций $\mathbf{Z}$ с заданным на них вероятностным распределением $\{p_j : j = 1,2,\ldots,K\}$ и сводится к выполнению преобразования

$$X_{n+1} = \xi X_n + (1-\xi)Z_j^{(n)}, \tag{1}$$

где $\mathbf{Z} = \{Z_j, j = 1,2,\ldots,K; n = 1,2,\ldots,N \vdots p_j = P(Z_j \in \mathbf{Z})\}$, $0 < \xi < 1$ — параметр системы. Такой вариант реализации РСИФ, приводящий к построению фрактального множества, будем обозначать F1.

1. Рандомизированные системы как модели случайных процессов

1.1. Винеровские процессы

Уравнение Ланжевена, описывающее винеровский процесс, представляющее математическую модель броуновского движения [3, 8, 11], предлагается рассматривать как предельное представление траектории некоторой частицы, которая движется под действием большого числа столкновений

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\lambda}{m}v(t) + \frac{dF(t)}{dt}. \tag{2}$$

Уравнение (2) можно представить в виде разностной схемы [12]:

$$\frac{(X_{n+1} - X_n) - (X_n - X_{n-1})}{\Delta t^2} = -\frac{\lambda}{m}\frac{(X_n - X_{n-1})}{\Delta t} + \frac{F_n - F_{n-1}}{\Delta t},$$

где Δt — шаг схемы. После очевидных преобразований получим:

$$X_{n+1} = \left(2 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right)X_n + \left(\frac{\lambda}{m}\Delta t - 1\right)X_{n-1} + \left(F_n - F_{n-1}\right)\Delta t. \tag{3}$$

Учитывая, что в этом соотношении сумма коэффициентов при X_n и X_{n-1} равняется единице, т. е. правая часть является выпуклой комбинацией предыдущих значений, а $(F_n - F_{n-1})\Delta t$ представляет «действие» случайной величины за время Δt, удобно считать в дальнейшем это время равным единице. Полученное уравнение представим в следующем виде:

$$X_{n+1} = (1+\theta)X_n + (-\theta)X_{n-1} + (1-\theta)\frac{m}{\lambda}\Delta F_n,$$

где $\theta = \left(1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right) \Rightarrow \Delta t = \frac{m}{\lambda}(1-\theta)$, или

$$X_{n+1} = \xi X_n + (1-\xi)X_{n-1} + \Delta F_n, \qquad (4)$$

где введено обозначение $\xi = \left(1 + 1 - \frac{\lambda}{m}\Delta t\right)$.

Выражение $\frac{\lambda}{m} = 1$ соответствует состоянию равновесия, при котором численные значения параметров λ и m совпадают. В этом случае уравнение (4) принимает вид стандартной схемы РСИФ:

$$X_{n+1} = \xi X_n + (1-\xi)Z_j^{(n)}, \qquad (5)$$

где через $Z_j^{(n)}$ обозначено влияние, или лучше, взаимодействие с внешней средой, которое при данном характере взаимодействия рассматривается как дискретная случайная величина $\mathbf{Z} = \{Z_j, j = 1,2,\ldots,K \vdots p_j = P(Z_j \in \mathbf{Z})\}$. Таким образом, РСИФ может представлять модель броуновского движения [7, 14] при определенных соотношениях определяющих параметров.

1.2. Марковские процессы

Как было показано в [1, 5], существует другой способ построения фрактального множества, который является следствием преобразований схемы F1. Для этого берется ряд $\mu\sum_{i=1}^{\infty}\xi^i = 1$, элементы которого поочерёдно относятся к одному из K классов. Это размещение элементов ряда осуществляется в соответствие с тем же распределением вероятностей $\{Z_i / p_i\}_{i=1}^{K}$ $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$, где μ — нормировочная константа, связанная со значением параметра ξ следующим образом: $\mu = \xi^{-1}(1-\xi)$. Значения, отнесенные в один класс, затем суммируются и записываются в виде кортежа (строки) $A_l = \{a_{l1}, a_{l2}, \ldots, a_{lK}\}$. Очевидно, что получаемые в ходе выполнения процедуры элементы кортежа удовлетворяют условиям: $a_{lj} \geq 0$; $\sum_{j=s}^{K} a_{lj} = 1$. Полученные в результате такой процедуры совокупности строк $\mathbf{A} = \{A_i : i = 1,2,\ldots N\}$ записываются в виде матрицы $\mathbf{A}$ размером $N \times K$. Окончательный результат выполнения процедуры будет представлен в виде матричного произведения $\mathbf{X} = \mathbf{AZ}$, где $\mathbf{X}$ — множество координат точек, $\mathbf{Z}$ — множество точек, представленных матрицей размера $K \times P$; $\mathbf{A}$ — матрица (кортежей) размера $N \times P$. Такой способ построения фрактала будем обозначать F2.

Введём в рассмотрение следующую функцию: $\tau(A_j) = \arg\max_j a_{ij}$. Функция $\tau(A_j)$ численно равняется номеру позиции доминирующего элемента, т. е. элемента удовлетворяющего условию: $a_{im} > \sum_{j \neq m} a_{ij}$. Очевидно, что $1 \leq \tau(A_j) \leq K$. Для пар (A_i, A_j) введём отношение: $A_i \sim A_j$, если $\tau(A_i) = \tau(A_j)$. Такое отношение, будет отношением эквивалентности. Действительно, нетрудно проверить, что выполняются следующие свойства отношения: рефлективность, симметричность и транзитивность [9].

Очевидно, что способ построения фрактального множества F2 хорошо соответствует определению марковского процесса [6].

Заключение

Таким образом, выполнение процедур F1 и F2 приводит к построению фрактальных множеств, топологические свойства которых одинаковы. При этом использование РСИФ позволяет моделировать фрактальные структуры, соответствующие различным случайным процессам: в первом случае винеровскому, а во втором – марковскому. Однако, если в первом случае F1 структура множества **X** представляет собой некоторый путь на древовидной структуре графа, что позволяет соотнести эту структуру с некоторым хорошо организованным (упорядоченным) множеством (типа кристалла), то в случае F2 получается некоторое аморфное множество, соответствующее стекловидным структурам.

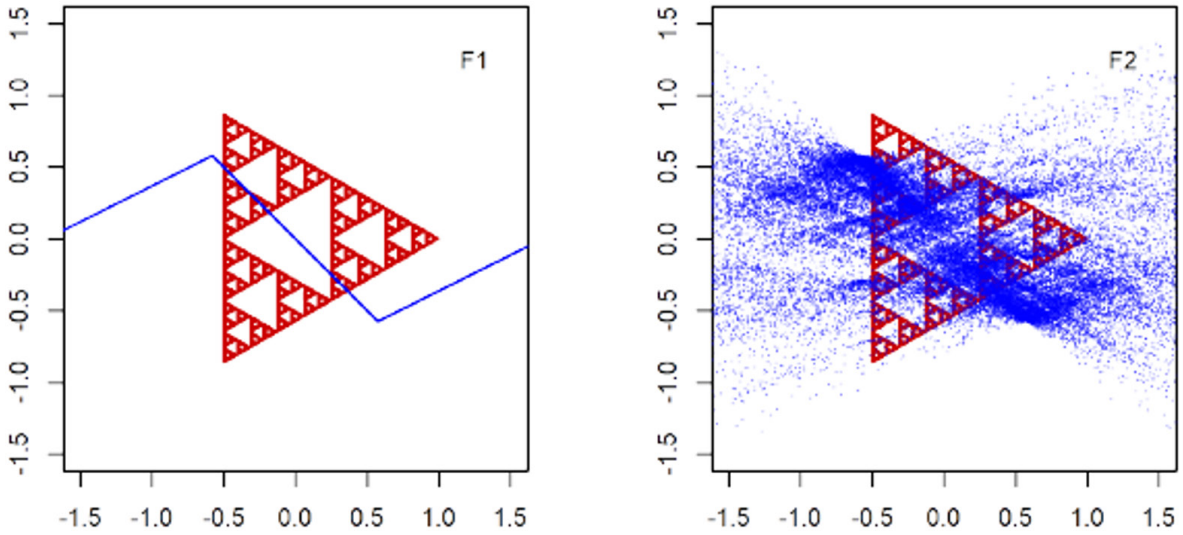


Рис. Результаты применения преобразования Лежандра к фрактальным множества, построенным F1и F2 [2]

Следовательно, можно считать, что эти модели соответствуют различным фазовым состояниям. Эти различия в формировании внутренних структур хорошо видны при построении двойственного фрактала с помощью преобразования Лежандра [2].

Литература

1. *Bukhovets A. G.* Modeling of fractal data structures // A. G. Bukhovets, E. A. Bukhovets // Automation and Remote Control. – 2012. – Vol. 73, No 2. – P. 381–385.

2. *Bukhovets A.* Construction of a dual attractor for linear randomized systems of iterated functions / A. Bukhovets, P. Moskalev, T. Biryuchinskaya // Journal of Physics: Conference Series : Current Problems, Voronezh, 07–09 декабря 2020 года. – Voronezh, 2021. – P. 012056. – DOI 10.1088/1742-6596/1902/1/012056

3. *Арато М.* Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход: пер. с анг. / М. Арато. – М. : Наука, 1989. – 304 с.

4. *Буховец А. Г.* Моделирование фрактальных свойств системных объектов // А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская // Вестник ВГУ, Системный анализ и информационные технологии. – 2011. – № 2. – С. 22–26.

5. *Буховец А. Г.* Структура аттрактора рандомизированных систем итерированных линейных функций / А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская // Вестник ВГУ, Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 2. – С. 5–10.

6. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Высшая школа, 2006. –575 с.

7. *Игнатов А. М.* Броуновское движение плазменного кристалла / А. М. Игнатов // Физика плазмы. – 2017. – Т. 43, № 6. – С. 560–568. – DOI 10.7868/S0367292117060099.

8. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика / Ю. Л. Климонтович. – Москва : Наука, 1982. – 608 с.

9. *Колмогоров А. Н.* Элементы функционального анализа / А. Н Колмогоров, С. В. Фомин. – Москва : Наука, 1972 – 496 с.

10. *Мандельброт Б.* Фракталы, случай и финансы / Б. Мандельброт. – М. – Ижевск, 2004. – 256 с.

11. *Пугачев В. С.* Теория стохастических систем / В. С. Пугачев., И. Н. Синицын. – М. : Логос, 2004, – 643 с.

12. *Самарский А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1977. – 656 с.

13. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. II. – М. : Физматлит, 2017. – 565 с.

14. Фрактальное броуновское движение коллоидных частиц в плазме / К. Г. Косс, И. И. Лисина, М. М. Васильев [и др.] // Физика плазмы. – 2023. – Т. 49, № 1. – С. 33–41. – DOI 10.31857/S0367292122600972.

УДК 004.942

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

А. С. Верховский

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрены методы построения математических моделей электрической RCRCL цепи, представленных в пространстве состояний. Изучены свойства полной управляемости, полной наблюдаемости и устойчивости математических моделей. Построены соответствующие компьютерные модели на языке Scilab. Полученные результаты работы могут быть использованы для анализа работы электрических устройств, включая прогнозирование и расчет электрических параметров при различных условиях эксплуатации.

Ключевые слова: электрическая цепь, математическая модель, компьютерная модель, физическая модель, стандартная наблюдаемая модель, стандартная управляемая модель, каноническая модель, полная управляемость, полная наблюдаемость.

Введение

В современном мире электроника присутствует во всех сферах жизни, в быту и производстве, медицине и военном деле, транспорте и связи и т. д., во многом определяя уровень и перспективы их развития. Электрические цепи являются основой для функционирования многих приборов, от освещения в домах до мобильных устройств. В большинстве случаев цепи состоят из резисторов, конденсаторов и катушек индуктивности, которые создают основу для генераторных схем (настройки выбора узкого частотного диапазона), фильтров (полосового фильтра, полосового ограничителя, фильтра нижних частот или фильтра верхних частот), настройки аналоговых радиостанций, цепей синусоидального тока и систем автоматического управления [1]. Математическое моделирование представляет собой замену исследуемого объекта его математической моделью и последующее ее исследование с помощью различных численных методов. Таким образом, моделирование служит наиболее важным средством познания, проектирования, конструирования и прогнозирования. Математическое моделирование электрических цепей позволяет в ряде случаев избежать трудоемких и дорогостоящих экспериментов.

В данной статье рассмотрены методы построения математических моделей электрической цепи, представленных в пространстве состояний. Основная цель заключается в построении и исследовании математических моделей электрической RCRCL цепи с учетом протекающего тока, а также анализ свойств полученных моделей. В статье будем использовать следующие обозначения: ФМ — физическая модель, СУМ — стандартная управляемая модель, СНМ — стандартная наблюдаемая модель, КМ – каноническая модель.

1. Построение математических моделей

Электрическая цепь — это замкнутые контуры или пути, по которым протекает электрический ток. Цепь состоит из резисторов (R), катушки индуктивности (L) и конденсаторов (C), соединенных параллельно или последовательно. Электрические цепи применяются для фильтрации сигналов, накопления энергии, управления в системах автоматики, в колебательных контурах, а также для сглаживания напряжения [2, 3].

Рассмотрим RCRCL цепь, изображенную на рис. 1.

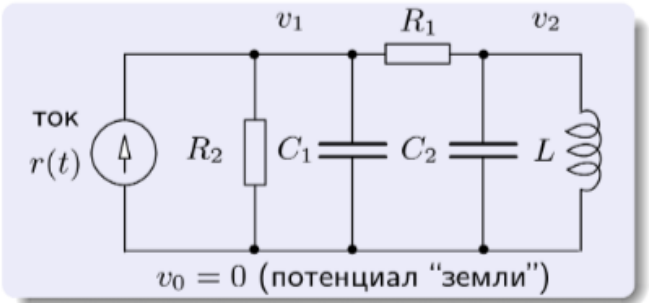


Рис. 1. Электрическая RCRCL цепь [4]

Запишем определяющие уравнения для элементов:

$$R: iR(t) = \frac{1}{R}v(t),\ L: v(t) = L\frac{diL(t)}{dt},\ C: iC(t) = C\frac{dv(t)}{dt}.$$

Начальные условия будем считать нулевыми, потенциал $v_1(t) \triangleq \frac{d\lambda_1(t)}{dt}$, $\lambda_1(t) \triangleq$ потоковая связь 1, потенциал $v_2(t) \triangleq \frac{d\lambda_2(t)}{dt}$, $\lambda_2(t) \triangleq$ потоковая связь 2, вектор состояния $x(t) \triangleq \left[\lambda_1(t), v_1(t), \lambda_2(t), v_2(t)\right]^T$, наблюдается $z(t) \triangleq v_2(t)$. Для построения модели используем второй закон Кирхгофа [5, 6]:

$$\sum_{k=1}^{m} \bigcup_k = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k,$$

где $\bigcup_k$ — падение напряжения на k-м элементе контура, ε_k — ЭДС k-го источника напряжения, а m — общее количество элементов и источников в контуре. Получается следующая система уравнений [7]:

$$\begin{cases} \frac{v_1(t)}{R_2} + C_1\frac{dv_1(t)}{dt} = r(t) \\ \frac{v_2(t)}{R_1} + C_2\frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t v_2(t)dt = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Для построения «физической модели» запишем по уравнениям (1) систему дифференциальных уравнений первого порядка, применяется метод преобразования Лапласа. Матричное представление модели (2) состоит из уравнения состояния и уравнения наблюдения, которые включают матрицу системы (F), матрицу передачи входного воздействия (B) и матрицу наблюдения (H) [8].

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{LC_2} & -\frac{1}{R_1C_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (2)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

Представление системы в пространстве состояний не является единственным. При переходе в другой базис можно получить альтернативное представление системы в пространстве состояний, то есть другие модели системы.

Построим стандартную наблюдаемую модель. Результат будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\dfrac{1}{LC_2C_1R_2} & -\dfrac{C_1R_1R_2+L}{LC_2R_1C_1R_2} & -\dfrac{C_1R_2+C_2R_1}{C_2R_1R_2C_1}\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{C_1}\\ -\dfrac{1}{R_2C_1^2}\\ \dfrac{1}{R_2^2C_1^3}\end{bmatrix}r(t) \qquad (3)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x(t).$$

Для стандартной управляемой модели получим следующее представление:

$$z(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{LC_2C_1} & \dfrac{1}{R_1C_2C_1} & \dfrac{1}{C_1} & 0\end{bmatrix}x(t). \qquad (4)$$

Для канонической модели:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{-L-\sqrt{-4C_2LR_1^2+L^2}}{2LC_2R_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{-L+\sqrt{-4C_2LR_1^2+L^2}}{2LC_2R_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{R_2C_1}\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}r(t) \qquad (5)$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}R_2 & 0 & 0 & -R_2\end{bmatrix}x(t).$$

Для визуализации представления построим блок-схему физической модели, результат изображен на рис. 2:

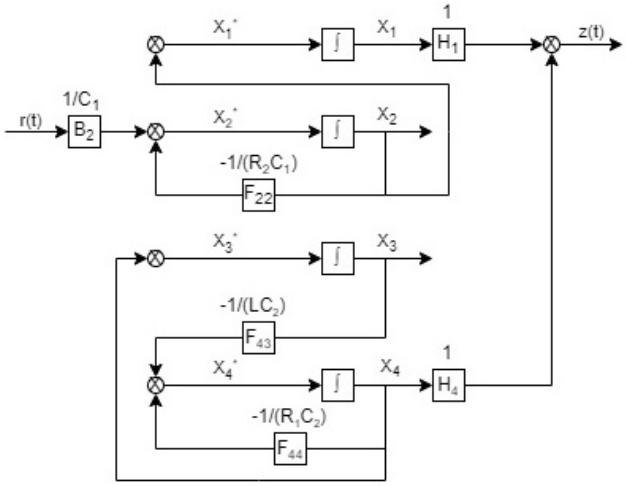


Рис. 2. Блок-схема ФМ

Проведем анализ свойств построенных математических моделей, включая свойства полной управляемости, наблюдаемости и устойчивости.

Матрица управляемости линейной инвариантной и непрерывной во времени динамической системы вычисляется по формуле $W_{CTI}=[B\,|\,FB\,|\,F^2B\,|\,\ldots\,|\,F^{n-1}B]$. Для того, чтобы система была полностью управляемой, необходимо и достаточно, чтобы $rank\ W_{CTI}=n$.

Вычислим матрицу управляемости для физической модели:

$$W_{CTI} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_2 C_1^2} & \frac{1}{R_2^2 C_1^3} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_2 C_1^2} & \frac{1}{R_2^2 C_1^3} & -\frac{1}{R_2^3 C_1^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Для стандартной наблюдаемой модели:

$$W_{CTI} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_2 C_1^2} & \frac{1}{R_2^2 C_1^3} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_2 C_1^2} & \frac{1}{R_2^2 C_1^3} & -\frac{1}{R_2^3 C_1^4} \\ -\frac{1}{R_2 C_1^2} & \frac{1}{R_2^2 C_1^3} & -\frac{1}{R_2^3 C_1^4} & \frac{1}{C_1^5 R_2^4} \\ \frac{1}{R_2^2 C_1^3} & -\frac{1}{R_2^3 C_1^4} & \frac{1}{C_1^5 R_2^4} & -\frac{1}{C_1^6 R_2^5} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для стандартной управляемой модели:

$$W_{CTI} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{C_1 R_2 + C_2 R_1}{C_2 R_1 R_2 C_1} \\ 0 & 1 & -\frac{C_1 R_2 + C_2 R_1}{C_2 R_1 R_2 C_1} & -\frac{C_1^2 C_2 R_1^2 R_2^2 - C_1^2 L R_2^2 - C_1 C_2 L R_1 R_2 - C_2^2 L R_1^2}{C_2^2 R_1^2 R_2^2 C_1^2 L} \\ 1 & -\frac{C_1 R_2 + C_2 R_1}{C_2 R_1 R_2 C_1} & -\frac{C_1^2 C_2 R_1^2 R_2^2 - C_1^2 L R_2^2 - C_1 C_2 L R_1 R_2 - C_2^2 L R_1^2}{C_2^2 R_1^2 R_2^2 C_1^2 L} & \frac{2C_1^3 C_2 R_1^2 R_2^3 + C_1^2 C_2^2 R_1^3 R_2^2 - C_1^3 L R_2^3 - C_1^2 C_2 L R_1 R_2^2 - C_1 C_2^2 L R_1^2 R_2 - C_2^3 L R_1^3}{C_2^3 R_1^3 R_2^3 C_1^3 L} \end{bmatrix}$$

Для канонической модели:

$$W_{CTI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{-L - \sqrt{-L(4C_2R_1^2 - L)}}{2LC_2R_1} & \frac{(L - \sqrt{-L(4C_2R_1^2 - L)})^2}{4L^2C_2^2R_1^2} & \frac{-(L - \sqrt{-L(4C_2R_1^2 - L)})^3}{8L^3C_2^3R_1^3} \\ 1 & \frac{-L + \sqrt{-L(4C_2R_1^2 - L)}}{2LC_2R_1} & \frac{(L + \sqrt{-L(4C_2R_1^2 - L)})^2}{4L^2C_2^2R_1^2} & \frac{-(L + \sqrt{-L(4C_2R_1^2 - L)})^3}{8L^3C_2^3R_1^3} \\ 1 & -\frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{R_2^2 C_1^2} & -\frac{1}{R_2^3 C_1^3} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

В результате проведенного анализа матрицы управляемости ФМ и СНМ имеют ранг 2, а матрицы управляемости СУМ и КМ имеют ранг 4. Из этого следует, что СУМ и КМ являются полностью управляемыми.

Матрица наблюдаемости линейной инвариантной и непрерывной во времени динамической системы может быть вычислена как $M_{CTI} = [H^T \mid F^T H^T \mid (F^2)^T H^T \mid \ldots \mid (F^{n-1})^T H^T]^T$.

Для построенной физической модели:

$$M_{CTI}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{LC_2} & -\dfrac{1}{R_1C_2} \\ 0 & -\dfrac{1}{R_1C_1} & \dfrac{1}{R_1C_2^2L} & -\dfrac{C_2R_1^2-L}{LC_2^2R_1^2} \\ 0 & \dfrac{1}{R_2^2C_1^2} & \dfrac{C_2R_1^2-L}{L^2C_2^3R_1^2} & \dfrac{2C_2R_1^2-L}{LC_2^3R_1^3} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Для стандартной наблюдаемой модели будет единичная матрица размером 4 на 4.

Для стандартной управляемой модели:

$$M_{CTI}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{LC_2C_1} & \dfrac{1}{R_1C_2C_1} & \dfrac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{LC_2C_1} & \dfrac{1}{R_1C_2C_1} & \dfrac{1}{C_1} \\ 0 & -\dfrac{1}{C_1^2LC_2R_2} & -\dfrac{1}{C_1^2C_2R_1R_2} & -\dfrac{1}{R_2C_1^2} \\ 0 & \dfrac{1}{C_2C_1^3R_2^2L} & \dfrac{1}{C_2R_1C_1^3R_2^2} & \dfrac{1}{R_2^2C_1^3} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Для канонической модели:

$$M_{CTI}=\begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 & -R_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{R_2C_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{R_2^2C_1^3} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

В результате проведенного анализа матрицы наблюдаемости КМ и СУМ имеют ранг 2, а матрицы наблюдаемости СНМ и ФМ имеют ранг 4. Из этого следует, что модели СНМ и ФМ полностью наблюдаемые.

Для проверки устойчивости необходимо проанализировать корни характеристического уравнения. Если коэффициенты C, R и L положительные, то корни этого уравнения будут иметь отрицательную вещественную часть, и система будет устойчивой. Характеристическое уравнение исследуемой системы имеет вид:

$$C_1C_2LR_1s\left(s+\frac{1}{R_2C_1}\right)(C_2LR_1s^2+Ls+R_1)=0. \quad (12)$$

Необходимо проверить, что $R_2C_1>0$ и, $L<2\sqrt{C_2R_1^2}$. Если оба условия выполняются, то система устойчива. Коэффициент затухания α можно определить как величину, обратную времени, за которое амплитуда уменьшается в n раз: $\alpha=R_1/2L$. Резонансная частота ω_0 — это частота собственных колебаний контура, при которой амплитуда колебаний максимальна [9]: $\omega_0=\sqrt{\dfrac{1}{LC_2}}$.

2. Построение компьютерных моделей

Для построения компьютерных моделей будем использовать математические модели, построенные в первом разделе. Все компьютерные модели реализованы на языке Scilab [10]. На рис. 3–5 представлены результаты вычислительных экспериментов в зависимости от параметров ω_0 и α. Если $\omega_0 > \alpha$, происходит колебательный процесс. Значения параметров электрической цепи: $R_1 = 4$ Ом и $R_2 = 1$ Ом, индуктивность $L = 0.1$ Гн и емкость $C_1 = 1$ Ф, $C_2 = 4$ Ф.

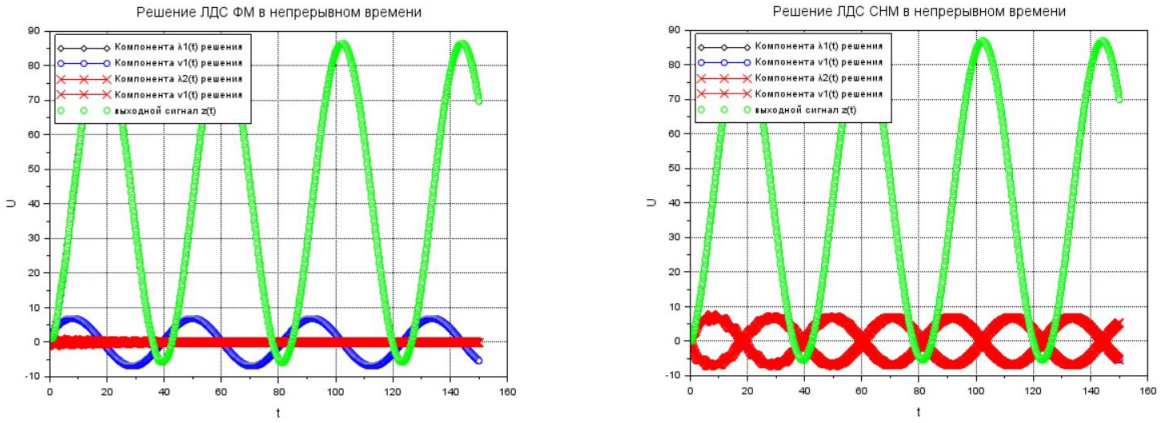


Рис. 3. График ФМ и СНМ для колебательного процесса

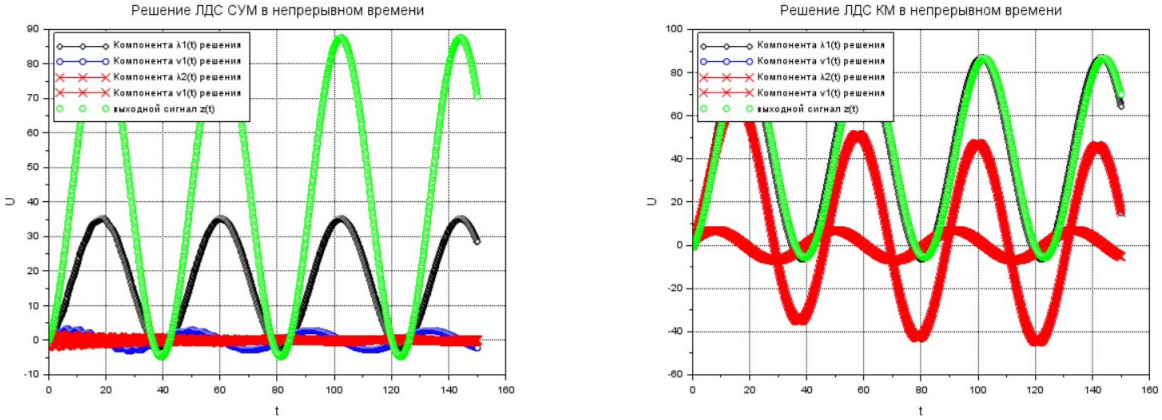


Рис. 4. График СУМ и КМ для колебательного процесса

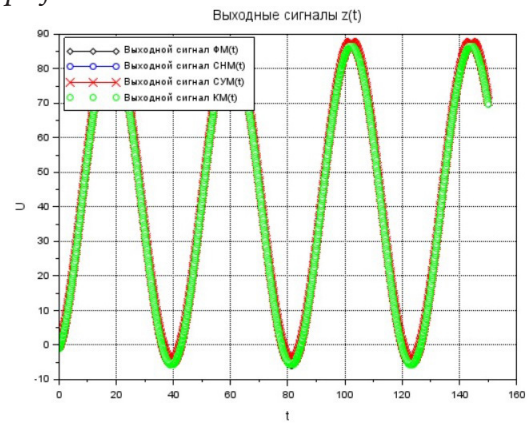


Рис. 5. График выходных сигналов колебательного процесса

При $\omega_0 < \alpha$ происходит апериодический процесс. Результаты вычислительных экспериментов изображены на рис. 6–8: Значения параметров электрической цепи: $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 3$ Ом, индуктивность $L = 1$ Гн и емкость $C_1 = 7$ Ф, $C_2 = 4$ Ф.

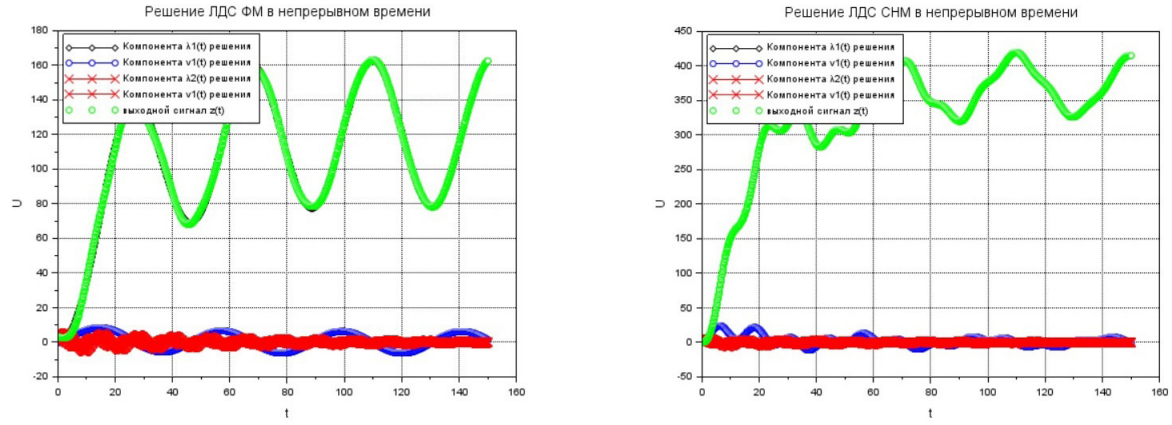


Рис. 6. График ФМ и СНМ для апериодического процесса

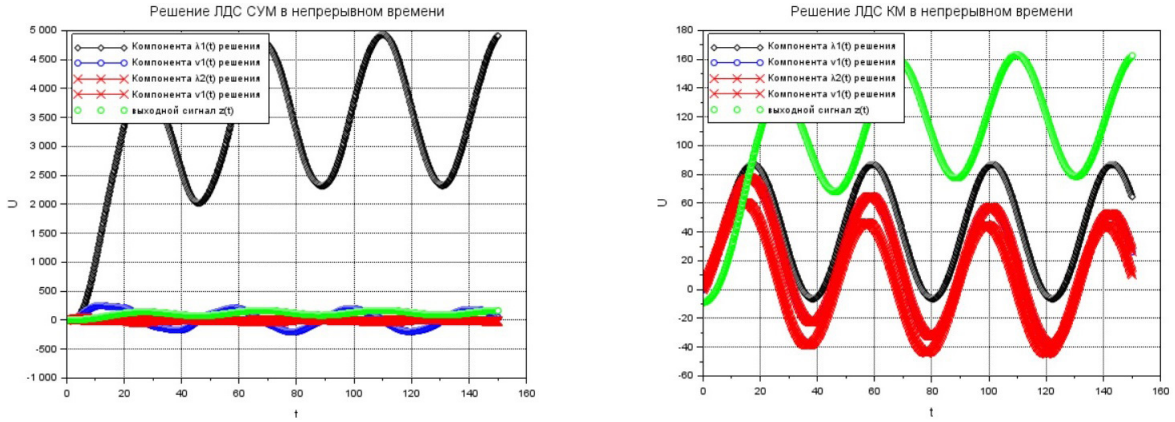


Рис. 7. График СУМ и КМ для апериодического процесса

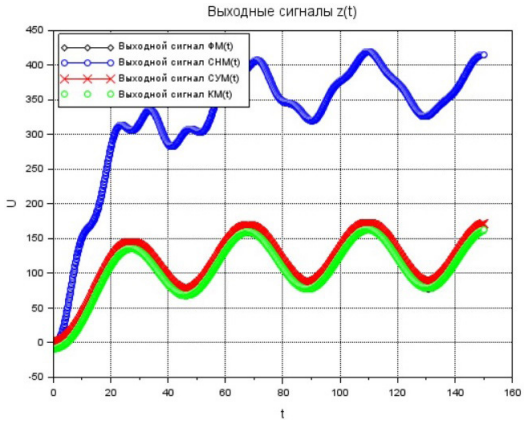


Рис. 8. График выходных сигналов апериодического процесса

По рис. 8 видно, что в данном случае выходной сигнал стандартной наблюдаемой модели отличается от остальных, следовательно, ее нельзя рассматривать как аналог физической модели.

В случае $\omega_0 = \alpha$, происходит критический режим. Критический режим — это состояние системы, которое возникает вблизи критической точки, на фазовой диаграмме, где две или более фаз системы становятся неотличимыми и происходит фазовый переход. В данном случае параметры элементов цепи, следующие: сопротивление $R_1 = 1$ Ом и $R_2 = 1$ Ом, индуктивность $L = 1$ Гн и емкость $C_1 = 1$ Ф, $C_2 = 4$ Ф. Результаты экспериментов представлены на рис. 9–11.

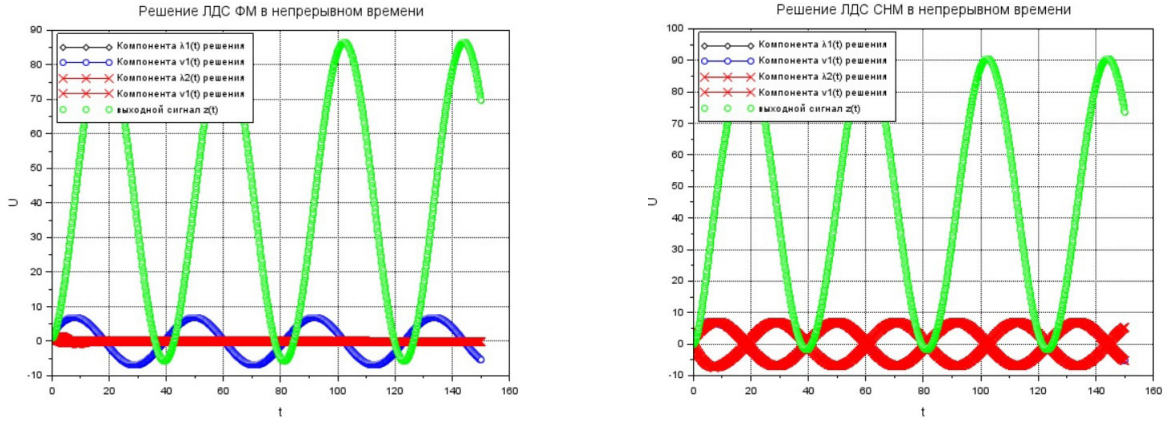


Рис. 9. График ФМ и СНМ при критическом режиме

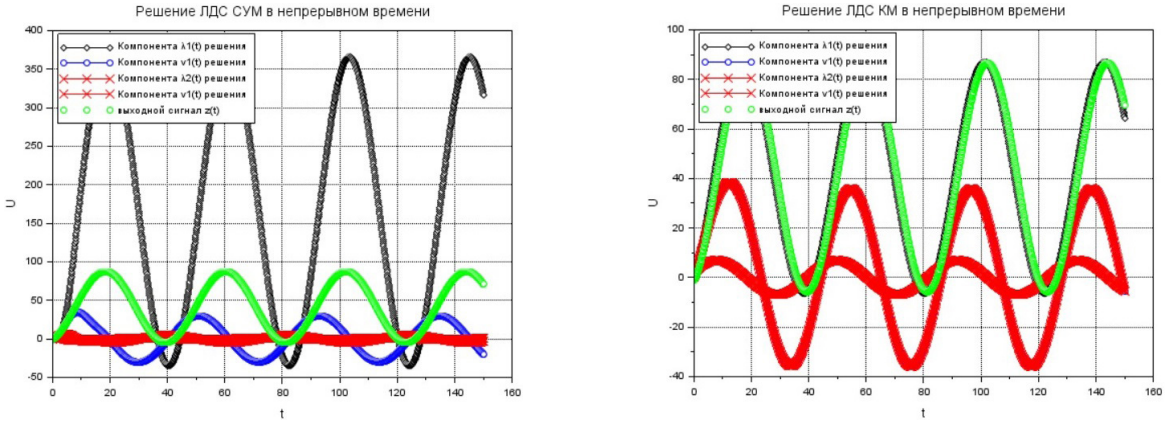


Рис. 10. График СУМ и КМ при критическом режиме

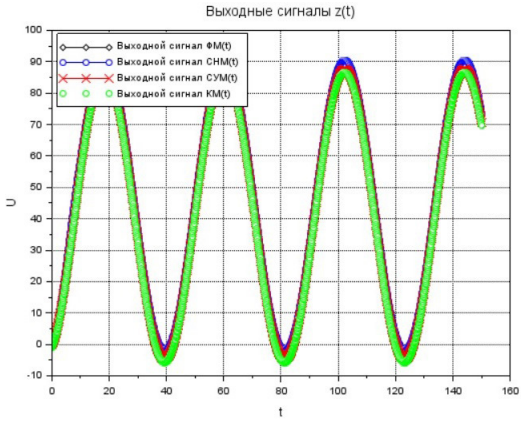


Рис. 11. График выходных сигналов при критическом режиме

Заключение

В рамках данной статьи были рассмотрены методы построения математических моделей электрической RCRCL цепи в пространстве состояний. Построенные математические модели позволяют анализировать и прогнозировать поведение тока в цепи при различных параметрах и условиях. Каждая модель имеет свои преимущества и недостатки, которые можно оценить как при теоретическом исследовании свойств математической модели, так и при практическом исследовании соответствующей компьютерной модели по результатам вычислительных экспериментов. Разработанные компьютерные модели позволяют изучить переходные процессы, затухание, резонанс и другие особенности контура цепи.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на усовершенствование модели с учетом нелинейных элементов, а также на разработку алгоритмов оптимизации параметров цепи.

Литература

1. *Дорф Р.* Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – Москва : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.

2. *Батура М. П.* Теория электрических цепей / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулёв ; Минск : Вышэйшая школа, 2015. – 607 с.

3. *Семушин И. В.* Адаптивные системы фильтрации, управления и обнаружения: монография / И. В. Семушин – Ульяновск : УлГУ, 2011. – 298 с.

4. *Семушин И. В.* Математическое моделирование систем и процессов. Часть 1: Детерминистские модели динамических систем: электронное учебное пособие / И. В. Семушин – Ульяновск : УлГУ, 2020. – 273 с.

5. Электросхемотехника для студентов, радиолюбителей, инженеров. Теория: Законы Кирхгофа. – URL: https://www.sxemotehnika.ru/zhurnal/zakony-kirkhgofa.html (дата обращения: 23.05.2023).

6. *Осадченко В. Х.* Резонансные свойства RLC-цепей: учебно-методическое пособие / В. Х. Осадченко, Я. Ю. Волкова, Ю. А. Кандрин ; Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2013. – 64 с.

7. *Коробейноков А. Г.* Применение Maple для моделирования динамического состояния RLC-цепи при импульсном воздействии на термистор / А. Г. Коробейноков // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2020. – № 3-1, – С. 227–232.

8. *Санкин Н. Ю.* Математическое моделирование электрической цепи / Н. Ю. Санкин // Ученые записки УлГУ. Серия Математика и информационные технологии. – 2018. – № 1. – С. 83–89.

9. Открытый Колледж. Физика. Электромагнитные колебания и волны. – URL: https://physics.ru/courses/op25part2/content/chapter2/section/paragraph2/theory.html (дата обращения: 25.05.2023).

10. Scilab Help. – URL: https://help.scilab.org/index (дата обращения: 27.03.2024).

УДК 519.852.35

УЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧЕ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Ю. Е. Гагарин[1], У. В. Никитенко[1], С. Н. Гагарина[2]

[1]Калужский филиал Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана
[2]Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

Аннотация. Рассмотрена необходимость учета погрешности исходной информации при использовании алгоритмов оптимизации транспортных сетей. В задаче о максимальном потоке необходимо учитывать погрешности величины потока и пропускной способности сети. Для оценивания параметров математической модели предлагается использовать методы конфлюэнтного анализа. Кроме точечных оценок параметров функциональных зависимостей необходимо учитывать интервальные оценки параметров.
Ключевые слова: оптимизация, транспортная сеть, измерения с ошибками, интервальные оценки.

Введение

Для описания различных территориально распределённых систем — транспортных, информационных, энергетических, как правило используется взвешенный граф. Рёбра и вершины графа соответствуют пропускным способностям и потребностям таких структур. В задачах на взвешенных графах оцениваются значения функционалов при фиксированных весах вершин, и находится решение между истоками и стоками графа при достижении экстремума функционала [1]. Подобные задачи формулируются в терминах линейного программирования, которые являются наиболее эффективными и известными методами решения моделей исследования операций и широко применяются в различных областях. Кроме того, использование методов линейного программирования подкрепляется высокоэффективными компьютерными алгоритмами.

Условия, в которых определяется оптимальное решение задачи линейного программирования, находят отражение в момент формирования модели, но в действительности такие условия не остаются неизменными. Поэтому представляется важным оценивание изменений в оптимальном решении, вызванные изменениями в параметрах исходной модели: коэффициентах целевой функции, элементах матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, и правой части условий-ограничений.

1. Учет погрешности исходной информации в алгоритмах оптимизации транспортных сетей

Рассмотрим транспортную модель, в которой неопределённость параметров задачи связана с количеством транспорта, перемещающимся из одного пункта в другой пункт, или пропускной способностью между узлами транспортной сети [2].

В задаче о максимальном потоке [3] каждая дуга сети характеризуется некоторой пропускной способностью. Пусть узел s — источник, узел t — сток, v — внешний поток, входящий в сеть в узле s и выходящий из сети в узле t. Задачу о максимальном потоке можно записать как задачу линейного программирования: найти максимум v при ограничениях

$$\sum_{k\in M_{Oi}} f_k - \sum_{k\in M_{Ti}} f_k = 0,\ i \in N - (s,t);$$

$$\sum_{k\in M_{Oi}} f_k - \sum_{k\in M_{Ti}} f_k - v = 0;$$

$$\sum_{k\in M_{Oi}} f_k - \sum_{k\in M_{Ti}} f_k + v = 0;$$

$$0 \le v \le v_r;$$

$$0 \le f_k \le c_k,\ k \in M,$$

где N — множество узлов; M — список дуг; O_i и T_i — набор начальных и конечных узлов; f_k — поток по дуге k; c_k — пропускная способность дуги k, определяет верхнюю границу потока по дуге.

В стандартной постановке задачи о максимальном потоке поток сохраняет свою величину при прохождении по дугам сети. Если f_k является потоком в начале дуги k, а f_k' — поток в её конце, то $f_k' = f_k$.

В алгоритмах оптимизации транспортных сетей неопределённость исходной информации может быть отражена:

1) в неопределённости или погрешности величины потока f_k;

2) в неопределённости или погрешности пропускной способности c_k дуги.

Величина потока и пропускная способность не будут определяться однозначно, а будут иметь некоторую погрешность: $f_k \pm \Delta f_k$ и $c_k \pm \Delta c_k$, Учёт погрешности Δf_k может привести к тому, что величина потока по дуге сети уменьшится практически до нуля или даже станет отрицательной величиной, т.е. поток поменяет своё направление. При учёте погрешности Δc_k пропускная способность может также снизиться до нуля. Таким образом, учёт неопределённости исходной информации приводит к изменению условий ограничений и в результате изменится оптимальное решение задачи.

Для оценивания погрешностей Δf_k и Δc_k существует ряд статистических подходов, которые основаны на разных моделях «измерения с ошибками».

Методы конфлюэнтного анализа [4] дают возможность оценить параметры функций любого вида с учётом погрешностей исходных данных.

Модель оценивания параметров с учетом погрешностей исходных данных имеет вид:

$$\begin{cases} y_i = \eta_i\left(x_i, \overline{\theta}\right) + \varepsilon_i \\ x_i = \xi_i + \delta_i \end{cases} \qquad i = \overline{1, n},$$

где (x_i, y_i) — наблюдаемые значения, $(\xi_i,\ \eta_i)$ — точные значения, $(\delta_i,\ \varepsilon_i)$ — ошибки измеренных значений.

Оценки параметров $\overline{\theta}$ находятся из условия минимума функционала:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\left(y_i - \eta_i\right)^2}{\sigma^2\left(y_i\right)} + \frac{\left(x_i - \xi_i\right)^2}{\sigma^2\left(x_i\right)}\right].$$

Сложность определения оценок параметров заключается в том, что неизвестны истинные значения ξ_i, а известны лишь их доверительные интервалы. Поэтому перед тем, как определять оценки параметров $\overline{\theta}$, необходимо оценить значения ξ_i.

Истинные значения ξ_i будут определяться из условия:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\right|_{\xi_i = \widehat{\xi}_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для линейных функциональных зависимостей $\eta_i(x_i, \overline{\theta})$ учёт погрешностей исходных данных, при моделировании транспортных сетей, сложностей не вызывает. Для нелинейных функциональных зависимостей возникает проблема вычислительного характера, поскольку для получения оценок параметров в этом случае необходимо применять итерационные процедуры.

Заключение

Учет погрешности исходной информации в задачах анализа транспортных сетей позволяет получить корректную математическую модель и найти оптимальное решение задачи. Кроме того, в задачах оптимизации транспортных сетей с учётом неопределённости исходной информации необходимо определять интервальные оценки параметров функциональных зависимостей [5] и интервальные оценки функциональных зависимостей, что повышает достоверность принимаемых решений.

Литература

1. *Йенсен П.* Потоковое программирование / П. Йенсен, Д.Барнес. – М. : Радио и связь, 1984. – 392 с.

2. Использование метода анализа сети для оптимизации городских транспортных систем с учетом неопределенности информации / Ю. Е. Гагарин, У. В. Никитенко, С. Н. Гагарина, П. Е. Белоножко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04–06 декабря 2023 года. – Воронеж: Общество с ограниченной ответственностью «Вэлборн», Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 1527–1530.

3. *Гагарин Ю. Е.* Оптимизация максимального потока методом анализа сети / Ю. Е. Гагарин, У. В. Никитенко, П. Е. Белоножко // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2022. – № 3-2(66). – С. 134–136.

4. *Гагарин Ю. Е.* Прогнозирование показателей деятельности предприятий с учетом неопределенности исходных данных / Ю. Е. Гагарин, С. Н. Гагарина // Вестник университета. – 2019. – № 1. – С. 94–99.

5. *Гагарин Ю. Е.* Интервальное оценивание объемов потребления ресурсов при стохастических исходных данных / Ю. Е. Гагарин, С. Н. Гагарина // Вестник университета. – 2018. – № 12. – С. 64–70.

УДК 004.94:69.04

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗДАНИЯ С КОМБИНИРОВАННЫМ ВАНТОВЫМ ПОКРЫТИЕМ ПРИ РАСЧЕТЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ К ПРОГРЕССИРУЮЩЕМУ ОБРУШЕНИЮ

Д. С. Глазков, С. Д. Гребенкин, В. А. Козлов

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Основная цель исследования заключалась в разработке и верификации численной модели здания, учитывающей стадийность монтажа, физическую и геометрическую нелинейность, ползучесть бетона и перераспределение усилий. Для выполнения расчетов использовался метод конечных элементов, что позволило оценить устойчивость конструкции как статическим, так и динамическим методами. По итогам расчетов сделаны выводы о преимуществах использования предложенной связки программ при поэтапном создании модели здания Воронежского цирка для расчета на устойчивость к прогрессирующему обрушению. Также проанализированы результаты вычислений и вынесены оценочные суждения по моделированию ситуации локальных отказов и по методикам расчета на устойчивость к прогрессирующему обрушению.
Ключевые слова: метод конечных элементов, методы расчета, устойчивость здания к прогрессирующему обрушению.

Введение

В современных строительных проектах особое внимание уделяется устойчивости зданий и сооружений к прогрессирующему обрушению, вызванному локальными отказами конструктивных элементов. Этот аспект является ключевым для обеспечения безопасности объектов с уникальными архитектурными решениями, особенно тех, которые используют висячие и комбинированные оболочки. Исследование данного направления требует применения передовых методов численного моделирования и учета сложных эффектов, связанных с физической и геометрической нелинейностью [3–7].

Настоящая работа посвящена анализу устойчивости здания Воронежского цирка, построенного по типовому проекту 1960–1970-х годов, к прогрессирующему обрушению. Уникальная конструкция цирка включает предварительно напряженную железобетонную оболочку в виде гиперболического параболоида с несущими вантовыми элементами и сборными плитами покрытия. Такой тип конструкции характеризуется высокой чувствительностью к локальным отказам из-за взаимосвязанной работы элементов.

Особое внимание уделено сравнительному анализу различных подходов к моделированию отказов элементов, включая локальные разрушения колонн и вант, а также изучению их влияния на напряженно-деформированное состояние здания. Полученные результаты позволили сделать выводы о преимуществах применения динамического метода в расчете висячих систем и предложить рекомендации по дальнейшему совершенствованию проектных методик.

1. Применяемые подходы и методы

На начальном этапе компьютерного моделирования происходит разработка геометрии здания и его основных конструктивных элементов в Rhinoceros-3D [1–2].

Далее происходит комплексная доработка модели и ее аналитического представления в КЭ-комплексе ЛИРА-САПР, включая учет физической и геометрической нелинейности, стадийности монтажа оболочки и прочего.

Для приближенного учета физической нелинейности процесса для бетона был выбран экспоненциальный закон деформирования, для арматуры — диаграмма Прандтля. Поэтапный отпуск оттяжек (3–4 этапа) и неполный набор прочности монолитного бетона может быть учтен двумя способами: введением учета ползучести бетона на этапе отпуска оттяжек или использованием секущего модуля упругости, основываясь на законе деформирования. Как показал численный эксперимент, перераспределение напряжений и деформации для этих двух случаев нагружения оказались примерно равными. К дальнейшему расчету был принят способ с введением в качестве начального секущего модуля упругости — в соответствии с этапами отпуска оттяжек.

Стадийность монтажа покрытия моделировалась с целью учета факторов поэтапного отпуска оттяжек и набора бетоном неполной проектной прочности на первых стадиях возведения оболочки, а также для получения приближенного НДС перед стадией приложения эксплуатационных нагрузок, а также перед стадиями исключения потерявших несущую способность элементов при локальном отказе.

1 стадия. Смонтированы все элементы, кроме оболочки и балок омоноличивания. На ванты действует представленная в виде линейно-распределенной нагрузка от оболочки. Происходит преднапряжение вантовых элементов до расчетного уровня преднапряжения с учетом потерь 5 %. Оттяжки смонтированы и представлены в виде односторонних упругих связей.

2 стадия. Обнуление перемещений предыдущей стадии. Приложение собственных весов смонтированных элементов.

3 стадия. Монтаж оболочки здания. В дальнейшем происходит отпуск оттяжек и обжатие оболочки.

4 стадия. Система на данном этапе ведет себя в достаточной степени линейно. Вес оболочки убирается с канатов и прикладывается как объемный к элементам оболочки.

Последующие стадии. Последовательное приложение всех эксплуатационных нагрузок.

Стадии с *1* по *4* назовем первым инициирующим этапом монтажа оболочки, впоследствии все операции работы над расчетной схемой и ее исследование будут проводиться после названного этапа.

На следующем этапе происходит расчет здания цирка на устойчивость к прогрессирующему обрушению. Используются статический, рекомендуемый СП 385.1325800.2018 [9], и динамический методы [7].

В настоящей работе анализировался отказ следующих элементов: 1)наиболее нагруженной колонны; 2) внешней и внутренней колонны с самым невыгодным положением в пространстве; 3) элемента, конструкции, раскрепляющего несущий элемент; 4) участка опорного кольца покрытия в месте анкеровки ванты; 5) одного из канатов ванта.

В разделе результаты и обсуждения приводятся данные для наиболее характерного элемента каркаса — внутренней колонны с наибольшей грузовой площадью, и для элемента покрытия — одного из канатов.

2. Анализ работы расчетной модели здания

Усилие преднапряжения напрягающих (стягивающих) вант [10]: 168 т (на 2 спаренных каната). Уравнение гиперболического параболоида имеет вид: $z = f_x \frac{x^2}{a^2} - f_y \frac{y^2}{b^2}$, где f_x, f_y — стрелы провиса вант, параллельных осям x и y гиперболического параболоида; x, y, z — декартовы координаты; a и b — полуоси контурного эллипса. Форма исследуемой оболочки описывается уравнением [10]: $z = 15,5 + \frac{1}{200} \cdot x^2 - \frac{1}{800} \cdot y^2$.

Отношение погонного распора рабочих вант к погонному распору стягивающих — 1,17 [10]. Это отношение возникло при рассмотрении опорного контура в виде эллипса, так как опорный контур депланирован и расположен в разных уровнях. В плане же опорный контур имеет форму круга. Оценим с точки зрения СП 387.1325800.2018 [8] расчетную нагрузку на покрытие данной формы по ф. 13.28:

H_x (погонный распор рабочих вант) $= \dfrac{(q+p)\cdot a^2}{2\cdot f_x}$;

H_y (погонный распор стягивающих вант) $= \dfrac{p\cdot b^2}{2\cdot f_y}$);

Также $H_y = \dfrac{168\,\text{т}}{2{,}4\,\text{м}} = 70\dfrac{\text{т}}{\text{м}}$ (2,4 м — расстояние между вантами).

При рассмотрении опорного контура в виде круга: $\dfrac{H_x}{H_y} = 1;$ после уточнения и рассмотрения его в виде эллипса: $\dfrac{H_x}{H_y} = 1{,}17.$

Отсюда:

$$p = \frac{H_y \cdot 2 \cdot f_y}{b^2} = \frac{70\cdot 2}{800} = 0{,}175\frac{\text{т}}{\text{м}^2};$$

$$q = \left(1{,}17\cdot\frac{b^2}{f_y}\cdot\frac{f_x}{a^2} - 1\right)\cdot p = (1{,}17\cdot 800\cdot\frac{1}{200} - 1)\cdot 0{,}175 = 0{,}644\frac{\text{т}}{\text{м}^2}.$$

Оценим составленную расчетную модель на проектные расчетные значения нагрузок. Учитываем потерю преднапряжения 5 %. Назначим две стадии нелинейного расчета: 1 — натяжение вантовой сети с собственным весом покрытия (оценка деформаций); 2 — приложение расчетной нагрузки со значением 644 *кгс/м*^{2} (оценка прочности) при отношении распоров 1,17.

1 стадия. Результаты расчета на собственный вес.

На рис. 1 представлены вертикальные перемещения оболочки. Перемещения по оси z (86,2 мм) согласуются с результатами, изложенными в пояснительной записке (86 мм) [10]. На рис. 2 показаны величины нормальных напряжений N_y (аналогично получено распределение нормальных напряжений N_x и касательных τ_{xy}, *МПа*). Как видно из рис. 2, нормальные напряжения по N_y — сжимающие (напряжения N_x также сжимающие), следовательно оболочка обжата по 2 направлениям.

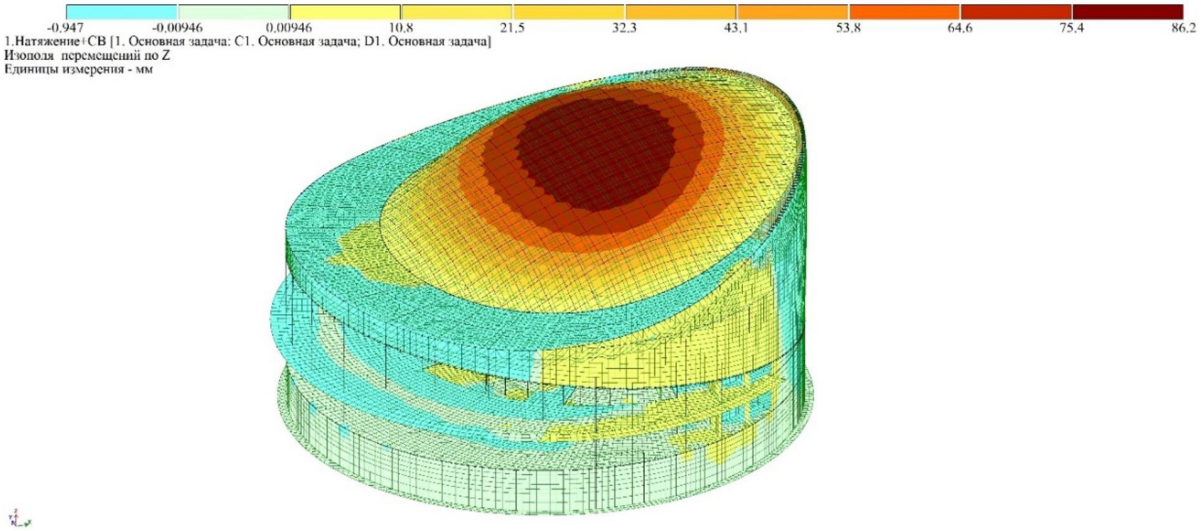


Рис. 1. Перемещения оболочки по оси z (вертикальные)

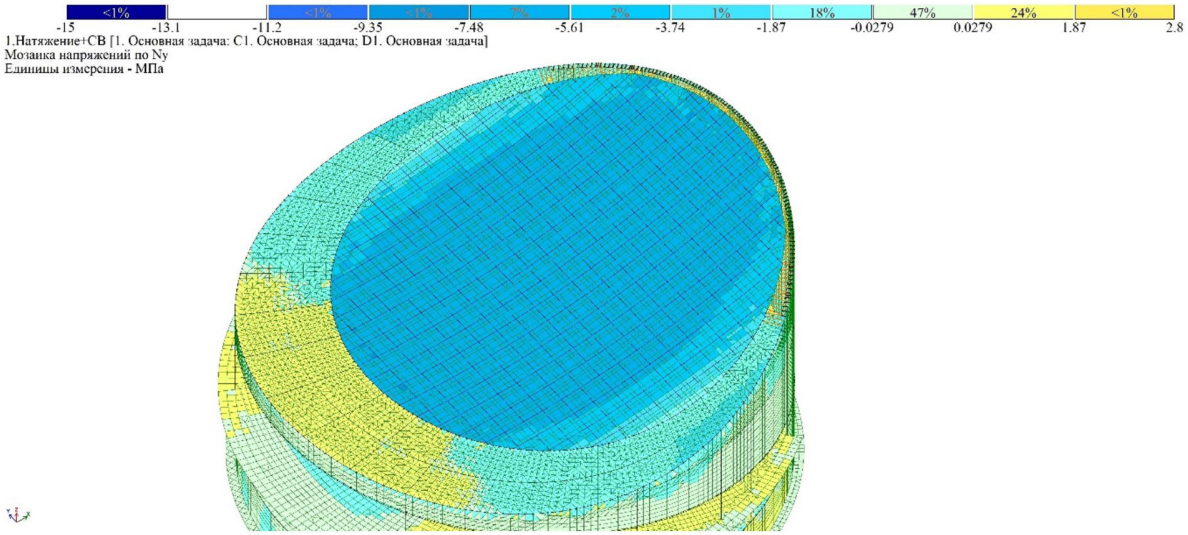


Рис. 2. Напряжения N_y (МПа)

2 стадия. Приложение расчетной нагрузки со значением 644 *кгс/м*^{2}.

На рис. 3–4 показаны величины нормальных напряжений N_x и N_y соответственно, которые остаются сжимающими, следовательно обжатие сохраняется по 2 направлениям (аналогично получено распределение касательных τ_{xy}, *МПа*).

Прочность оболочки (рис. 5) на действие расчетной нагрузки при учете формы опорного контура в виде эллипса с заданным преднапряжением (при учете потери преднапряжения 5 %) обеспечена с запасом 8 %. Прочность расчетной модели покрытия на действие проектных нагрузок, полученных по методикам СП для данной формы покрытия и преднатяжения, обеспечена. Рассмотрение эллиптической формы опорного контура по аналитическим формулам согласуется с работой расчетной модели.

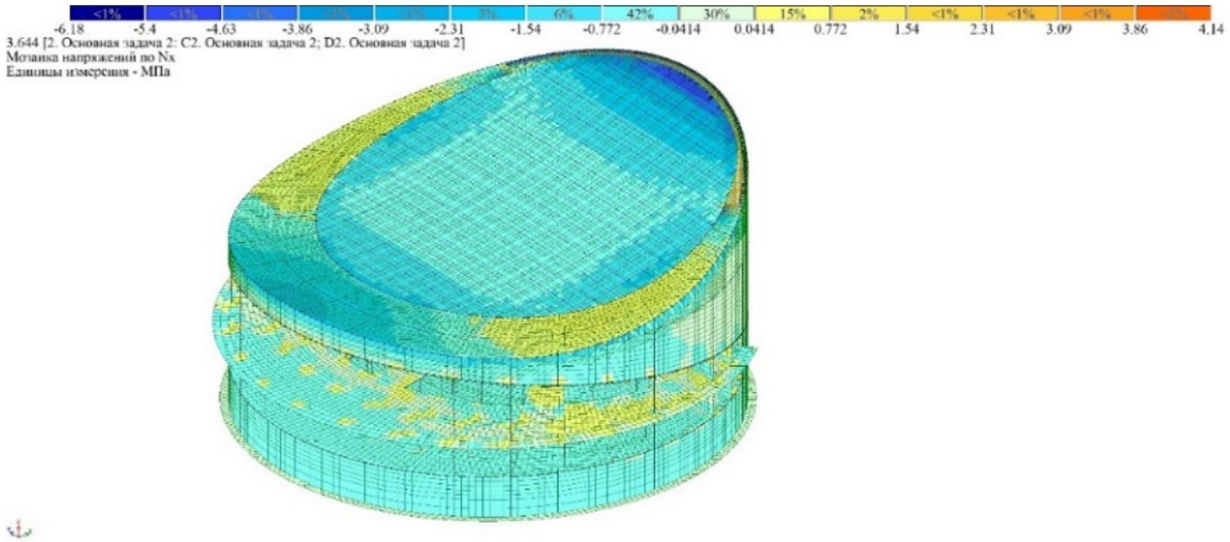


Рис. 3. Напряжения N_x (МПа)

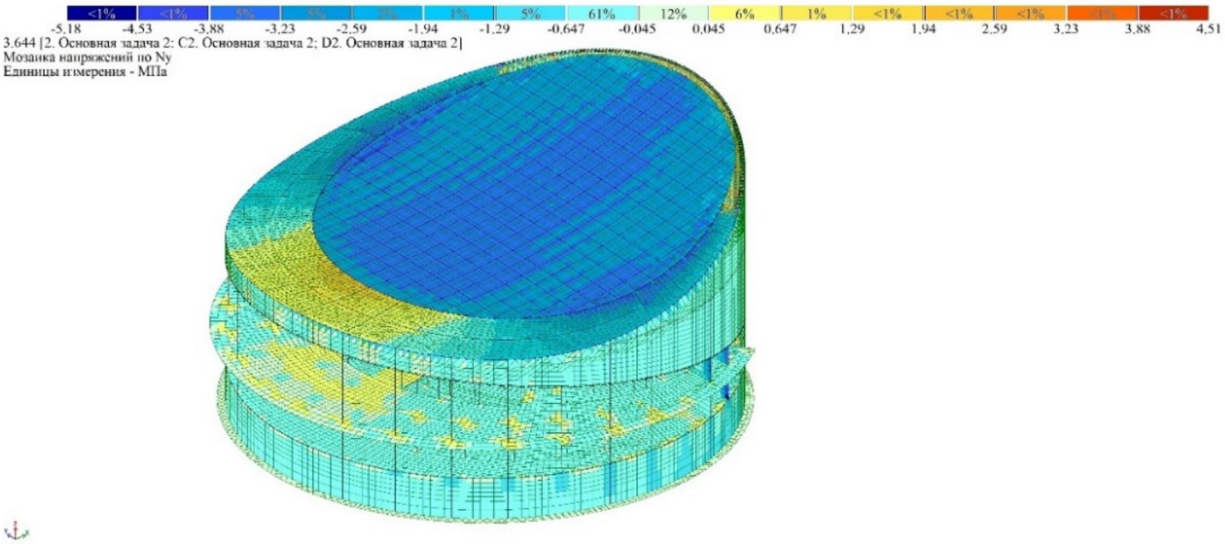


Рис. 4. Напряжения N_y (МПа)

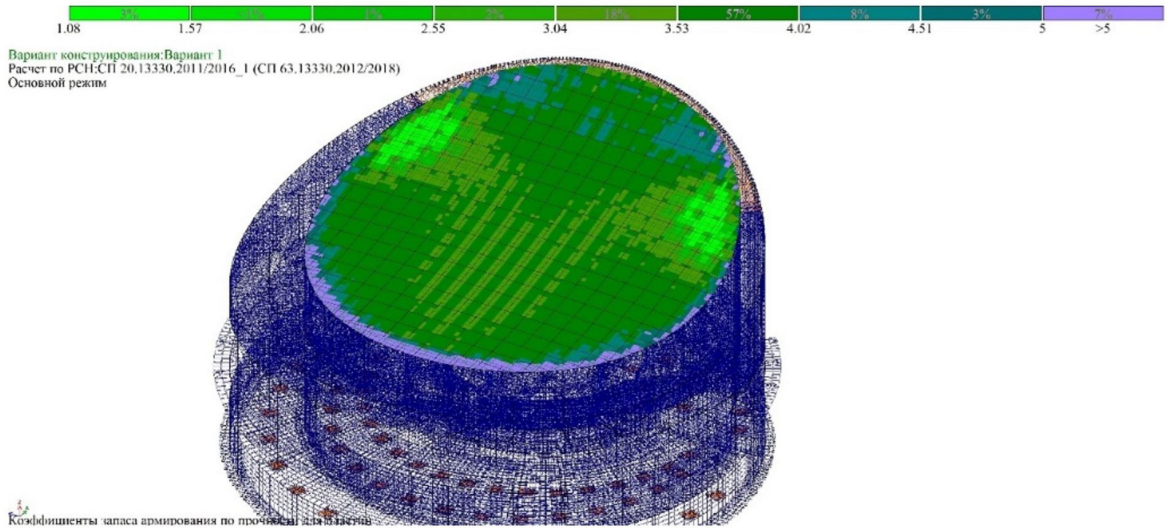


Рис. 5. Проверка прочности оболочки от 2 стадии нагружения

3. Анализ ситуаций локального обрушения

В случае статического метода элемент, несущая способность которого предполагается исчерпанной, статически удалялся из расчетной схемы в последней стадии монтажа, после того как постадийно были приложены все нагрузки и система имела соответствующее НДС.

В случае динамического метода проводился динамический расчет конструкции с удаленным элементом в нелинейной постановке методами прямого интегрирования уравнений динамики во времени в явной постановке с заданными параметрами демпфирования по Рэлею.

1) Рассмотрим внутреннюю колонну с самой большой грузовой площадью.

На основании моделирования монтажных стадий получаем усилия в удаляемой колонне каркаса перед исключением ее из расчетной схемы на последней стадии. Максимальное продольное усилие в колонне от предыстории (одинаковая последовательность нагрузок для динамического и статического удаления сечения элемента) составляет $N_{max} = -1392,64$ *кН*.

Результаты расчета статическим методом представлены на рис. 6.

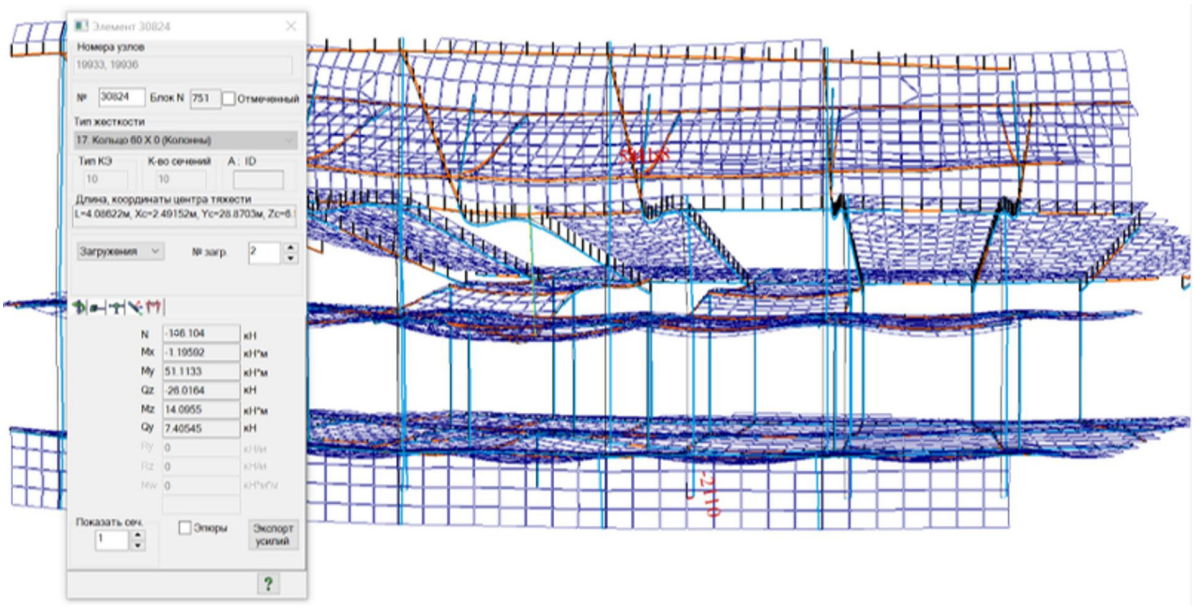


Рис. 6. Продольные усилия в колонне над удаленной после статического демонтажа элементов сечения, кН ($N = -106{,}1$ кН)

Результаты расчета динамическим методом представлены на рис. 7, 8. Усилие в колонне над удаленной при статическом методе расчета на 29 % больше, чем при динамическом методе, однако в обоих случаях остается сжимающей. При этом проверки прочности соблюдаются с большим запасом и в том и другом случае, коэффициенты запаса прочности различаются незначительно.

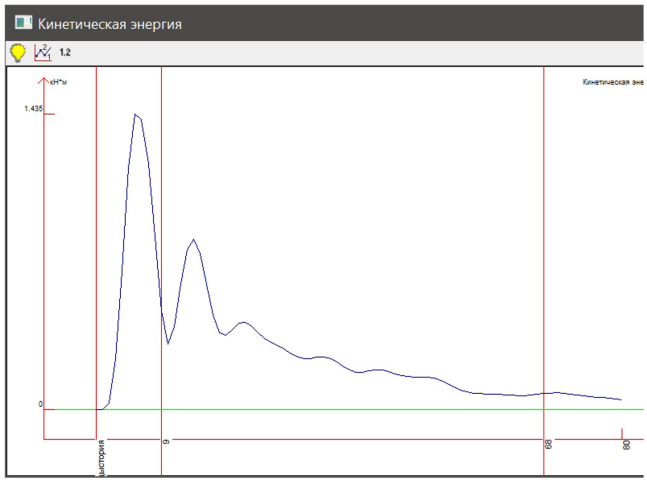


Рис. 7. График изменения кинетической энергии системы во времени

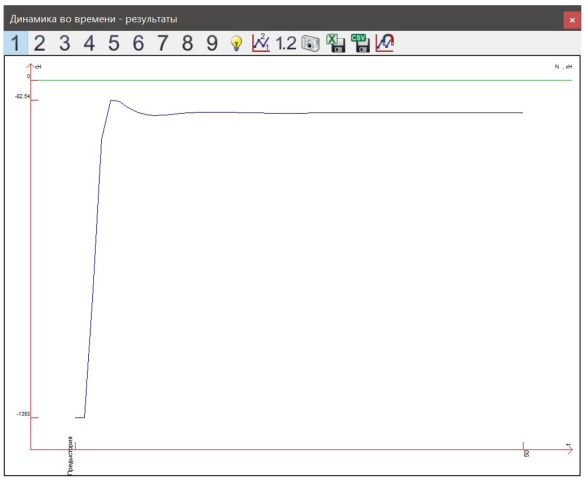


Рис. 8. Продольные усилия в колонне над удаляемой во времени ($N(0{,}03\ c) = -82{,}54$ кН)

2) Рассмотрим удаление одного из канатов центральной ванты.

Максимальное продольное усилие в вантовой сети от предыстории (одинаковая последовательность нагрузок для динамического и статического удаления сечения элемента) составляет $N = 916{,}5$ кН.

При статическом методе расчета максимальное продольное усилие в вантовой сети после статического демонтажа имеет значение $N_{max} = 1317$ кН. При динамическом методе расчета максимальное продольное усилие во времени принимает значение $N_{max}(0{,}10\ c) = 1406$ кН.

Продольное усилие в оставшемся канате при динамическом методе на 7 % превышает усилие при статической постановке задачи.

Картины потери прочности сборных плит покрытия в обоих случаях приблизительно одинаковые (рис. 9). Видим, что в окрестности обрыва одного из канатов ванта, не проходят проверку прочности сборные плиты оболочки. За пределами этой окрестности прочность элементов обеспечена. Усилия в оставшемся канате в обоих случаях не превышают усилия каната на разрыв (приблизительно 2000 *кН* [10]).

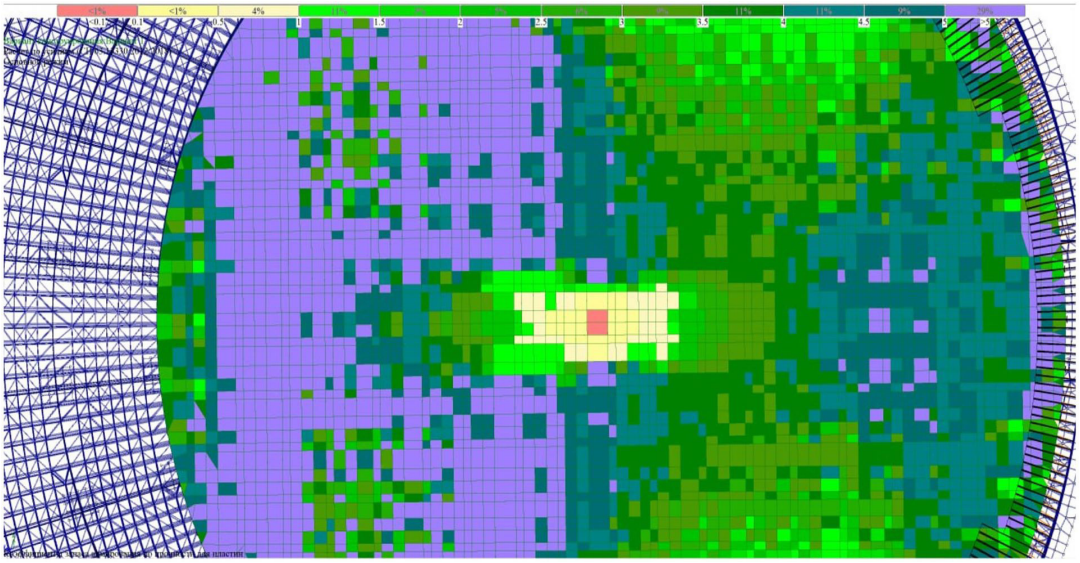


Рис. 9. Проверка прочности пластин в окрестности разрыва каната

Заключение

В работе была предпринята попытка верификации расчетной схемы при анализе ее работы и сравнении с информацией о поведении реального объекта. Сравнение показало близкие результаты перемещений оболочки в процессе отпуска оттяжек и ее обжатия. Стадийность монтажа, учтенная в расчете, согласуется со схемой работы реальной оболочки как в стадии обжатия, так и в эксплуатационной. Моделирование особенностей поэтапного отпуска оттяжек и не набора бетоном проектной прочности позволило добиться адекватной работы конструкции.

Рассмотрены расхождения в значениях продольных сил как для колонны, так и для каната при моделировании отказа элементов статическим и динамическим методами. Расхождения можно объяснить следующим образом: в жестких и многосвязных системах, таких как каркас здания, влияние диссипации колебательной энергии и перераспределение внутренних усилий, учитываемые динамическим процессом, позволяют более точно оценить эффективность работы конструкций и обнаружить большую прочность. В пространственных менее жестких системах, таких как висячее покрытие, учет динамических эффектов важен, так как может обнаружить менее выгодное НДС конструкции, чем статический метод.

По результатам расчета покрытия объекта можно сделать вывод о том, что для определенных зданий и сооружений, их отдельных конструкций, в частности для висячих систем, динамический нелинейный расчет имеет приоритетное значение.

Литература

1. *Шумилов К. А., Гурьева Ю. А.* Применение Grasshopper, Rhino, Archicad для моделирования различных форм архитектурных объектов, содержащих элементы сложной геометрии //

Инженерно-строительный вестник Прикаспия: научно-технический журнал. – 2022. – № 3 (41). – С. 92–95.

2. *Рогожников П. С.* GDL-проектирование моделей на основе программного комплекса Rhinoceros и Grasshopper // Сборник трудов Международной научно-технической конференции молодых ученых БГТУ им. В.Г. Шухова. – Белгород, 2019. – С. 1032–1035.

3. *Долганов А. И.* Об учете прогрессирующего разрушения при проектировании // Надежность. – 2020. – № 1. – С. 20–24.

4. *Ведяков И. И., Еремеев П. Г., Одесский П. Д., Попов Н. А., Соловьев Д. В.* Расчет строительных конструкций на прогрессирующее обрушение: нормативные требования // Промышленное и гражданское строительство. – 2019. – № 4. – С. 16–24.

5. *Савин С. Ю., Федорова Н. В.* Сопоставление методов расчета несущей системы на внезапный отказ одного из ее элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2022. –Т. 18, № 4. – С. 329–340.

6. *Belostotsky A. M., Karpenko N. I., Akimov P. I., Sidorov V. N., Karpenko S. N., Petrov A. N., Kaytukov T. B., Kharitonov V. A.* About development of methods of analysis and assessment of vulnerability of spatial plate-shell reinforced concrete structures with allowance for physical non-linearities, crack formation and induced anisotropy // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. – Vol. 14, No 2. – P. 30–47.

7. *Еремеев П. Г.* Методы проектирования на прогрессирующее обрушение: гармонизация российских и международных нормативных документов // Промышленное и гражданское строительство. – 2022. – № 4. – С. 23–28.

8. СП 387.1325800.2018 «Железобетонные пространственные конструкции покрытий и перекрытий. Правила проектирования».

9. СП 385.1325800.2018 «Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения. Правила проектирования. Основные положения».

10. Пояснительная записка по монтажу висячей оболочки цирка в г. Новосибирске. Министерство культуры СССР. Государственный проектный институт «ГИПРОТЕАТР», 1967 г.

УДК 519.82

СИСТЕМА ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ В РОССИИ

М. В. Глуховский

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрено понятие системы поддержки принятия решений и основные понятия временных рядов. Была решена практическая задача кластеризации городов России по темпу роста населения с помощью методов машинного обучения, а также специальных алгоритмов для трендовых моделей на языке программирования Python.
Ключевые слова: система поддержки принятия решений, временные ряды, трендовые модели, машинное обучение, Python, демография, кластеризация, метод k-средних, линейная регрессия, ARIMA.

Введение

Современная демографическая ситуация в России является одной из ключевых проблем, требующих серьезного внимания и комплексного анализа. Население страны стареет, рождаемость снижается, миграционные процессы оказывают влияние на структуру населения. Для эффективного управления демографическими процессами необходима система поддержки принятия решений, способная анализировать данные, выявлять тенденции и предлагать методы их улучшения.

Таким образом, работа направлена на создание системы поддержки принятия решений для анализа и улучшения демографической ситуации в России с использованием современных методов анализа данных и моделирования. Результаты и выводы исследования могут иметь практическое значение для различных сфер деятельности и способствовать развитию стратегий по улучшению демографической ситуации в стране.

1. Понятие системы поддержки принятия решений

Системы поддержки принятия решений (СППР) представляют собой комплексные инструменты, предназначенные для анализа данных, выработки альтернативных вариантов и оценки возможных последствий для принятия обоснованных решений [1]. Они играют важную роль в различных областях, включая бизнес, науку, здравоохранение, государственное управление и другие. СППР объединяют в себе методы математического моделирования, статистического анализа, экспертных оценок и другие техники для обеспечения информационной поддержки процесса принятия решений.

Основные компоненты СППР:

– база данных: центральным элементом СППР является база данных, содержащая информацию о предметной области, исторические данные, статистику и другие сведения, необходимые для анализа;

– моделирование и анализ: СППР используют различные математические модели, статистические методы и алгоритмы для анализа данных и прогнозирования последствий различных решений;

– интерфейс пользователя: важным компонентом является удобный интерфейс, позволяющий пользователям взаимодействовать с системой, вводить данные, настраивать параметры анализа и визуализировать результаты;

– экспертная система: некоторые СППР содержат экспертные системы, которые используют знания специалистов для автоматического анализа ситуации и предложения наилучших вариантов действий.

2. Временные ряды и трендовые модели

Так как при создании системы планируется анализировать данные о населении городов России в разные года, то стоит отдельно рассмотреть понятие временного ряда.

Временной ряд представляет собой числовую последовательность, отражающую изменение явления во времени [2].

Тенденция — некоторое общее направление развития. Тенденцию ряда динамики представляют в виде гладкой кривой (траектории), которая аналитически выражается некоторой функцией времени, называемой трендом. Тренд характеризует основную закономерность движения во времени, свободную в основном, но не полностью, от случайных воздействий [3].

В зависимости от вида функции различают следующие основные формы тренда:

– линейная:

$$y = at + b,$$

где y — уровни, освобожденные от колебаний, выровненные по прямой, b — начальный уровень тренда в момент или период, принятый за начало отсчета времени, a — среднегодовой абсолютный прирост (среднее изменение за единицу времени t).

Линейный тренд хорошо отражает тенденцию изменений при действии множества разнообразных факторов, изменяющихся различным образом по разным закономерностям. Равнодействующая этих факторов при взаимном погашении особенностей отдельных факторов (ускорение, замедление, нелинейность) часто выражается в примерно постоянной абсолютной скорости изменения, т. е. в прямолинейном тренде.

– параболическая:

$$y = a + bt + ct^2,$$

где c — квадратический параметр, равный 0,5 ускорения.

Параболический тренд выражает ускоренное или замедленное изменение уровней ряда с постоянным ускорением. Такой характер развития можно ожидать при наличии важных факторов прогрессивного (регрессивного) развития.

– экспоненциальная:

$$y = a \cdot e^k,$$

где k — темп роста изменения в разах, e — константа тренда.

Если $k > 1,$ экспоненциальный тренд выражает тенденцию ускоренного и все более ускоряющегося возрастания уровней. При росте по экспоненте абсолютный прирост пропорционален достигнутому уровню. Так росло население Земли в эпоху «демографического взрыва» в XX столетии.

При $k < 1$ экспоненциальный тренд означает тенденцию постоянно все более замедляющегося роста уровней динамического ряда.

– логарифмическая:

$$y = a + b \log t,$$

Логарифмический тренд пригоден для отображения тенденции замедляющегося роста уровней при отсутствии предельного возможного значения.

Моделирование временных рядов является важным инструментом для прогнозирования будущих значений ряда, что позволяет принимать более обоснованные решения в различных областях.

Авторегрессионные модели (AR-модели) используют прошлые значения ряда для прогнозирования его будущих значений. Эта модель предполагает, что текущее значение ряда зависит от его предыдущих значений.

Следующий метод моделирования временных рядов — ***скользящее среднее (MA-модели)***. Эта модель использует прошлые значения ошибок — разницу между фактическими значениями ряда и его прогнозируемыми значениями, для прогнозирования будущих значений.

ARIMA — это модель, комбинирующая авторегрессионные и скользящие средние модели. ARIMA позволяет моделировать данные, не являющиеся стационарными, как это не требуется для AR- и MA-моделей.

3. Подготовка данных и обучение моделей

Постановка задачи:

По данным о населении городов России (1994–2023 гг.) оценить демографическую ситуацию в конкретных городах, кластеризовать их по темпу роста населения и предложить способы улучшения ситуации с помощью языка программирования Python.

Решение:

Имеется таблица, содержащая информацию о численности населения городов в период с 1994 по 2023 г. Часть исходных данных представлена на рис. 1:

Город	Год	Численность населения
Абакан	1994	155224.0
Альметьевск	1994	130980.0
Ангарск	1994	268455.0
Арзамас	1994	110123.0
Армавир	1994	171678.0
...	...	...
Элиста	2023	102618.0
Энгельс	2023	225731.0
Южно-Сахалинск	2023	200854.0
Якутск	2023	318768.0
Ярославль	2023	609828.0

Рис. 1. Исходные данные

Начнем с подготовки данных [4].

Заметим, что про Симферополь, Севастополь, Евпаторию и Керчь данных очень мало — только с 2015 года, так что исключим их из рассмотрения.

Нормализируем столбец «численность населения», используя метод Z-нормализации.

Перейдем к построению моделей [5].

Разделим данные на тренировочные и тестовые, выделив на последние 15 % от всех данных, и построим линейную регрессию, трендовую экспоненциальную модель и модель ARIMA, так как они являются наиболее подходящими для решения данной задачи.

На рис. 2–4 изображены результаты прогнозирования всех трех моделей, а также реальные значения целевой переменной (численности населения) для Воронежа, Москвы и Барнаула в качестве примера:

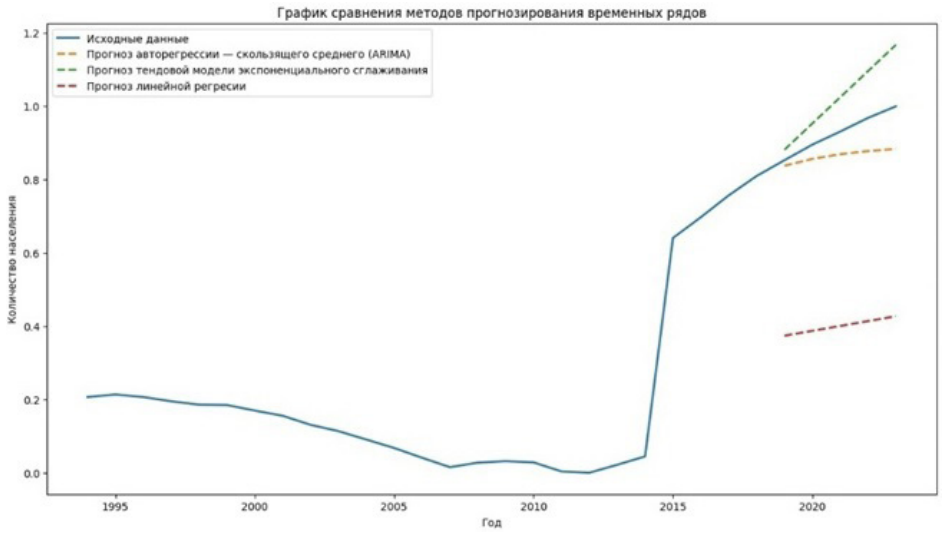


Рис. 2. Воронеж

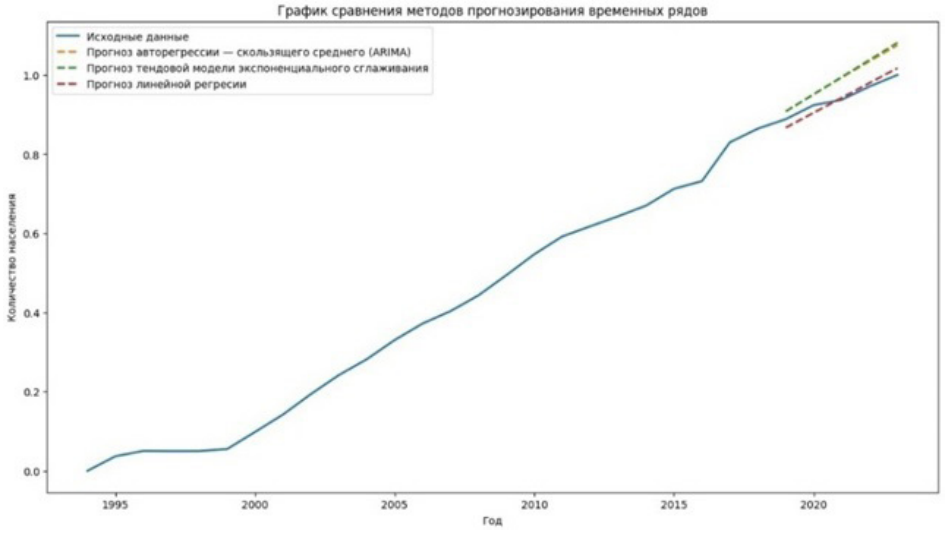


Рис. 3. Москва

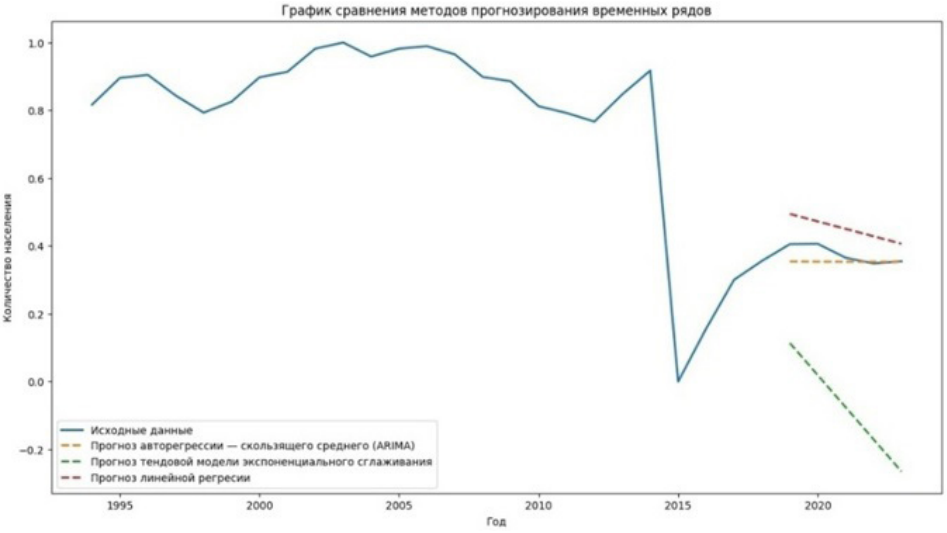


Рис. 4. Барнаул

Оценим качество построенных моделей с помощью метрик MSA, RMSA и MAE (рис. 5) [8]:

Город	Метод	MSE	RMSE	MAE
Абакан	ARIMA	0.001502	0.038759	0.034407
Абакан	ExponentialSmoothing	0.001671	0.040873	0.030207
Абакан	LinearRegression	0.119734	0.346026	0.334046
Альметьевск	ARIMA	0.008658	0.093047	0.081497
Альметьевск	ExponentialSmoothing	0.007664	0.087545	0.076583
...	...	...	...	...
Ярославль	ExponentialSmoothing	0.015320	0.123773	0.107144
Ярославль	LinearRegression	0.371202	0.609263	0.598474
Грозный	ARIMA	0.027897	0.167024	0.149869
Грозный	ExponentialSmoothing	0.006046	0.077757	0.073010
Грозный	LinearRegression	0.017776	0.133326	0.126315

Рис. 5. Оценка качества построенных моделей

Для 97 городов наилучший результат показала модель ARIMA, для 73 городов – трендовая экспоненциальная модель, а для 14 городов — линейная регрессия. Так как ARIMA показала наилучший результат в большинстве городов, в дальнейшем будем рассматривать её.

4. Разбиение городов на кластеры

Перейдем к кластеризации. Для начала определим оптимальное количество кластеров с помощью метода «локтя» (рис. 6):

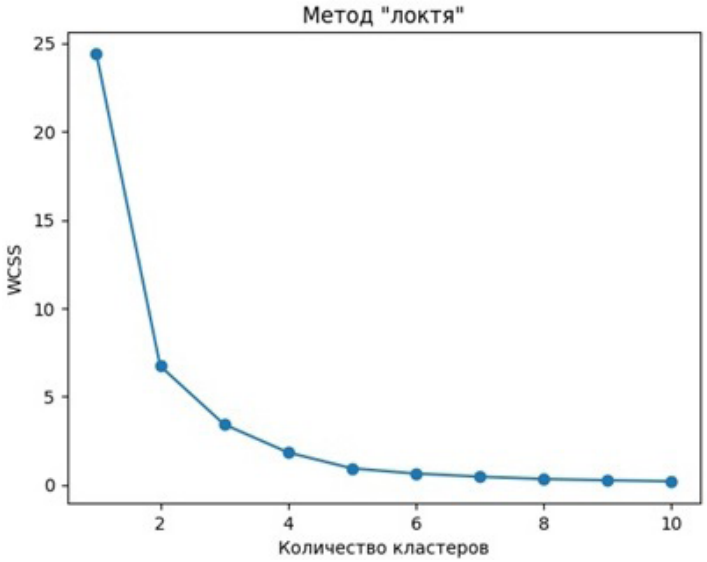


Рис. 6. Метод локтя

Начиная с 5, сумма квадратов внутрикластерных расстояний до центра кластера перестает резко убывать, поэтому будем разбивать города на 5 кластеров. Для этого воспользуемся методом k-средних [6]:

1) выбираем число кластеров k;

2) выбираем k случайных значений, эти точки будут работать как центроиды кластеров;

3) создаем кластеры, для этого измеряем расстояние между каждым значением наших данных до каждого из центроидов по формуле (в двумерном пространстве):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

где $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ — координаты точек, между которыми вычисляется расстояние, а затем добавляем его к наиболее близкому кластеру;

4) вычисляем новый центроид каждого кластера как среднее арифметическое абсцисс всех точек, попавших в данный кластер, и среднее арифметическое ординат этих точек;

5) оцениваем качество каждого кластера, вычисляя величину Within-Clustersumofsquares (WCSS) — сумму квадратов внутрикластерных расстояний до центра кластера:

$$WCSS = \sum_{j=1}^{k} \sum_{x_i \in j} d(x_i; \overline{x}_j)^2,$$

где j — номер кластера, x_i — точки, принадлежащие кластеру j, $\overline{x}_j$ — центроид кластера j;

6) повторяем шаги 3–5 относительно новых центроидов, пока кластеры не перестанут меняться.

Автором метода k-средних является Карол Бездек, благодаря которому нечеткая кластеризация и получила широкое применение. Нечеткие методы кластеризации позволяют одному и тому же объекту принадлежать одновременно нескольким (или даже всем) кластерам, но с различной степенью принадлежности [7]. Нечеткая кластеризация во многих ситуациях более «естественна», чем четкая, например, для объектов, расположенных на границе кластеров.

Получим следующее разбиение (рис. 7):

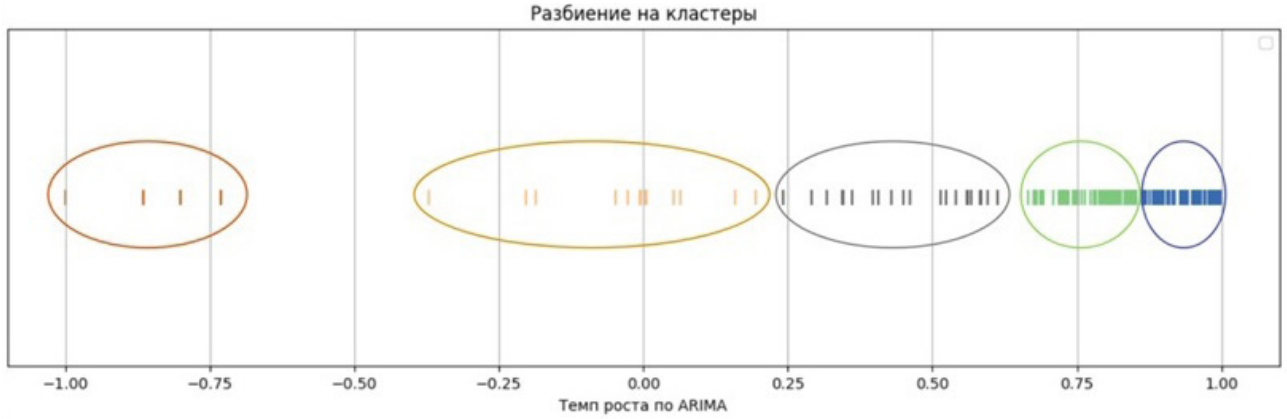


Рис. 7. Разбиение на кластеры

В первый кластер с наименьшим темпом роста населения попало всего 4 города: Междуреченск, Салават, Майкоп и Кемерово.

Во второй кластер попало 15 городов, в том числе, Великий Новгород, Омск и Тула.

В третий кластер попало 22 города, в том числе, Волгоград, Рязань и Петрозаводск.

В четвертый кластер попало 52 города, в том числе, Воронеж, Магадан и Тверь.

И в пятый кластер с самым большим темпом роста попал 91 город.

Самыми быстро растущими городами оказались Екатеринбург, Стерлитамак и Дербент.

Стоит отметить, что в пятый кластер попало очень много городов из Подмосковья, что может быть обусловлено тем, что качество жизни (медицина, транспорт, возможность получить хорошее образование и посетить культурные мероприятия) не сильно уступает московскому, и многие готовы тратить ежедневно время на поездку в столицу, экономя на жилье.

После проведенного анализа выявились определенные проблемы, приводящие к ухудшению демографической ситуации, и соответствующие пути их решения:

– вложение средств в медицину;
– проведение культурных мероприятий;
– увеличение рабочих мест;
– проведение мероприятий по улучшению экологической ситуации.

За счет перераспределения государственного бюджета таким образом, чтобы больше средств уходило на города из пятого кластера, а точнее на вышеперечисленные пути решения проблем, есть возможность улучшить демографическую ситуацию в отстающих городах.

Заключение

В ходе работы была разработана система поддержки принятия решений для определения демографической ситуации в городах России. Анализ получившейся кластеризации позволил определить основные проблемы и пути их решения, что может быть использовано при перераспределении государственного бюджета.

Литература

1. *Сизова О. В.* Системы поддержки принятия решений: учебное пособие / О.В. Сизова. – Иваново: Ивановский государственный химико-технологический университет, 2017. – 61 с.

2. *Кизбикенов К. О.* Прогнозирование и временные ряды: учебное пособие / К. О. Кизбикенов. – Барнаул : АлтГПУ, 2017. – 115 с.

3. *Артамонов Н. В.* Введение в анализ временных рядов: учебное пособие для вузов / Н. В. Артамонов, Е. А. Ивин, А. Н. Курбацкий, Д. Фантаццини; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московская школа экономики, Кафедра эконометрики и математических методов экономики. – Вологда : ВолНЦ РАН, 2021. – 134 с.

4. Глуховский М. В. Машинное обучение в прогнозировании / М. В. Глуховский, Л. А. Смирнова // Математика, информационные технологии, приложения: сборник трудов Мужвузовской научной конференции молодых ученых, студентов и школьников (Воронеж, 24–25 апреля 2024 г.): электронный ресурс. – Воронеж, 2024. – С. 150–157.

5. *Сапрыкин О. Н.* Интеллектуальный анализ данных: учебное пособие / О. Н. Сапрыкин. – Самара : Издательство Самарского университета, 2020. – 80 с.

6. *Барсегян А. А.* Методы анализа данных: OLAP и Data Mining / А. А. Барсегян, М. С. Куприянов, В. В. Степаненко, И. И. Холод. – Санкт-Петербург : БВХ-Петербург, 2004. – 336 с.

7. *Глуховский М. В.* Нечеткое моделирование в среде Matlab / М. В. Глуховский, Е. М. Аристова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции (Воронеж, 4–6 декабря 2023 г.): электронный ресурс. – Воронеж, 2023. – С. 401–407.

8. Метрики качества линейных регрессионных моделей. Loginom. – URL: https://loginom.ru/blog/quality-metrics (дата обращения: 30.09.2024).

УДК 519.6

ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА ОТ ВЕЛИЧИНЫ ШАГА ПРИ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Т. Н. Глушакова, И. А. Меркулов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье приведены зависимости, связывающие коэффициенты кубического сплайна при экстраполяции на шаги длины 1 и 2 статистических данных.
Ключевые слова: интерполяционные сплайны, экстраполяция, прогнозирование.

Введение

Общепринято, что полиномиальные сплайны применяются для интерполяции дискретных значений внутри заданного интервала. Однако в последнее время всё чаще стали появляться работы [1–6], в которых сплайны используются для прогнозирования значений на 1–2 шага, показывая при этом неплохие результаты. При экстраполяции сплайнами статистических данных по ДТП для разных значений шагов были выявлены интересные зависимости, которые и будут описаны в данной статье.

Постановка задачи и основные результаты

Кратко опишем построение кубического сплайна.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана таблица значений

$x_0 = a$	x_1	x_2	…	$x_n = b$
y_0	y_1	y_2	…	y_n

с равномерной сеткой $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,\ h = x_i - x_{i-1}\ \ (i = 1,\ldots,n)$ — шаг сетки.

Рассмотрим частичный отрезок $[x_{i-1}, x_i]\ \ (i = 1,\ldots,n)$ и построим на нем кубический сплайн $S_i(x)$ с краевыми условиями $S''(a) = S''(b) = 0.$ Запишем его в виде

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3 \quad (i = 1,\ldots,n).$$

где $a_i = y_i,\ \ b_i = \frac{c_i}{2}h - \frac{d_i}{6}h^2 + \frac{y_i - y_{i-1}}{h},\ \ d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h}\ \ (c_0 = 0).$

Коэффициенты c_i находятся как решение системы

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_{i-1}\,h + 4\,c_i\,h + c_{i+1}\,h = F_i \quad (i = 1,\ldots,n-1) \\ c_n = 0 \end{cases}$$

с $F_i = 6 \cdot \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h}\ \ (i = 1,\ldots,n-1).$

Рассмотрим статистические данные по ДТП (в тыс.) в России, представленные в табл. 1.

В [5] показано, что при экстраполяции табличных значений с 2000 года по 2022 год на шаг $h = 1$ все прогнозируемые значения, при отбрасывании по одному году слева, в 2023 году совпадают, что возможно лишь в случае, когда в последней точке $x_n = b$ отрезка $[a,b]$ величина $b_n + \frac{d_n}{6}$ постоянна.

Таблица 1

Количество ДТП и погибших в них с 2000 по 2023 год

Год	Количество ДТП	Количество погибших
2000	157.5	29.6
2001	164.4	30.9
2002	184.4	33.2
2003	204.3	35.6
2004	208.6	34.5
2005	223.3	33.9
2006	229.1	32.7
2007	233.8	33.3
2008	218.3	29.9
2009	203.6	26.1
2010	199.4	26.6
2011	199.9	27.9
2012	203.6	27.9
2013	199.4	27.0
2014	199.7	26.9
2015	184.0	23.1
2016	173.7	20.3
2017	169.4	19.1
2018	168.1	18.2
2019	164.4	16.9
2020	145.1	16.2
2021	133.3	14.9
2022	126.7	14.1
2023	132.5	14.5

Рассмотрим теперь экстраполяцию табличных значений на шаг $h = 2$. Для этого уберём из табл. 1 чётные года и оставим нечётные. Полученные значения представлены в табл. 2.

Таблица 2

Количество ДТП и погибших в них с 2001 по 2023 год

Год	Количество ДТП	Количество погибших
2001	164.4	30.9
2003	204.3	35.6
2005	223.3	33.9
2007	233.8	33.3
2009	203.6	26.1
2011	199.9	27.9
2013	199.4	27.0
2015	184.0	23.1
2017	169.4	19.1
2019	164.4	16.9
2021	133.3	14.9
2023	132.5	14.5

Отбрасывая по 2 года слева, в результате экстраполяции получим значения, представленные в табл. 3.

Таблица 3

Прогнозируемые значения на шаг $h = 2$

Годы	Прогноз кол-ва ДТП	Прогноз кол-ва погибших
2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, … , 2021	102.2	12.9
2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, … , 2021	102.2	12.9
2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, … , 2021	102.2	12.9
2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021	102.2	12.9
2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021	102.2	12.9
2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021	102.2	12.9
2013, 2015, 2017, 2019, 2021	102.2	12.9
2015, 2017, 2019, 2021	102.2	12.9

Из табл. 3 видно, что все прогнозируемые значения совпадают.

Найдём коэффициенты кубического сплайна для последнего частичного отрезка и закономерность, их связывающую. Результаты вычислений запишем в табл. 4.

Таблица 4

Значения коэффициентов для экстраполяции на один шаг для $h = 2$

	b_n	d_n	$2b_n + \frac{4}{3}d_n$
2001–2021	–19.277	5.591	–31.100
2003–2021	–19.277	5.591	–31.100
2005–2021	–19.280	5.594	–31.100
2007–2021	–19.279	5.594	–31.100
2009–2021	–19.260	5.566	–31.100
2011–2021	–19.212	5.494	–31.100
2013–2021	–19.327	5.665	–31.100
2015–2021	–19.964	6.621	–31.100

Рассмотрим теперь прогноз на полшага вперёд для шага $h = 2,$ и полученные результаты занесём в табл. 5.

Таблица 5

Прогнозируемые значения на полшага для $h = 2$

Годы	Прогноз кол-ва ДТП	Прогноз кол-ва погибших
2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010, … , 2022	118.613	13.0787
2002, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, … , 2022	118.613	13.0787
2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, … , 2022	118.613	13.0787
2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016, … , 2022	118.612	13.0786
2008, 2010, 2012, 2014, 2016, 2018, … , 2022	118.61	13.0781
2010, 2012, 2014, 2016, 2018, 2020, 2022	118.616	13.0791
2012, 2014, 2016, 2018, 2020, 2022	118.676	13.0937
2014, 2016, 2018, 2020, 2022	118.761	13.1019
2016, 2018, 2020, 2022	118.925	13.0339

Из табл. 6 видно, что стабилизация данных начинается с 10 значений.

Заключение

Из всего вышеизложенного следует, что при экстраполяции вперед на один шаг для $h=1$ и $h=2$ достаточно взять всего лишь 4 значения, а для прогнозирования на полшага для $h=2$ нужны как минимум 10.

Литература

1. *Глушакова Т. Н.* Применение сплайнов для экстраполяции скачкообразных кривых / Т. Н. Глушакова, К. П. Лазарев, О. А. Будко // Научный альманах. – 2022, № 2-2(88). – С. 37–46.

2. Сплайн-экстраполяция MathCAD 12 руководство. – Режим доступа: http://radiomaster.ru/ cad/mc12/glava_13/index06.php.

3. *Лабинский А. Ю.* Краткосрочное прогнозирование с помощью сплайн-экстраполяции / А. Ю. Лабинский // Природные и техногенные риски (физико-математические и прикладные аспекты). – 2022. – № 4 (44). – С. 12–19.

4. *Кайбичев И. А.* Рекурсивное прогнозирование сплайнами в среднесрочном прогнозе / И. А. Кайбичев // Пожаровзрывобезопасность. – 2011. – Том 20, № 9. – С. 49–53.

5. *Меркулов И. А.* Об одной интересной особенности экстраполяции кубическими сплайнами / И. А. Меркулов // Математика, информационные технологии, приложения [Электронный ресурс]: межвузовская научная конференция молодых ученых, студентов и школьников. Воронеж, 24–25 апреля 2024 г.

6. *Глушакова Т. Н.* О некоторых интересных результатах при экстраполяции кубическими сплайнами / Т. Н. Глушакова, И. А. Меркулов // Научный альманах. – 2024, № 4-3(114). – С. 79–82.

УДК 519.6

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ РАЗНЫМИ МЕТОДАМИ

Т. Н. Глушакова, И. А. Меркулов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье рассматриваются такие методы прогнозирования, как линейная и параболическая аппроксимации, а также метод сплайн-интерполяции для краткосрочного прогнозирования статистических данных.
Ключевые слова: линейная аппроксимация, параболическая аппроксимация, сплайн-интерполяция.

Введение

В последнее время всё чаще для краткосрочного прогнозирования используются сплайны [1–6]. В данной статье проводится сравнение результатов краткосрочного прогнозирования статистических данных, полученных с применением стандартных методов (линейной и квадратичной аппроксимаций), с нестандартным подходом – экстраполяцией интерполяционным кубическим сплайном.

Постановка задачи и основные результаты

Для анализа результатов краткосрочного прогнозирования возьмём статистические данные о ДТП в России с 2000 по 2023 год, представленные в табл. 1.

Таблица 1

Официальная статистика ДТП в России

Год	Количество ДТП общее	Количество погибших общее	Количество ДТП в сост. опьянения	Кол-во погибших в ДТП с водителями в сост. опьянения	Кол-во ДТП в темное время суток	Кол-во погибших в ДТП в темное время суток	Кол-во ДТП с наездом на пешехода	Кол-во погибших в ДТП с наездом на пешехода
2000	157.5	29.6						
2001	164.4	30.9						
2002	184.4	33.2						
2003	204.3	35.6						
2004	208.6	34.5						
2005	223.3	33.9						
2006	229.1	32.7						
2007	233.8	33.3						
2008	218.3	29.9						
2009	203.6	26.1						

2010	199.4	26.6						
2011	199.9	27.9						
2012	203.6	27.9						
2013	204.1	27						
2014	199.7	26.9						
2015	184	23.1	15.34	3.753	67.732	11.827	56.886	6.991
2016	173.7	20.3	15.67	4.569	60.430	9.803	52.001	5.786
2017	169.4	19.1	14.97	4.336	60.216	9.466	51.839	5.634
2018	168.1	18.2	15.17	4.296	57.341	8.810	48.814	5.155
2019	164.4	16.9	14.67	4.050	56.894	8.147	47.440	4.783
2020	145.1	16.2	14.48	4.064	50.897	7.888	38.716	4.368
2021	133.3	14.9	11.76	3.411	44.693	6.834	35.666	3.767
2022	126.7	14.1	10.81	3.187	41.434	6.347	34.604	3.529
2023	132.5	14.5	10.602	3.0	42.874	6.3	34.921	3.394

Проведем сравнение прогнозирования кубическими сплайнами с другими известными методами, такими как линейная и квадратичная аппроксимации. Для этого найдём прогнозируемые значения на 2023 год для каждой выборки данных из табл. 1 и построим для них графики кубических сплайнов, линейной и полиномиальной аппроксимации, представленных в табл. 2 и на рис.1–6.

Таблица 2

Сравнение полученных результатов прогнозирования

	Кол-во ДТП (кол-во погибших)	Количество ДТП с водителями, находящимися в состоянии опьянения (кол-во погибших)	Количество ДТП, произошедших в темное время суток (кол-во погибших)	Количество ДТП, повлекших наезд на пешехода (кол-во погибших)
Реальное значение	132.5 (14.5)	10.602 (3.0)	42.874 (6.3)	34.921 (3.394)
Кубический сплайн	120.1 (13.3)	9.86 (2.96)	38.175 (5.86)	33.542 (3.291)
Линейная аппроксимация	157.67 (14.83)	11.22 (3.46)	39.27 (5.55)	30.77 (2.98)
Квадратичная аппроксимация	116.47 (13,23)	10,81 (2,95)	41,23 (6,82)	33,21 (3,21)

Заключение

Исходя из полученных данных в табл. 2 и графиков на рис. 1–8, можно отметить, что в целом экстраполяция кубическими сплайнами на 1 шаг даёт более точный результат, чем линейная и квадратичная аппроксимации.

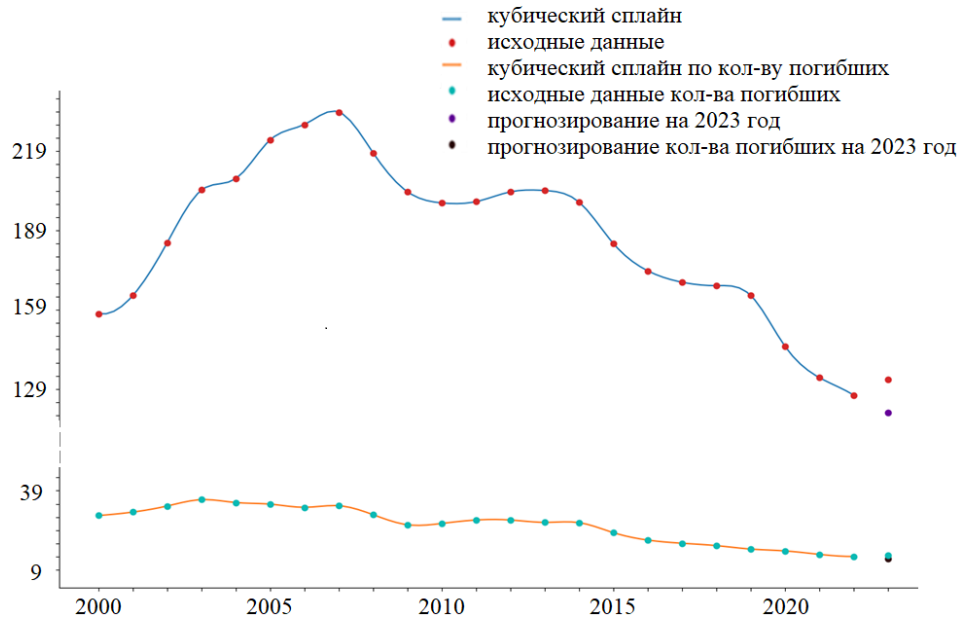


Рис. 1. Кубический сплайн для кол-ва ДТП и погибших в них

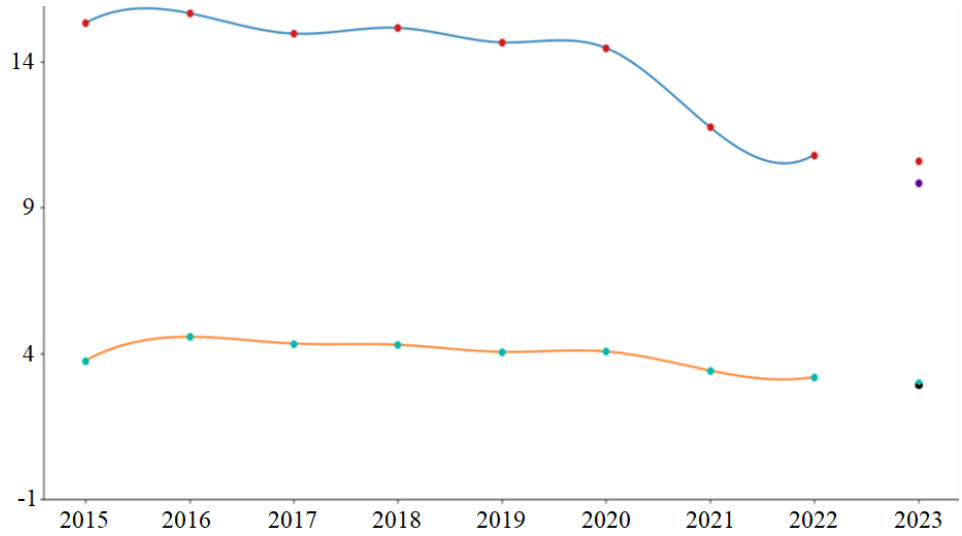


Рис. 2. Кубический сплайн для кол-ва ДТП с водителями, находящимися в состоянии опьянения, и погибших в них

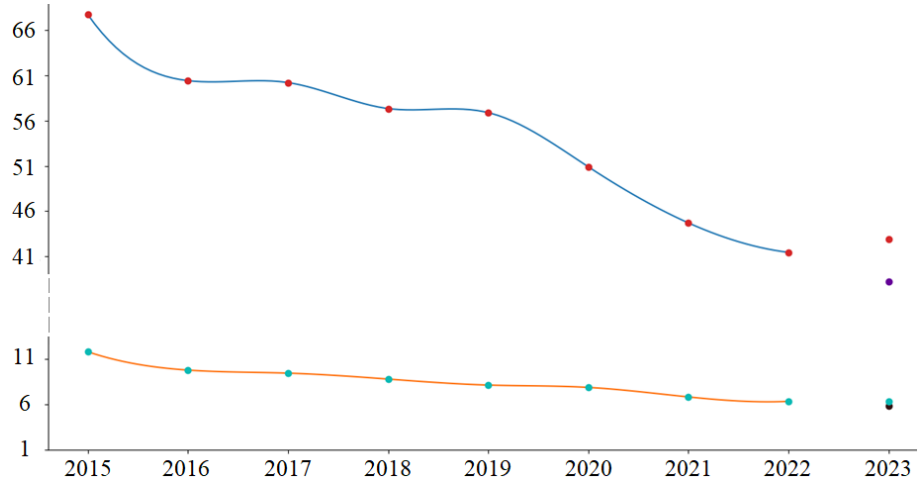


Рис. 3. Кубический сплайн для кол-ва ДТП, произошедших в темное время суток, и погибших в них

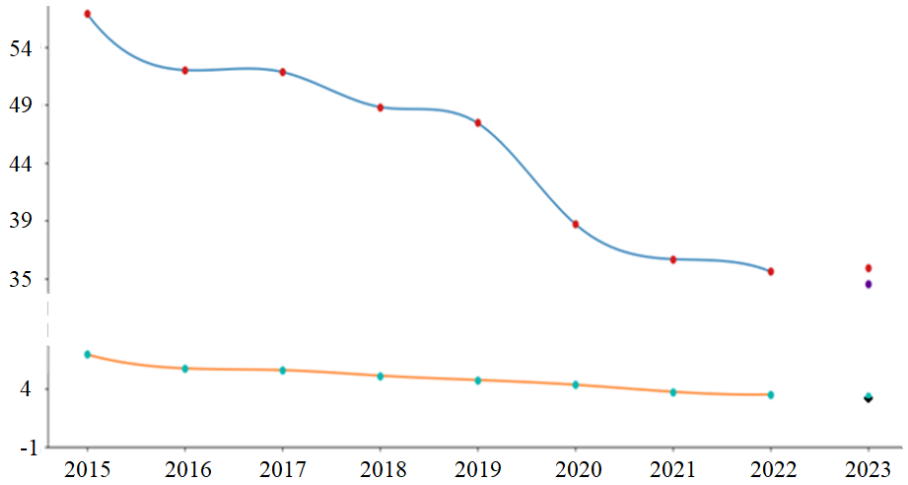


Рис. 4. Кубический сплайн кол-ва ДТП, повлекших наезд на пешехода, и погибших в них

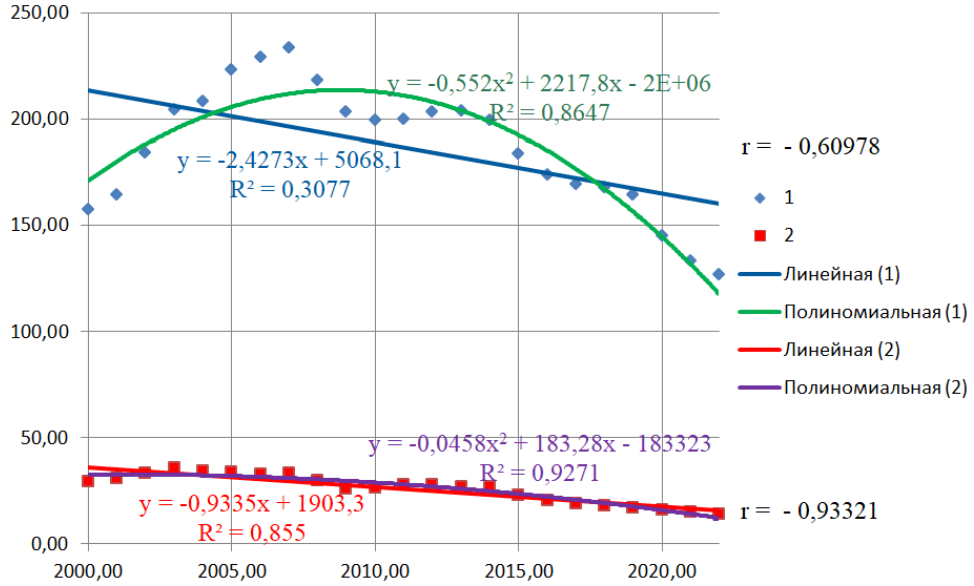


Рис. 5. Графики аппроксимаций для кол-ва ДТП и погибших в них

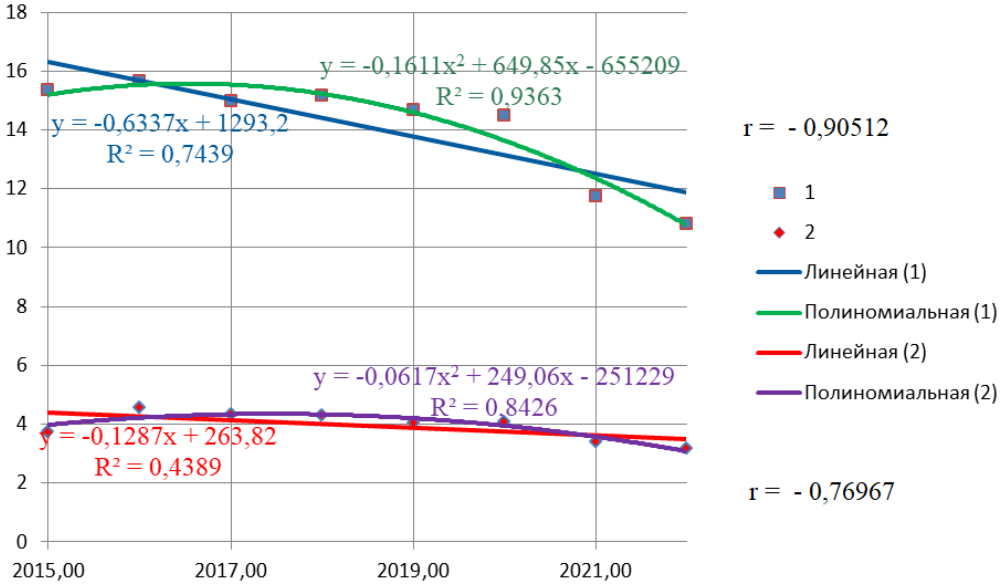


Рис. 6. Графики аппроксимаций для кол-ва ДТП с водителями, находящимися в состоянии опьянения, и погибших в них

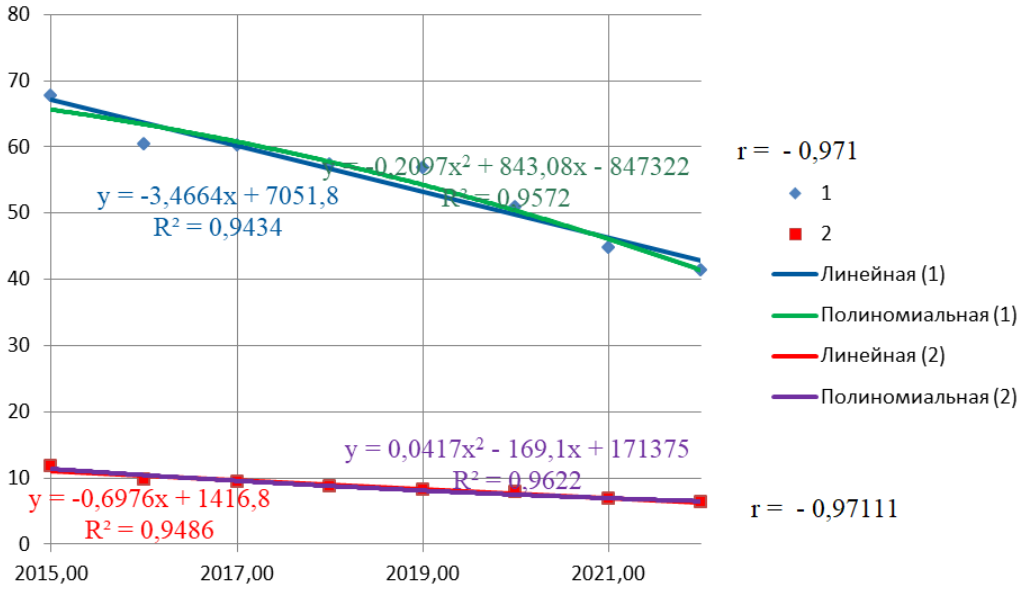


Рис. 7. Графики аппроксимаций для кол-ва ДТП, произошедших в темное время суток, и погибших в них

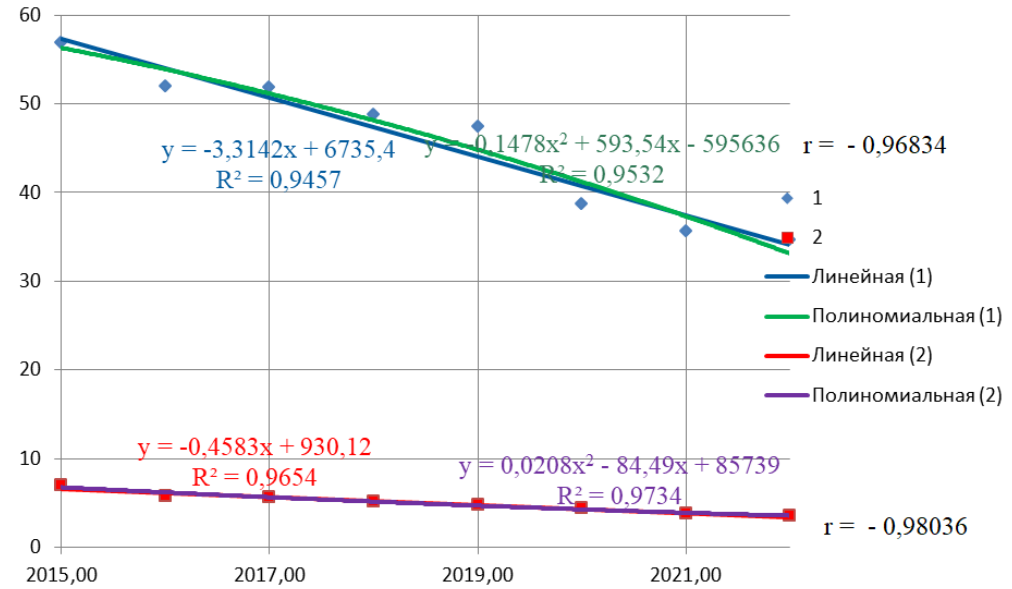


Рис. 8. Графики аппроксимаций для кол-ва ДТП, повлекших наезд на пешехода, и погибших в них

Литература

1. *Глушакова Т. Н.* Применение сплайнов для экстраполяции скачкообразных кривых / Т. Н. Глушакова, К. П. Лазарев, О. А. Будко // Научный альманах. – 2022, № 2-2(88). – С. 37–46.

2. Сплайн-экстраполяция MathCAD 12 руководство. – Режим доступа: http://radiomaster.ru/ cad/mc12/glava_13/index06.php.

3. *Лабинский А. Ю.* Краткосрочное прогнозирование с помощью сплайн-экстраполяции / А. Ю. Лабинский // Природные и техногенные риски (физико-математические и прикладные аспекты). – 2022. – № 4 (44). – С. 12–19.

4. *Кайбичев И. А.* Рекурсивное прогнозирование сплайнами в среднесрочном прогнозе / И. А. Кайбичев // Пожаровзрывобезопасность. – 2011. – Том 20, № 9. – С. 49–53.

5. *Меркулов И. А.* Об одной интересной особенности экстраполяции кубическими сплайнами / И. А. Меркулов // Математика, информационные технологии, приложения [Электрон-

ный ресурс]: межвузовская научная конференция молодых ученых, студентов и школьников. Воронеж, 24-25 апреля 2024 г.

6. *Глушакова Т. Н.* О некоторых интересных результатах при экстраполяции кубическими сплайнами / Т. Н. Глушакова, И. А. Меркулов // Научный альманах. – 2024. – № 4-3(114). – С. 79–82.

УДК 519.246.85

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ КАЧЕСТВА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В УСЛОВИЯХ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ ЗАМЕНЫ НЕДОСТАЮЩИХ ЗНАЧЕНИЙ

П. Ю. Гусев, А. В. Таволжанский

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В настоящей работе рассматривается проблема замены недостающих значений временных рядов. Приведены теоретические сведения, раскрывающие основные принципы работы различных методов заполнения отсутствующих значений. Данные принципы иллюстрируются примером. Далее, представленные методы, такие как: заполнение последующими и предыдущими значениями, интерполяция, метод ближайших соседей и заполнения последним доступным значением применяются для решения поставленной задачи на реальных данных. Данные представляют собой показания измерительных приборов с электрогенератора. По полученным результатам прогнозов и средней величине среднеквадратичной ошибки делается вывод, предлагаются направления дальнейшего развития темы.

Ключевые слова: предиктивная аналитика, машинное обучение, анализ данных, прогнозирование.

Введение

Временные ряды являются одним из распространенных типов данных в экономике, производстве и многих других областях [1–4].

Отсутствие данных в временных рядах может возникать по разным причинам. Одной из наиболее распространенных причин является техническая неполадка при получении или записи информации на носитель. Например, при сборе данных с помощью датчиков могут возникать сбои в работе оборудования, что приводит к пропуску значений. Кроме того, физические ограничения, такие как ограниченная частота измерений, обусловленная возможностями датчиков, также могут приводить к отсутствию данных в определенных интервалах времени.

Для решения проблемы отсутствия данных в временных рядах существует несколько подходов. Один из наиболее распространенных подходов заключается в удалении строк с отсутствующими данными. Однако этот подход не всегда возможен или желателен. Например, в некоторых случаях удаление строк с отсутствующими данными может привести к потере важной информации о динамике процесса. Кроме того, в некоторых случаях удаление строк может привести к искажению статистических характеристик ряда, что также может повлиять на точность анализа и прогнозирования.

Альтернативным подходом является заполнение пропущенных данных. Существует множество методов заполнения пропущенных данных, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. Например, методы интерполяции позволяют заполнить пропущенные значения на основе соседних значений в ряду. Методы моделирования позволяют заполнить пропущенные значения на основе модели, которая описывает динамику процесса.

В данной работе предлагается рассмотреть разные способы замены значений, а также проанализировать их влияние на качество прогноза временных рядов.

1. Теоретические сведения

Заполнение пропущенных значений в исходных данных является актуальной задачей в области обработки данных. Существуют различные методы, позволяющие решить эту пробле-

му [5–7]. В настоящей работе будут рассмотрены методы ffill, bfill, линейной интерполяции (linear), метод ближайших соседей (nearest) и метод последнего доступного значения (pad).

Метод ffill (forward fill) заполняет пропущенные значения предыдущими известными значениями: если значение отсутствует в текущем ряду, оно будет заменено значением из предыдущего ряда.

Метод bfill (backward fill), напротив, заполняет пропущенные значения последующими известными значениями: если значение отсутствует в текущем ряде, оно будет заменено значением из следующего ряда.

Метод (linear) заполняет пропущенные значения, используя линейную интерполяцию между соседними непустыми значениями.

Метод ближайших соседей (nearest). Этот метод заполняет пропущенные значения ближайшим доступным значением. Этот метод прост в реализации, но может привести к неточным результатам, особенно если пропуски расположены близко друг к другу или данные сильно изменяются.

Метод pad заполняет пропущенные значения последним доступным значением. Метод pad также прост в реализации, но может привести к искажениям данных, если пропуски расположены в начале набора данных.

Рассмотрим, как работают методы с помощью следующего примера.

Сначала найдём значение функции $y(x) = x^2$, для значений из столбца x. Далее удалим часть данных и занесём в столбец raw. Затем применим к столбцу ранее перечисленные методы и запишем результаты в табл. 1.

Таблица 1

Результаты работы представленных методов

x	$y(x)$	raw	ffill	bfill	linear	nearest	pad
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	4	4	4	4	4	4
3	9		4	25	11	4	4
4	16		4	25	18	25	4
5	25	25	25	25	25	25	25
6	36		25	49	37	25	25
7	49	49	49	49	49	49	49
8	64		49	100	66	49	49
9	81		49	100	83	100	49
10	100	100	100	100	100	100	100

2. Проведения эксперимента на реальных данных

Проведем исследование точности прогнозирования временных рядов для различных методов заполнения недостающих значений.

В качестве исходных данных будут выступать показания, снятые с измерительных устройств электрогенератора в течение девяти дней [8–10].

В качестве параметров эксперимента определим следующие параметры:

– количество дней для обучения — 1 день;

– шаг дискретизации значений — 5 секунд;

– количество данных для обучения — 10 измерений;

– срок прогнозирования — 500 измерений.

В качестве данных для прогнозирования каждого признака (UID) будет использован информация оставшихся признаков, исключая собственные измерения. Модель для прогноза — модель линейной регрессии. В качестве целевой функции, для оптимизации обучения выбрана среднеквадратичная ошибка (MSE).

Для представления в виде временного ряда исходные данные записываются с определённым шагом дискретизации. В случае отсутствия показания в определённое время, значение остаётся пустым, а далее заполняется согласно определённому методу.

После обучения модели и последующего прогнозирования найдём среднюю величину MSE для каждого метода (табл. 2). В поле count укажем количество исходных измерений. Ячейки с минимальной ошибкой для признака выделим зелёным, а максимальной — красным.

Таблица 2

Результаты исследования на реальных данных

UID	count	ffill	bfill	linear	nearest	pad
1	51290	18,4278	17,7516	12,7986	11,4671	11,8402
2	48481	1,83E–05	2,03E–05	1,68E–04	1,23E–04	9,42E–05
3	44909	0,1402	0,1947	0,2092	0,2202	0,2535
4	43885	3,64E–04	4,41E–04	6,86E–04	6,47E–04	5,93E–04
5	42535	2,86E–04	2,72E–04	4,09E–04	3,64E–04	3,77E–04
6	27898	153,4913	165,1853	107,8104	141,1644	136,2733
7	26939	33,6814	36,8767	26,7942	36,2452	36,2047
8	21954	9,87E–03	1,18E–02	1,64E–02	1,63E–02	1,63E–02
9	10064	1,30E–03	1,01E–03	1,16E–03	1,24E–03	1,50E–03
10	3720	0,2295	0,2071	0,1494	0,1489	0,1484
11	2036	13,3525	12,5334	7,0747	7,0685	6,3150
12	335	411,1501	463,4293	134,1374	126,5519	121,5680

3. Обсуждение результатов

Анализ табл. 2 демонстрирует значительное влияние выбора метода заполнения отсутствующих данных на точность модели. В частности, для признака UID2 удалось на порядок снизить ошибку прогнозирования.

Результаты показывают, что метод nearest является одним из наиболее оптимальных, так как не демонстрирует наихудших значений по сравнению с другими методами.

Для высокочастотных признаков метод ffill продемонстрировал лучшие результаты, в то время как для низкочастотных признаков лучше подходит метод pad.

Данные результаты свидетельствуют о необходимости тщательного выбора метода заполнения пропущенных значений для оптимизации точности модели.

Заключение

Выбор метода замены отсутствующих является важным этапом при работе с временными рядами. Эффективность прогнозирования напрямую зависит от правильного подбора метода, который должен учитывать как характер исходных данных, так и поставленные задачи.

Проведенное исследование демонстрирует важность выбора подходящего метода заполнения пропущенных данных для достижения высокой точности прогнозирования. Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации процессов анализа и прогнозирования данных в различных областях.

Особый интерес представляет дальнейший анализ влияния метода заполнения пропущенных данных на точность модели в зависимости от дней, используемых для обучения и тестирования. Дополнительным направлением является изучение влияния отсутствия начальных или конечных значений на результаты моделирования.

Литература

1. *Ковалев В. З.* Анализ методов прогнозирования потребления электрической энергии и мощности / В. З. Ковалев, С. Ю. Швецов, О. В. Архипова // Инженерный вестник Дона. – 2023. – Т. 4, № 100. – С.127–141.

2. *Неизвестный О. Г.* Программа имитационного моделирования системы предиктивного управления процессом дегидрирования этилбензола / О. Г. Неизвестный // Вестник воронежского государственного технического университета. – 2023. – Т. 19, № 6. – С. 32–40.

3. *Shehadeh A.* Machine learning models for predicting the residual value of heavy construction equipment: An evaluation of modified decision tree, LightGBM, and XGBoost regression / A. Shehadeh, O. Alshboul, R. E. Al Mamlook, O. Hamedat // Automation in Construction. – 2021. – Vol. 129, № 2. – P. 103827.

4. *Семаков С. Л.* Простейшая прогнозная модель временного ряда и ее реакция на линейное и параболическое входные воздействия / С. Л. Семаков, И. С. Семаков // Труды МАИ. – 2018. – № 100. – С. 25.

5. *Зангиева И. К.* Сравнение эффективности алгоритмов заполнения пропусков в данных в зависимости от используемого метода анализа / И. К. Зангиева, Е. С. Тимонина // Мониторинг общественного мнения: экономические и социальные перемены. – 2014. – Т. 119, № 1. – С. 41–55.

6. *Фомина Е. Е.* Обзор методов и программного обеспечения для восстановления пропущенных значений в массивах социологических данных / Е. Е. Фомина // Гуманитарный вестник. – 2019. – № 4 (78). – С. 10.

7. *Рыженкова К. В.* Методы восстановления пропуска данных при проведении статистических исследований / К. В. Рыженкова // Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2012. – № 3. – С. 127–133.

8. *Таволжанский А. В.* Инструменты предиктивной аналитики / А. В. Таволжанский, П. Ю. Гусев // Сборник научных статей 12-й Международной молодежной научной конференции: в 4 т. – Курск, 2023. – С. 96–99.

9. *Гусев П. Ю.* Алгоритмизация обработки и подготовки данных для построения моделей предиктивной аналитики / П. Ю. Гусев, А. В. Таволжанский // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2024. – Т. 19, № 2. – С. 14–19.

10. *Гусев П. Ю.* Techniques and algorithms for predictive analysis / П. Ю. Гусев, А. В. Таволжанский // Антропоцентрические науки в образовании: вызовы, трансформации, ресурсы. – 2024. – С. 396–400.

УДК 51-7:548.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ПРИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВИНТОВОЙ ДИСЛОКАЦИИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ, В ДИССИПАТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ

В. В. Дежин

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. В работе изучен вклад малых изгибных колебаний бесконечной винтовой дислокации в дислокационное внутреннее трение. Рассмотрено влияние барьера Пайерлса и упругого взаимодействия с точечными дефектами, расположенными вдоль линии винтовой дислокации. Получено выражение для обобщенной восприимчивости винтовой дислокации в диссипативном кристалле с учетом рассмотренных влияний. Найдены формулы для собственной частоты изгибных колебаний винтовой дислокации и вклада изгибных колебаний в дислокационное внутреннее трение. На примере конкретного кристалла проведен вычислительный эксперимент и построены графики частотной зависимости внутреннего трения.
Ключевые слова: математическое моделирование, винтовая дислокация, изгибные колебания, электронное трение, напряжение Пайерлса, точечные дефекты, обобщенная восприимчивость, собственные колебания, внутреннее трение, вычислительный эксперимент.

Введение

Ранее вклад изгибных колебаний дислокаций в дислокационное внутреннее трение не рассматривался в связи с его малой величиной и трудностью вычисления. Учет изгибных волн выполнен в теории внутреннего трения при рассмотрении колебаний дислокационного сегмента в диссипативном кристалле (модель струны) [1]. Известно, что диссипация энергии при движении дислокаций (внутреннее трение) вызывается динамическим торможением [2], в частности при низких температурах основным механизмом является торможение электронами проводимости [3]. В реальных кристаллах необходимо учитывать влияние барьеров Пайерлса и точечных дефектов на движение дислокаций. Напряжение Пайерлса впервые теоретически исследовано в работах [4, 5] и продолжается в настоящее время [6, 7]. Известно, что дислокации собирают вокруг себя точечные дефекты (атмосфера Котрелла) [8]. Эти точечные дефекты упруго взаимодействуют с дислокациями, причем в случае винтовой дислокации возникает только короткодействующая связь вследствие размерного эффекта и модульного эффекта [9, 10]. Из-за размерного эффекта точечный дефект типа «атом замещения» притягивается к винтовой дислокации в случае $\Omega_2 > \Omega_1$, где Ω_1 — объем атома кристалла-растворителя, Ω_2 — объем атома замещения. Из-за модульного эффекта точечный дефект притягивается к винтовой дислокации в случае $\mu_2 < \mu_1$, где μ_1 — модуль сдвига кристалла-растворителя, μ_2 — модуль сдвига кристалла из атомов замещения. Это взаимодействие оказывает сопротивление движению дислокаций [11, 12] дополнительно к сопротивлению за счет барьера Пайерлса и динамическому торможению. В работах [13–15] исследовано внутреннее трение при изгибных колебаниях краевой дислокации в бездиссипативном и диссипативном кристалле и винтовой дислокации в бездиссипативном кристалле с учетом рельефа Пайерлса и взаимодействия с точечными дефектами. В настоящей работе проведем исследование внутреннего трения за счет электронного торможения изгибных колебаний винтовой дислокации с учетом рельефа Пайерлса и взаимодействия с точечными дефектами.

1. Расчет внутреннего трения для выбранной модели

Выполним математическое моделирование поставленной задачи. Проведем ось Oz вдоль равновесного положения бесконечной винтовой дислокации и предположим, что изгибные колебания винтовой дислокации происходят в плоскости xOz. Поместим четыре точечных дефекта типа «атом замещения» вокруг винтовой дислокации (рис. 1). Расстояния от винтовой дислокации до точечных дефектов $d_1 \neq d_2$ приняты с учетом реальной симметрии кристалла. На рис. 1 $\xi(z,t)$ — смещение точек винтовой дислокации во время изгибных колебаний, причем $\xi(z,t) << d_1$ и $\xi(z,t) << d_2$, так как рассматриваем малые колебания в одной долине Пайерлса.

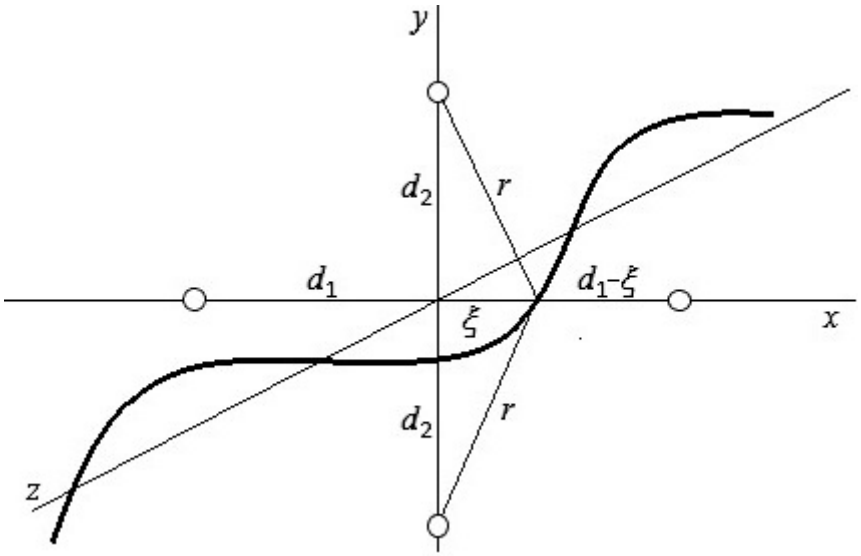


Рис. 1. Схема расположения винтовой дислокации и точечных дефектов

Энергия взаимодействия винтовой дислокации с двумя точечными дефектами, расположенными на оси Ox [9, 10]:

$$W_x = -\frac{1}{8\pi^2}\mu_1\Omega_1\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\Omega_2/\Omega_1-1)+(1-\mu_2/\mu_1)\right]b^2\left[\frac{1}{(d_1-\xi)^2}+\frac{1}{(d_1+\xi)^2}\right], \quad (1)$$

где ν — коэффициент Пуассона кристалла-растворителя, b — длина вектора Бюргерса винтовой дислокации. Энергия взаимодействия винтовой дислокации с двумя точечными дефектами, расположенными на оси Oy [9, 10]:

$$W_y = -\frac{1}{4\pi^2}\mu_1\Omega_1\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\Omega_2/\Omega_1-1)+(1-\mu_2/\mu_1)\right]\frac{b^2}{d_2^2+\xi^2}. \quad (2)$$

Общая энергия взаимодействия винтовой дислокации с четырьмя точечными дефектами $W_{xy} = W_x + W_y$. Рассмотрим четыре цепочки этих точечных дефектов параллельных оси Oz с линейной плотностью c. Энергия взаимодействия винтовой дислокации с четырьмя цепочками на единицу длины винтовой дислокации $W = cW_{xy}$. Проекция силы взаимодействия винтовой дислокации с точечными дефектами на ось Ox:

$$F(z,t) = -\frac{\partial}{\partial\xi}W \approx \frac{1}{2\pi^2}\mu_1 b^2\Omega_1 c\left(\frac{3}{d_1^4}-\frac{1}{d_2^4}\right)\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\Omega_2/\Omega_1-1)+(1-\mu_2/\mu_1)\right]\xi(z,t). \quad (3)$$

При записи приближенного выражения (3) учтены неравенства $\xi(z,t) << d_1$ и $\xi(z,t) << d_2$. Совершая Фурье-преобразование выражения (3), получим

$$F(k_z,\omega) \approx \frac{1}{2\pi^2}\mu_1 b^2\Omega_1 c\left(\frac{3}{d_1^4}-\frac{1}{d_2^4}\right)\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\Omega_2/\Omega_1-1)+(1-\mu_2/\mu_1)\right]\xi(k_z,\omega), \quad (4)$$

где k_z — компонента волнового вектора $\mathbf{k}$ вдоль линии винтовой дислокации, ω — частота изгибных колебаний винтовой дислокации. С учетом напряжения Пайерлса [13–15] и взаимодействия с точечными дефектами (4) действительная часть обратной обобщенной восприимчивости винтовой дислокации [16] в диссипативном кристалле запишется в виде

$$\operatorname{Re}\alpha^{-1}(k_z,\omega)=\pi\sigma_P-\frac{1}{2\pi^2}\mu_1 b^2\Omega_1 c\left(\frac{3}{d_1^4}-\frac{1}{d_2^4}\right)\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\Omega_2/\Omega_1-1)+(1-\mu_2/\mu_1)\right]-$$

$$-\frac{b^2\mu_1}{4\pi}\int\limits_{|k_z|}^{k_m}kdk\left[\frac{\omega^2}{s_t^2k^2}-3\frac{k_z^2}{k^2}+4\frac{k_z^2s_t^2}{s_l^2k^2}-4\frac{\omega^2\gamma_t^2}{s_t^4k^4}+\frac{1}{(s_t^2k^2-\omega^2)^2+4\omega^2\gamma_t^2}\left(\omega^4-\frac{\omega^6}{s_t^2k^2}-8\frac{\omega^4\gamma_t^2}{s_t^2k^2}-3k_z^2s_t^2\omega^2+\right.\right.$$

$$+3\frac{k_z^2\omega^4}{k^2}+4k_z^4s_t^4+4\omega^2\gamma_t^2-4\frac{k_z^4s_t^2\omega^2}{k^2}-12\frac{k_z^2\omega^4\gamma_t^2}{s_t^2k^4}+16\frac{k_z^4\omega^2\gamma_t^2}{k^4}+4\frac{\omega^6\gamma_t^2}{s_t^4k^4}+16\frac{\omega^4\gamma_t^4}{s_t^4k^4}+16\frac{k_z^4\omega^4\gamma_t^2}{s_t^2k^6}\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{(s_l^2k^2-\omega^2)^2+4\omega^2\gamma_l^2}\left(4k_z^2s_t^2\omega^2-4\frac{k_z^2s_t^2\omega^4}{s_l^2k^2}-16\frac{s_t^2k_z^2\omega^2\gamma_l^2}{s_l^2k^2}-4k_z^4s_t^2s_l^2+4\frac{k_z^4s_t^2\omega^2}{k^2}-16\frac{s_l^2k_z^2\omega^2\gamma_t^2}{s_t^2k^2}+\right.$$

$$\left.\left.+16\frac{s_l^2k_z^4\omega^2\gamma_t^2}{s_t^2k^4}+16\frac{k_z^2\omega^4\gamma_t^2}{s_t^2k^4}-16\frac{k_z^4\omega^4\gamma_t^2}{s_t^2k^6}+32\frac{k_z^2\omega^2\gamma_t\gamma_l}{k^2}-32\frac{k_z^4\omega^2\gamma_t\gamma_l}{k^4}\right)\right]. \qquad (5)$$

Здесь диссипация энергии осуществлялась торможением колебаний винтовой дислокации электронами проводимости, σ_P — напряжение Пайерлса в кристалле-растворителе, k_m — максимальное волновое число, s_t и s_l — скорости поперечных и продольных звуковых волн в кристалле-растворителе, $\gamma_t(x)$ и $\gamma_l(x)$ — коэффициенты затухания поперечных и продольных звуковых волн электронами проводимости [17, 16], $x=kl$, l — длина свободного пробега электрона. Максимальные потери энергии происходят при больших значениях частоты колебаний дислокаций [1, 18]. Так как большим значения частот ω соответствуют большие значениям k_z, то будем искать решение задачи в коротковолновой области $1<<|k_zl|<<k_ml$. Тогда для коэффициентов электронного затухания звуковых волн можно использовать приближенные выражения [16]:

$$\gamma_t(x)\approx{}^{4}\!/_{3\pi}\,\gamma^0x,\qquad \gamma_l(x)\approx{}^{\pi}\!/_{6}\,\gamma^0x, \qquad (6)$$

где γ^0 — коэффициент, зависящий от материала кристалла. Подставив выражения (6) в формулу (5) и учтя $\gamma^0l/s_t<<1$, получим для действительной части обратной обобщенной восприимчивости винтовой дислокации

$$\operatorname{Re}\alpha^{-1}(k_z,\omega)\approx\pi\sigma_P-\frac{\mu_1b^2}{2\pi^2}\Omega_1c\left(\frac{3}{d_1^4}-\frac{1}{d_2^4}\right)\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}-1\right)+\left(1-\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\right]+$$

$$+\frac{\mu_1b^2}{8\pi}\left[\left(3-4\frac{s_t^2}{s_l^2}\right)k_z^2-\frac{\omega^2}{s_t^2}\right]\ln\frac{k_m^2}{k_z^2}. \qquad (7)$$

Из решения дисперсионного уравнения $\operatorname{Re}\alpha^{-1}(k_z,\omega)=0$ найдем собственные частоты колебаний винтовой дислокации

$$\omega_0=s_t\sqrt{\frac{4\pi^2\sigma_P}{\mu_1b^2\ln(k_m/|k_z|)}-\frac{2K}{\pi\ln(k_m/|k_z|)}+(3-4\zeta)k_z^2}. \qquad (8)$$

Здесь обозначено $K=\Omega_1c\left(3/d_1^4-1/d_2^4\right)\left[(1-\nu)\left(\Omega_2/\Omega_1-1\right)/(1-2\nu)+\left(1-\mu_2/\mu_1\right)\right]$, $\zeta=s_t^2/s_l^2$.

Мнимую часть обратной обобщенной восприимчивости винтовой дислокации для коротковолновой области, учитывая $\gamma^0l/s_t<<1$, получим из результатов работы [19]

$$\operatorname{Im}\alpha^{-1}(k_z,\,\omega)\approx-B\omega-\left(\frac{2}{\pi^2}-\frac{16}{3\pi^2}\zeta+\frac{1}{3}\zeta^2\right)\frac{\mu_1}{s_t^2}b^2\gamma^0\omega|k_zl|, \qquad (9)$$

где B — коэффициент электронного торможения прямолинейной составляющей винтовой дислокации [3, 16]. Электронное торможение винтовой дислокации приводит к внутреннему трению в кристалле [18]. Используя общую формулу для потерь энергии за период колебаний [20] аналогично работам [13–15] найдем вклад в дислокационное внутреннее трение, обусловленный изгибными колебаниями винтовой дислокации:

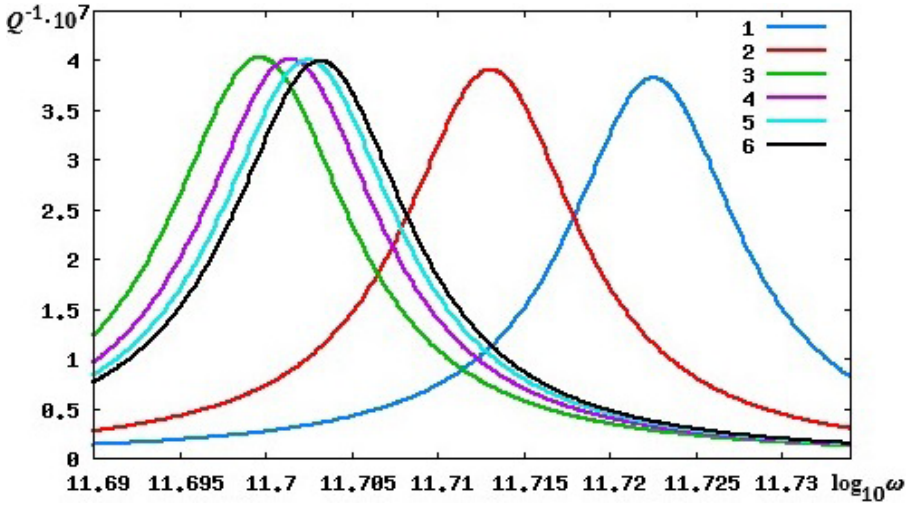
$$Q^{-1} = \frac{\rho_d \theta \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{16}{3\pi^2}\zeta + \frac{1}{3}\zeta^2 \right) \frac{b^4}{s_t^2} \gamma^0 l |k_z| \omega}{\left\{ \pi \frac{\sigma_P}{\mu_1} - \frac{b^2 K}{2\pi^2} + \frac{b^2}{4\pi} \left[(3-4\zeta)k_z^2 - \frac{\omega^2}{s_t^2} \right] \ln \frac{k_m}{|k_z|} \right\}^2 + \left\{ \frac{B}{\mu_1} + \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{16}{3\pi^2}\zeta + \frac{1}{3}\zeta^2 \right) \frac{b^2}{s_t^2} \gamma^0 l |k_z| \right\}^2 \omega^2} \quad (10)$$

Здесь ρ_d — плотность винтовых дислокаций в кристалле-растворителе, θ – ориентационный фактор винтовых дислокаций.

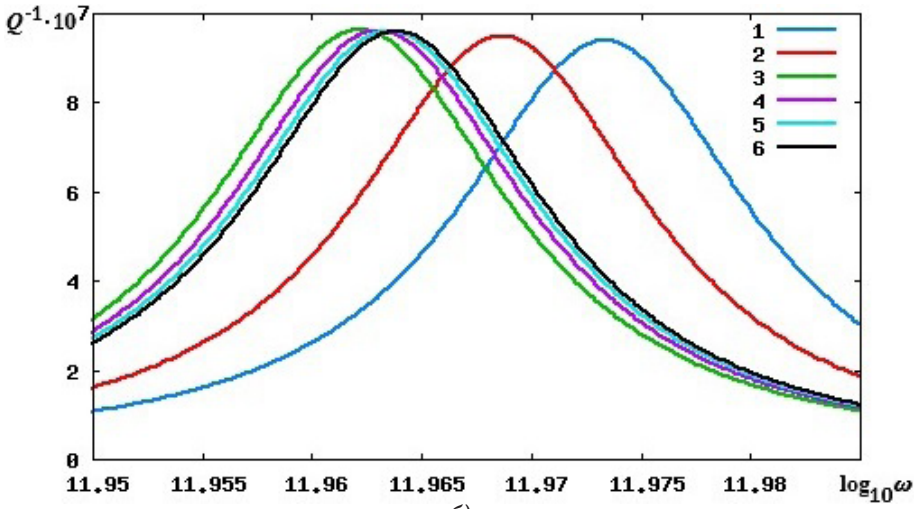
2. Результаты вычислительного эксперимента и обсуждение

Для численного расчета выберем такие материалы, чтобы точечные дефекты притягивались к винтовой дислокации. При этом желательно, чтобы кристалл-растворитель и кристалл из замещающих атомов имели одинаковую кристаллическую решетку. Записанные условия выполняются если в качестве кристалла-растворителя взять кристалл меди, а в качестве атомов замещения взять атомы алюминия. Действительно, кристаллы меди и алюминия имеют ГЦК решетку, $\Omega_1 = \Omega_{Cu} = 1.18 \cdot 10^{-29}$ м^3, $\Omega_2 = \Omega_{Al} = 1.66 \cdot 10^{-29}$ м^3, $\mu_1 = \mu_{Cu} = 4.61 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu_2 = \mu_{Al} = 2.65 \cdot 10^{10}$ Па [21, 22]. Пусть вектор Бюргерса винтовой дислокации — наименьший возможный вектор Бюргерса для полной дислокации [8]: $\mathbf{b} = (a/2)[110]$, где $a = 3.615 \cdot 10^{-10}$ м — параметр решетки кристалла меди [21, 22], тогда $b = 2.556 \cdot 10^{-10}$ м. В дальнейшем положение точечных дефектов будем выбирать в узлах кристаллической решетки с учетом выбранного направления винтовой дислокации [110] и выбранной плоскости скольжения (001). Для проведения вычислений по найденным формулам (8) и (10) запишем значения констант для кристалла меди: $\nu = 0.35$, $s_t = 2270$ м/с, $s_l = 5010$ м/с [21, 22], $\sigma_P / \mu_1 \approx 5 \cdot 10^{-4}$ [6, 7, 10], $B/\mu_1 = 8.68 \cdot 10^{-17}$ с [10], $l = 5 \cdot 10^{-7}$ м [23], $\gamma^0 = 3.9 \cdot 10^8$ с$^{-1}$ [16]. Также принимаем значения $k_m = 10^{10}$ м$^{-1}$, $\rho_d = 10^{10}$ м$^{-2}$, $\theta = 0.5$.

По формуле (10) вычисляем внутреннее трение и строим графики частотной зависимости $Q^{-1}(\omega)$ при $k_z = 2 \cdot 10^7$ м$^{-1}$ (рис. 2, а) и $k_z = 2 \cdot 10^8$ м$^{-1}$ (рис. 2, б) для различных значений d_1, d_2, c. С помощью этих графиков и численных расчетов находим частоты ω_m, соответствующие максимальным значениям внутреннего трения.



а)



б)

Рис. 2. Частотная зависимость внутреннего трения при $k_z = 2\cdot 10^7$ *м*$^{-1}$ *(а) и* $k_z = 2\cdot 10^8$ *м*$^{-1}$ *(б) для различных значений* d_1, d_2, c: ***1*** — $d_1 = 2b = 5.112\cdot 10^{-10}$ *м*, $d_2 = a = 3.615\cdot 10^{-10}$ *м*, $c = 2\cdot 10^8$ *м*$^{-1}$; ***2*** — $d_1 = 2b = 5.112\cdot 10^{-10}$ *м*, $d_2 = a = 3.615\cdot 10^{-10}$ *м*, $c = 10^8$ *м*$^{-1}$; ***3*** — $d_1 = 3b = 7.669\cdot 10^{-10}$ *м*, $d_2 = 2a = 7.230\cdot 10^{-10}$ *м*, $c = 10^8$ *м*$^{-1}$; ***4*** — $d_1 = 3b = 7.669\cdot 10^{-10}$ *м*, $d_2 = 2a = 7.230\cdot 10^{-10}$ *м*, $c = 5\cdot 10^7$ *м*$^{-1}$; ***5*** — $d_1 = 4b = 1.0225\cdot 10^{-9}$ *м*, $d_2 = 3a = 1.0845\cdot 10^{-9}$ *м*, $c = 5\cdot 10^7$ *м*$^{-1}$; ***6*** — $c = 0$

По формуле (8) находим собственные частоты изгибных колебаний винтовой дислокации ω_0 при $k_z = 2\cdot 10^7$ м$^{-1}$ и $k_z = 2\cdot 10^8$ м$^{-1}$ для различных значений d_1, d_2, c. Результаты вычислений ω_m и ω_0 помещаем в табл. 1.

Таблица 1

Значения частот ω_0 *и* ω_m *при различных* d_1, d_2, c

d_1, м	d_2, м	c, м$^{-1}$	$k_z = 2\cdot 10^7$, м$^{-1}$		$k_z = 2\cdot 10^8$, м$^{-1}$	
			ω_0, рад/с	ω_m, рад/с	ω_0, рад/с	ω_m, рад/с
$5.112\cdot 10^{-10}$	$3.615\cdot 10^{-10}$	$2\cdot 10^8$	$5.2802\cdot 10^{11}$	$5.2796\cdot 10^{11}$	$9.4067\cdot 10^{11}$	$9.4037\cdot 10^{11}$
$5.112\cdot 10^{-10}$	$3.615\cdot 10^{-10}$	10^8	$5.1661\cdot 10^{11}$	$5.1654\cdot 10^{11}$	$9.3056\cdot 10^{11}$	$9.3025\cdot 10^{11}$
$7.669\cdot 10^{-10}$	$7.230\cdot 10^{-10}$	10^8	$5.0089\cdot 10^{11}$	$5.0084\cdot 10^{11}$	$9.1680\cdot 10^{11}$	$9.1664\cdot 10^{11}$
$7.669\cdot 10^{-10}$	$7.230\cdot 10^{-10}$	$5\cdot 10^7$	$5.0293\cdot 10^{11}$	$5.0292\cdot 10^{11}$	$9.1857\cdot 10^{11}$	$9.1833\cdot 10^{11}$
$1.0225\cdot 10^{-9}$	$1.0845\cdot 10^{-9}$	$5\cdot 10^7$	$5.0414\cdot 10^{11}$	$5.0408\cdot 10^{11}$	$9.1962\cdot 10^{11}$	$9.1939\cdot 10^{11}$
—	—	0	$5.0495\cdot 10^{11}$	$5.0489\cdot 10^{11}$	$9.2033\cdot 10^{11}$	$9.2003\cdot 10^{11}$

Соответствующие значения частот ω_0 и ω_m очень близки (табл. 1), что свидетельствует о резонансном типе пиков внутреннего трения на рис. 2. Малая разница частот $\omega_0 - \omega_m > 0$ связана с малым затуханием изгибных колебаний винтовой дислокации. На рис. 2 кривые расположены близко друг от друга по частоте, так как влияние точечных дефектов очень мало. Это объясняется их противоположным воздействием на винтовую дислокацию. Действие точечных дефектов, лежащих в плоскости xOz, при $\xi(z,t) \neq 0$ приводит к увеличению смещения винтовой дислокации. Действие точечных дефектов, лежащих в плоскости yOz, приводит к уменьшению смещения винтовой дислокации из положения равновесия. Если суммарное воздействие точечных дефектов стремится вернуть винтовую дислокацию в равновесное положение (кривые 1 и 2 на рис. 2), то эффективное напряжение Пайерлса увеличивается. Если суммарное воздействие точечных дефектов стремится вывести винтовую дислокацию из равновесного положения (кривые 3–5 на рис. 2), то эффективное напряжение Пайерлса умень-

шается. При увеличении расстояния между цепочками точечных дефектов и винтовой дислокацией, а также при уменьшении линейной плотности точечных дефектов кривые на рис. 2 приближаются к кривой 6 (случай отсутствия точечных дефектов). Из табл. 1 видно, что при увеличении эффективного напряжения Пайерлса частоты ω_0 и ω_m (строки 1 и 2) больше соответствующих частот для случая отсутствия точечных дефектов (строка 6). При уменьшении эффективного напряжения Пайерлса частоты ω_0 и ω_m (строки 3–5) меньше соответствующих частот для случая отсутствия точечных дефектов (строка 6). При уменьшении длины изгибной волны винтовой дислокации (увеличении k_z) кривые смещаются вправо по частоте (рис. 2, б). Соответственно увеличиваются значения частот ω_0 и ω_m. Это объясняется увеличением линейного натяжения дислокационной линии, что приводит к увеличению эффективного напряжения Пайерлса. Увеличение линейного натяжения дислокационной линии приводит также к уменьшению амплитуды колебаний, следовательно, должно уменьшаться внутреннее трение. Но, как видно из рис. 2, внутреннее трение увеличивается. Это несоответствие объясняется тем, что в статье находится вклад изгибных колебаний в дислокационное внутреннее трение. Поэтому в числителе формулы (10) стоит выражение, связанное с затуханием изгибных колебаний винтовой дислокации, а в знаменателе стоит сумма выражений, обусловленных затуханием прямолинейной составляющей и изгибных колебаний дислокации. Слагаемое, обусловленное затуханием прямолинейной составляющей, является преобладающим при рассмотренных значениях k_z, поэтому поведение выражения (10) при возрастании k_z определяется числителем.

Заключение

В результате проведения математического моделирования вклада изгибных колебаний винтовой дислокации в дислокационное внутреннее трение, обусловленное электронным торможением, и вычислительного эксперимента установлено следующее:

- пики частотной зависимости имеют резонансный тип;
- вклад изгибных колебаний винтовой дислокации в дислокационное внутреннее трение очень мал;
- при рассмотренном выборе расположения точечных дефектов их суммарное влияние на внутреннее трение мало вследствие их разнонаправленного действия на винтовую дислокацию;
- при уменьшении плотности точечных дефектов и увеличении расстояния между ними и винтовой дислокацией кривые частотной зависимости внутреннего трения асимптотически приближаются к предельной кривой (случай $c = 0$), при этом высота пиков практически не изменяется;
- действие точечных дефектов на винтовую дислокацию может увеличивать или уменьшать эффективное напряжение Пайерлса в зависимости от рассматриваемых значений d_1 и d_2, при этом частоты ω_0 и ω_m соответственно увеличиваются или уменьшаются;
- при рассмотренных значениях k_z их увеличение приводит к росту пиков внутреннего трения и смещению вправо по частоте.

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории колебаний дислокаций и дислокационного внутреннего трения в реальных кристаллах.

Литература

1. *Granato A. V.* Theory of mechanical damping due to dislocations / A. V. Granato, K. Lucke // J. Appl. Phys. – 1956. –V. 27. – P. 583–593.

2. *Alshits V. I.* Mechanisms of dislocation drag / V. I. Alshits, V. L. Indenbom // Dislocations in solids. V. 7 / ed. F. R. N. Nabarro. – Amsterdam: Elsevier, 1986. – P. 43–111.

3. *Каганов М. И.* Электронное торможение дислокаций в металлах / М. И. Каганов, В. Я. Кравченко, В. Д. Нацик // Успехи физических наук. – 1973. – Т. 111, № 4. – С. 655–682.

4. *Peierls R. E.* The size of a dislocation / R. E. Peierls // Proc. Phys. Soc. – 1940. – V. 52. – P. 34–38.

5. *Nabarro F. R. N.* Dislocations in a simple cubic lattice / F. R. N. Nabarro // Proc. Phys. Soc. – 1947. – V. 59. – P. 256–272.

6. *Shin I.* Possible origin of the discrepancy in Peierls stresses of fcc metals: first-principles simulations of dislocation mobility in aluminum / I. Shin, E. A. Carter // Phys. Rev. B. – 2013. – V. 88. – P. 064106.

7. Comparative modeling of the disregistry and Peierls stress for dissociated edge and screw dislocations in Al / S. Xu, J. R. Mianroodi, A. Hunter [et al.] // Int. J. Plasticity. – 2020. – V. 129. – P. 102689.

8. *Хирт Дж.* Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М.: Атомиздат, 1972. – 600 с.

9. *Nabarro F. R. N.* Solution and precipitation hardening / F. R. N. Nabarro // The physics of metals. V. 2 / ed. by P. B. Hirsch. – Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1975. – P. 152–188.

10. *Судзуки Т.* Динамика дислокаций и пластичность / Т. Судзуки, Х. Есинага, С. Такеути. – М. : Мир, 1989. – 296 с.

11. *Gremaud G.* Dislocation-point defect interactions / G. Gremaud // Materials Science Forum. – 2001. – V. 366. – P. 178–246.

12. *Малашенко В. В.* Коллективное преодоление дислокациями точечных дефектов в динамической области / В. В. Малашенко // Физика твердого тела. – 2014. – Т. 56, № 8. – С. 1528–1530.

13. *Дежин В. В.* Математическое моделирование внутреннего трения при изгибных колебаниях краевой дислокации, взаимодействующей с точечными дефектами, в бездиссипативном кристалле / В. В. Дежин // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4–6 декабря 2023 г. – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 420–425.

14. *Dezhin V. V.* Internal friction due to electron braking of edge dislocation bending vibrations when interacting with point defects / V. V. Dezhin // AIP Conf. Proc. – 2024. – V. 3154. – P. 020027.

15. *Dezhin V. V.* Internal friction during screw dislocation bending vibrations in the Peierls relief when interacting with point defects in non-dissipative crystal / V. V. Dezhin // AIP Conf. Proc. – 2024. – V. 3154. – P. 020026.

16. *Рощупкин А. М.* Обобщенная восприимчивость дислокации в диссипативном кристалле / А. М. Рощупкин, И. Л. Батаронов, В. В. Дежин // Известия РАН. Серия физическая. – 1995. – Т. 59, № 10. – С. 12–16.

17. *Kittel Ch.* Quantum theory of solids / Ch. Kittel. – New York: Wiley, 1987. – 516 p.

18. Internal friction in metallic materials / M. S. Blanter, I. S. Golovin, H. Neuhäuser, H.-R. Sinning. – Berlin: Springer-Verlag, 2007. – 539 p.

19. *Dezhin V. V.* On damping of screw dislocation bending vibrations in dissipative crystal: limiting cases / V. V. Dezhin // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2018. – V. 327. – P. 032017.

20. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика. Т. V. Статистическая физика. Ч. I. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2002. – 616 с.

21. Свойства элементов. Ч. 1. Физические свойства // под ред. Г. В. Самсонова. – М.: Металлургия, 1976. – 600 с.

22. CRC handbook of chemistry and physics // ed. by W. M. Haynes. – Boca Raton: Taylor & Francis, 2014. – 2663 p.

23. *Gall D.* Electron mean free path in elemental metals / D. Gall // J. Appl. Phys. – 2016. – V. 119. – P. 085101.

УДК 004.021

МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ НА БАЗЕ ОПЕРАТОРОВ ГЕЙЗЕНБЕРГА — ВЕЙЛЯ И ПАУЛИ КАК СПОСОБ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОСТОЯНИЙ МНОГОУРОВНЕВЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Л. А. Демидова, В. В. Масленников

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В статье рассматривается уникальный подход к преобразованию состояний многоуровневых квантовых систем любой размерности на основе матрицы плотности с использованием операторов Гейзенберга — Вейля и Паули. Представлено математическое описание метода, а также приведён пример с представлением куквинта в форме сферообразной геометрической конструкции Блоха. Преимущество метода рассматривается с точки зрения отсутствия альтернатив и доступности его реализации как в средах физического и виртуального квантового вычислительного устройства, так и в условиях проведения вычислений с квантово-инспирированным подходом.
Ключевые слова: квантовые вычисления, кудит, квантовая система, сфера Блоха, матрица плотности, операторы Гейзенберга — Вейля, операторы Паули, квантовый вентиль, унитарная операция, комплексное пространство.

Введение

Квантовые вычисления являются альтернативой классическим вычислениям и представляют собой междисциплинарную область, состоящую из множества различных аспектов таких предметных областей, как компьютерные науки, физика и математика. Такие вычисления в своей основе используют явления квантовой механики, что позволяет ускорить решение существующих сложных задач или получить результаты при выполнении трудноразрешимых задач, которые недоступны для реализации на классических вычислительных устройствах ввиду ограниченности как технических, так и технологических возможностей человечества на текущий момент времени. Квантовые вычисления осуществляются благодаря физическим или виртуальным квантовым вычислительным устройствам, которые функционируют на базе квантовых принципов и концепций, где для выполнения операций применяется квантовый бит или кубит — основная единица квантовой информации.

Кубит в рамках физического квантового вычислительного устройства является квантовой частицей, которая представляет собой перехваченный ион или фотон как реальных или искусственных атомов, так и квазичастиц [1]. При этом кубит может принимать значения ноль, единицу и множество других промежуточных значений с определёнными вероятностями, что достигается за счёт эффекта суперпозиции базисных состояний кубита. Для изменения состояний кубита существует большое количество различных квантовых вентилей — логических элементов квантового компьютера, осуществляющих преобразование входных состояний кубита в выходные в соответствии с квантовыми законами.

Кроме кубита также существует альтернативная единица квантовой информации, которая представляет собой многоуровневую квантовую систему, называемую кудитом [2]. Однако в связи с невозможностью представления кудита в виде сферы Блоха в явном виде и, как следствие, с отсутствием достаточного количества соответствующих кудиту квантовых вентилей, выполнение преобразования его состояний является сложной задачей.

В данной работе предлагается метод преобразования состояний многоуровневых квантовых систем на основе матрицы плотности с применением операторов Гейзенберга — Вейля и Паули, ориентированный на работу с кудитом любой размерности.

Описание метода

Дадим определение термину «кудит». **Кудит** — квантовая система в d-мерном состоянии, которое описывается вектором в d-мерном Гильбертовом пространстве H_d. Пространство данной квантовой системы состоит из множества ортонормированных базисных векторов $\{|0\rangle,|1\rangle,|2\rangle,|3\rangle,\ldots,|d-1\rangle\}$, а общий вид состояния кудита выражается в форме:

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \alpha_2|2\rangle + \alpha_3|3\rangle + \ldots + \alpha_{d-1}|d-1\rangle = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{d-1}) \in \mathbb{C}^d, \quad (1)$$

где $|\psi\rangle$ — квантовая система, находящаяся одновременно в более, чем двух состояниях, а $\alpha_0 \ldots \alpha_{d-1}$ — амплитуды вероятностей при $\alpha_0 \ldots \alpha_{d-1} \in \mathbb{C}^d$ и $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + \ldots + |\alpha_{d-1}|^2 = 1$.

В случае с кубитом его состояние формируется за счёт вращений сферы Блоха в соответствии с унитарными операциями при соблюдении условия $U^\dagger U = UU^\dagger = E, U^{-1} = U^\dagger$, где U — ограниченный линейный оператор, $U^\dagger$ — эрмитово-сопряжённый к U оператор, E — единичная матрица. Однако для описания состояния высокой размерности $d \geq 3$ использование сферы Блоха в явном виде не представляется возможным. По этой причине для кудита предлагается использовать альтернативный подход, заключающийся в применении операторов Гейзенберга — Вейля [3].

Базис операторов Гейзенберга — Вейля определяется как

$$\left\{U_{00} = E, U_{pq} = \omega^{-\frac{pq}{2}} Q_d |p\rangle P_d |q\rangle, \left(p,q = \overline{0,d-1}\right)\right\},$$

где унитарный оператор U_{pq} формируется на основе операторов Q_d, P_d, которые соответствуют классическим операторам поворота Паули Z и X. Тогда используя базис Гейзенберга — Вейля, разложение ограниченного оператора матрицы плотности в $\mathbb{C}^d$ [4] можно задать следующей формулой:

$$\rho = \frac{1}{d}\sum_{p=q=0}^{d-1} b_{pq}U_{pq} = \frac{1}{d}\left(E + \sum_{p\neq 0, q\neq 0} b_{pq}U_{pq}\right) = \frac{1}{d}\left(E + \sum_{p\neq 0, q\neq 0} b_{pq}\omega^{-\frac{pq}{2}} Q_d|p\rangle P_d|q\rangle\right) = \quad (2)$$

$$= \frac{1}{d}\left(E + \sum_{p\neq 0, q\neq 0} b_{pq} e^{-\frac{i\pi pq}{d}} Q_d|p\rangle P_d|q\rangle\right) = \frac{1}{d}\left(E + \sum_{p\neq 0, q\neq 0} b_{pq}(-1)^{-\frac{pq}{d}} Q_d|p\rangle P_d|q\rangle\right),$$

где ρ — матрица плотности, описывающая состояние квантовой системы, состоящей из кудита размерности d, $\omega := e^{\frac{2i\pi}{d}}$, $e^{i\pi} = -1$ согласно тождеству Эйлера, $b_{00} = 1$ и $b_{pq} = \mathrm{tr}\left(\rho U_{pq}^\dagger\right)$ формируют компоненты вектора Блоха. При этом получившаяся сферообразная геометрическая конструкция Блоха принадлежит пространству $\mathbb{R}^{(d^2-1)/2}$ при $d \in \mathbb{P}$ и пространству $\mathbb{R}^{(d^2+2)/2}$ в случае $d \notin \mathbb{P}$.

Операторы Паули P_d и Q_d определяются как:

$$P_d|q\rangle = |(q+1) \bmod d\rangle, \quad (3)$$

$$Q_d|p\rangle = \omega_d^p|p\rangle = (-1)^{\frac{2p}{d}}|p\rangle, \quad (4)$$

где $\bmod d$ — конгруэнтность по модулю d на множестве $\mathbb{Z}$.

Приведём пример представления куквинта $(d=5)$ в виде сферообразной конструкции Блоха пространства $\mathbb{R}^{12}$, используя разложение (2):

$$\rho = \frac{1}{5}(E + b_{01}U_{01} + b_{02}U_{02} + b_{03}U_{03} + b_{04}U_{04} + b_{10}U_{10} + b_{11}U_{11} + b_{12}U_{12} + b_{13}U_{13} +$$
$$+ b_{14}U_{14} + b_{20}U_{20} + b_{21}U_{21} + b_{22}U_{22} + b_{23}U_{23} + b_{24}U_{24} + b_{30}U_{30} + b_{31}U_{31} + b_{32}U_{32} +$$
$$+ b_{33}U_{33} + b_{34}U_{34} + b_{40}U_{40} + b_{41}U_{41} + b_{42}U_{42} + b_{43}U_{43} + b_{44}U_{44}). \quad (5)$$

Необходимо отметить, что согласно свойству $\rho^{\dagger}=\rho$ коэффициенты b_{pq} подчиняются следующим соотношениям:

$$b_{10}=n_1e^{\mathrm{i}\theta_1},b_{40}=n_1e^{-\mathrm{i}\theta_1},b_{20}=n_2e^{\mathrm{i}\theta_2},b_{30}=n_2e^{-\mathrm{i}\theta_2},$$
$$b_{01}=n_3e^{\mathrm{i}\theta_3},b_{04}=n_3e^{-\mathrm{i}\theta_3},b_{02}=n_4e^{\mathrm{i}\theta_4},b_{03}=n_4e^{-\mathrm{i}\theta_4},$$
$$b_{11}=n_5e^{\mathrm{i}\theta_5},b_{44}=n_5e^{-\mathrm{i}\theta_5},b_{23}=n_6e^{\mathrm{i}\theta_6},b_{32}=n_6e^{-\mathrm{i}\theta_6},$$
$$b_{12}=n_7e^{\mathrm{i}\theta_7},b_{43}=n_7e^{-\mathrm{i}\theta_7},b_{21}=n_8e^{\mathrm{i}\theta_8},b_{34}=n_8e^{-\mathrm{i}\theta_8},$$
$$b_{13}=n_9e^{\mathrm{i}\theta_9},b_{42}=n_9e^{-\mathrm{i}\theta_9},b_{24}=n_{10}e^{\mathrm{i}\theta_{10}},b_{31}=n_{10}e^{-\mathrm{i}\theta_{10}},$$
$$b_{14}=n_{11}e^{\mathrm{i}\theta_{11}},b_{41}=n_{11}e^{-\mathrm{i}\theta_{11}},b_{22}=n_{12}e^{\mathrm{i}\theta_{12}},b_{33}=n_{12}e^{-\mathrm{i}\theta_{12}}, \quad (6)$$

где $n_i,\theta_i\in\mathbb{R}$.

Окончательное представление куквинта в форме матрицы плотности осуществляется за счёт вынесения в (5) общих множителей, применения унитарного оператора $U_{pq}=(-1)^{-\frac{pq}{d}}Q_d\left|p\right\rangle P_d\left|q\right\rangle$ с раскрытием $P_d\left|q\right\rangle$ и $Q_d\left|p\right\rangle$ через (3) и (4), и подстановки (6) в (5):

$$\rho=\frac{1}{5}(E+n_1e^{\mathrm{i}\theta_1}U_{10}+n_1e^{-\mathrm{i}\theta_1}U_{40}+n_2e^{\mathrm{i}\theta_2}U_{20}+n_2e^{-\mathrm{i}\theta_2}U_{30}+n_3e^{\mathrm{i}\theta_3}U_{01}+$$
$$+n_3e^{-\mathrm{i}\theta_3}U_{04}+n_4e^{\mathrm{i}\theta_4}U_{02}+n_4e^{-\mathrm{i}\theta_4}U_{03}+n_5e^{\mathrm{i}\theta_5}U_{11}+n_5e^{-\mathrm{i}\theta_5}U_{44}+n_6e^{\mathrm{i}\theta_6}U_{23}+$$
$$+n_6e^{-\mathrm{i}\theta_6}U_{32}+n_7e^{\mathrm{i}\theta_7}U_{12}+n_7e^{-\mathrm{i}\theta_7}U_{43}+n_8e^{\mathrm{i}\theta_8}U_{21}+n_8e^{-\mathrm{i}\theta_8}U_{34}+n_9e^{\mathrm{i}\theta_9}U_{13}+$$
$$+n_9e^{-\mathrm{i}\theta_9}U_{42}+n_{10}e^{\mathrm{i}\theta_{10}}U_{24}+n_{10}e^{-\mathrm{i}\theta_{10}}U_{31}+n_{11}e^{\mathrm{i}\theta_{11}}U_{14}+n_{11}e^{-\mathrm{i}\theta_{11}}U_{41}+$$
$$+n_{12}e^{\mathrm{i}\theta_{12}}U_{22}+n_{12}e^{-\mathrm{i}\theta_{12}}U_{33})=\frac{1}{5}(E+n_1\left(e^{\mathrm{i}\theta_1}U_{10}+e^{-\mathrm{i}\theta_1}U_{40}\right)+$$
$$+n_2\left(e^{\mathrm{i}\theta_2}U_{20}+e^{-\mathrm{i}\theta_2}U_{30}\right)+n_3\left(e^{\mathrm{i}\theta_3}U_{01}+e^{-\mathrm{i}\theta_3}U_{04}\right)+n_4\left(e^{\mathrm{i}\theta_4}U_{02}+e^{-\mathrm{i}\theta_4}U_{03}\right)+$$
$$+n_5\left(e^{\mathrm{i}\theta_5}U_{11}+e^{-\mathrm{i}\theta_5}U_{44}\right)+n_6\left(e^{\mathrm{i}\theta_6}U_{23}+e^{-\mathrm{i}\theta_6}U_{32}\right)+n_7\left(e^{\mathrm{i}\theta_7}U_{12}+e^{-\mathrm{i}\theta_7}U_{43}\right)+$$
$$+n_8\left(e^{\mathrm{i}\theta_8}U_{21}+e^{-\mathrm{i}\theta_8}U_{34}\right)+n_9\left(e^{\mathrm{i}\theta_9}U_{13}+e^{-\mathrm{i}\theta_9}U_{42}\right)+n_{10}\left(e^{\mathrm{i}\theta_{10}}U_{24}+e^{-\mathrm{i}\theta_{10}}U_{31}\right)+$$
$$+n_{11}\left(e^{\mathrm{i}\theta_{11}}U_{14}+e^{-\mathrm{i}\theta_{11}}U_{41}\right)+n_{12}\left(e^{\mathrm{i}\theta_{12}}U_{22}+e^{-\mathrm{i}\theta_{12}}U_{33}\right))=$$
$$=\frac{1}{5}(E+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_1\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_1}\left(-1\right)^{-\frac{1*0}{5}}Q_5\left|1\right\rangle P_5\left|0\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_1}\left(-1\right)^{-\frac{4*0}{5}}Q_5\left|4\right\rangle P_5\left|0\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_2\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_2}\left(-1\right)^{-\frac{2*0}{5}}Q_5\left|2\right\rangle P_5\left|0\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_2}\left(-1\right)^{-\frac{3*0}{5}}Q_5\left|3\right\rangle P_5\left|0\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_3\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_3}\left(-1\right)^{-\frac{0*1}{5}}Q_5\left|0\right\rangle P_5\left|1\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_3}\left(-1\right)^{-\frac{0*4}{5}}Q_5\left|0\right\rangle P_5\left|4\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_4\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_4}\left(-1\right)^{-\frac{0*2}{5}}Q_5\left|0\right\rangle P_5\left|2\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_4}\left(-1\right)^{-\frac{0*3}{5}}Q_5\left|0\right\rangle P_5\left|3\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_5\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_5}\left(-1\right)^{-\frac{1*1}{5}}Q_5\left|1\right\rangle P_5\left|1\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_5}\left(-1\right)^{-\frac{4*4}{5}}Q_5\left|4\right\rangle P_5\left|4\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_6\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_6}\left(-1\right)^{-\frac{2*3}{5}}Q_5\left|2\right\rangle P_5\left|3\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_6}\left(-1\right)^{-\frac{3*2}{5}}Q_5\left|3\right\rangle P_5\left|2\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_7\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_7}\left(-1\right)^{-\frac{1*2}{5}}Q_5\left|1\right\rangle P_5\left|2\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_7}\left(-1\right)^{-\frac{4*3}{5}}Q_5\left|4\right\rangle P_5\left|3\right\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}\left(\rho H_8\right)}{2}\left(e^{\mathrm{i}\theta_8}\left(-1\right)^{-\frac{2*1}{5}}Q_5\left|2\right\rangle P_5\left|1\right\rangle+e^{-\mathrm{i}\theta_8}\left(-1\right)^{-\frac{3*4}{5}}Q_5\left|3\right\rangle P_5\left|4\right\rangle\right)+$$

$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_9)}{2}\left(e^{i\theta_9}(-1)^{-\frac{1*3}{5}}Q_5|1\rangle P_5|3\rangle+e^{-i\theta_9}(-1)^{-\frac{4*2}{5}}Q_5|4\rangle P_5|2\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_{10})}{2}\left(e^{i\theta_{10}}(-1)^{-\frac{2*4}{5}}Q_5|2\rangle P_5|4\rangle+e^{-i\theta_{10}}(-1)^{-\frac{3*1}{5}}Q_5|3\rangle P_5|1\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_{11})}{2}\left(e^{i\theta_{11}}(-1)^{-\frac{1*4}{5}}Q_5|1\rangle P_5|4\rangle+e^{-i\theta_{11}}(-1)^{-\frac{4*1}{5}}Q_5|4\rangle P_5|1\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_{12})}{2}\left(e^{i\theta_{12}}(-1)^{-\frac{2*2}{5}}Q_5|2\rangle P_5|2\rangle+e^{-i\theta_{12}}(-1)^{-\frac{3*3}{5}}Q_5|3\rangle P_5|3\rangle\right))=$$
$$=\frac{1}{5}(E+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_1)}{2}\left(e^{i\theta_1}(-1)^{\frac{2}{5}}|1\rangle|1\rangle+e^{-i\theta_1}(-1)^{\frac{8}{5}}|4\rangle|1\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_2)}{2}\left(e^{i\theta_2}(-1)^{\frac{4}{5}}|2\rangle|1\rangle+e^{-i\theta_2}(-1)^{\frac{6}{5}}|3\rangle|1\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_3)}{2}\left(e^{i\theta_3}|0\rangle|2\rangle+e^{-i\theta_3}|0\rangle|0\rangle\right)+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_4)}{2}\left(e^{i\theta_4}|0\rangle|3\rangle+e^{-i\theta_4}|0\rangle|4\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_5)}{2}\left(e^{i\theta_5}(-1)^{\frac{1}{5}}|1\rangle|2\rangle+e^{-i\theta_5}(-1)^{-\frac{8}{5}}|4\rangle|0\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_6)}{2}\left(e^{i\theta_6}(-1)^{-\frac{2}{5}}|2\rangle|4\rangle+e^{-i\theta_6}|3\rangle|3\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_7)}{2}\left(e^{i\theta_7}|1\rangle|3\rangle+e^{-i\theta_7}(-1)^{-\frac{4}{5}}|4\rangle|4\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_8)}{2}\left(e^{i\theta_8}(-1)^{\frac{2}{5}}|2\rangle|2\rangle+e^{-i\theta_8}(-1)^{-\frac{6}{5}}|3\rangle|0\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_9)}{2}\left(e^{i\theta_9}(-1)^{-\frac{1}{5}}|1\rangle|4\rangle+e^{-i\theta_9}|4\rangle|3\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_{10})}{2}\left(e^{i\theta_{10}}(-1)^{-\frac{4}{5}}|2\rangle|0\rangle+e^{-i\theta_{10}}(-1)^{\frac{3}{5}}|3\rangle|2\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_{11})}{2}\left(e^{i\theta_{11}}(-1)^{-\frac{2}{5}}|1\rangle|0\rangle+e^{-i\theta_{11}}(-1)^{\frac{4}{5}}|4\rangle|2\rangle\right)+$$
$$+\frac{\mathrm{tr}(\rho H_{12})}{2}\left(e^{i\theta_{12}}|2\rangle|3\rangle+e^{-i\theta_{12}}(-1)^{-\frac{3}{5}}|3\rangle|4\rangle\right))=\frac{1}{5}\left(E+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{12}\mathrm{tr}(\rho H_i)H_i\right),\qquad(7)$$

где $n_i=\frac{\mathrm{tr}(\rho H_i)}{2}$, $H_i=e^{i\theta_i}(-1)^{-\frac{p*q}{5}}Q_5|p\rangle P_5|q\rangle+e^{-i\theta_i}(-1)^{-\frac{p*q}{5}}Q_5|p\rangle P_5|q\rangle$ — эрмитова матрица, θ_i — угол поворота.

Угол поворота θ определяется в зависимости от специфики конкретной решаемой задачи или от окружающих условий, в которых, например, существует физическое квантовое вычислительное устройство. Так, в [5] авторы предлагаемого исследования разработали новый квантово-инспирированный генетический алгоритм численной оптимизации на основе кудита в условиях имитации квантовой декогеренции. В своём исследовании авторы рассматривают квантовую декогеренцию в контексте влияния различных шумов (внешних флуктуаций) на кудит как виртуальную квантовую систему любой размерности. Поскольку физические величины, которые подвергаются влиянию множества случайных помех, строго подчиняются нормальному распределению, моделирование воздействия шумов на виртуальную квантовую си-

стему реализуется с точки зрения использования нормальной случайно величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, то есть $\theta = \tau * \xi$, где τ — уровень ошибки, $\xi \sim N(0,1)$.

Заключение

В работе рассмотрен метод преобразования состояний многоуровневых квантовых систем на базе матрицы плотности с применением операторов Гейзенберга — Вейля и Паули. Матрица плотности и операторы Гейзенберга — Вейля позволяют представить кудит любой размерности в форме сферообразной геометрической конструкции Блоха, а изменение состояний кудита осуществляется за счёт дополнительного использования модифицированных операторов Паули, выполняющих вращение сферообразной геометрической конструкции Блоха на заданный угол. Преимущество метода заключается в доступности его реализации как в средах физического и виртуального квантового вычислительного устройства, так и в условиях проведения вычислений с квантово-инспирированным подходом. Также стоит отметить, что на сегодняшний день отсутствуют альтернативные подходы к преобразованию состояний многоуровневых квантовых систем.

Литература

1. *Моисеев С. А.* Квантовый компьютер в схеме атомного квантового транзистора с логическим кодированием кубитов / С. А. Моисеев, С. Н. Андрианов, Е. С. Моисеев // Оптика и спектроскопия. – 2013. – Т. 115, № 3. – С. 406. – DOI 10.7868/S0030403413090171. – EDN QYXHNL.

2. Qudits and High-Dimensional Quantum Computing / Y. Wang, Z. Hu, S. Kais, B. C. Sanders // Frontiers in Physics. – 2020. – Vol. 8. – P. 589504. – DOI 10.3389/fphy.2020.589504. – EDN YDPEGN.

3. *Sharma G., Ghosh S.* Four-dimensional Bloch sphere representation of qutrits using Heisenberg-Weyl Operators. – 2021.

4. *Asadian A., Erker P., Huber M., Klöckl C.* Heisenberg-Weyl Observables: Bloch vectors in phase space. Physical Review A. – 2016. – 94. 10.1103/PhysRevA.94.010301.

5. *Maslennikov V. V., Demidova L. A.* Modification of a Quantum-inspired Genetic Algorithm for Numerical Optimization Using Qudit under Conditions of Simulating Quantum Decoherence. Computational Nanotechnology. – 2024. – Vol. 11, No 2. – P. 58–85. (In Rus.). DOI: 10.33693/2313-223X-2024-11-2-58-85. EDN: MRWGYA

УДК 004.942

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАЗМЕРА НАНОКРИСТАЛЛА СЕРЕБРА НА ЕГО ПРОСТРАНСТВЕННУЮ СТРУКТУРУ В РАМКАХ МОДЕЛИ САТТОНА — ЧЕНА

О. Г. Деста[1], М. И. Быкова[2], Ю. К. Тимошенко[2]

[1]Mai-Nefhi College of Science, Asmara, Eritrea
[2]Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе методом молекулярной динамики в рамках полуэмпирической математической модели Саттона — Чена выполнен численный анализ влияния размера нанокристалла серебра на его пространственную структуру в центральной области. Рассматривались нанокристаллы, содержащие 14, 172, 424, 666 и 1688 атомов. Предложен подход анализа пространственной структуры нанокристалла на основе расчета положений атомов в пространстве относительно центра масс.
Ключевые слова: нанокристалл, серебро, математическая модель, Саттон —Чен, метод молекулярной динамики.

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию наносистем в связи с довольно широким их применением в науке и технике. Количество задач, связанных с этими системами, возрастает с каждым годом. Очевидно, что форма и протяженность наносистем (система называется наноразмерной, если её протяженность хотя бы в одном пространственном направлении находится в интервале 1 ÷ 100 нм) влияют на физико–химические свойства. В данной работе численно исследуется влияние размера нанокристаллов кубической формы на положения атомов в пространстве. Когда количество атомов в наносистеме велико, то чаще всего используются полуэмпирические модели. Такого рода полуэмпирические подходы многочисленны и будут актуальны и в будущем; см., например, публикации [1, 2]. Мы ранее также использовали преимущественно полуэмпирическую модель межатомных взаимодействий Саттона — Чена при компьютерном моделировании механических свойств металлических сплавов [3–7]. В настоящей работе рассматривались нанокристаллы, содержащие 14, 172, 424, 666 и 1688 атомов. Использовалась полуэмпирическая модель межатомного взаимодействия Саттона — Чена [8]. В качестве нулевого приближения пространственной соответствующей конфигурации рассматривался фрагмент в форме правильного куба или параллелепипеда гранецентрированной кубической (ГЦК) решетки кристаллического серебра.

Полная потенциальная энергия межатомного взаимодействия в рамках модели Саттона — Чена выражается следующим образом:

$$E_{tot} = \varepsilon\left[\frac{1}{2}\sum\sum_{i\neq j} V\left(r_{ij}\right) - c\sum_{i}\sqrt{\rho_i}\right], \tag{1}$$

где $V\left(r\right)=\left(\frac{a}{r}\right)^{n}$; $\rho_i = \sum_{i\neq j}\left(\frac{a}{r_{ij}}\right)^{m}$. (2)

Здесь r_{ij} — расстояние между атомами i и j, c — положительный безразмерный параметр, ε — параметр, имеющий размерность энергии, a — параметр длины, m и n — положительные целые числа. Модель Саттона — Чена с математической точки зрения довольно проста, что объясняет её популярность. Существует несколько параметризаций модели Саттона — Чена. Мы использовали параметры из работы [8]: $m=6$, $n=12$, $\varepsilon = 2.5415\cdot 10^{-3}$ эВ, $c=144.41$, $a=4.09$ Å. Эти параметры для серебра по умолчанию используются в известной компьютерной программе GULP (version 5.1) [9]. Равновесная пространственная конфигура-

ция многоатомной системы находилась методом молекулярной динамики в режиме квазидинамического демпфирования.

Для сравнения полученных результатов вычислялись координаты атомов относительно центра масс каждого релаксированного нанокристалла. Положение центра масс $\vec{r}_c$ системы N материальных точек в классической механике определяется следующим образом

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} M_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{N} M_k}, \tag{3}$$

где M_k — масса k-й материальной точки, а $\vec{r}_k$ — радиус-вектор, указывающий на её положение в пространстве. В нашем случае массы всех атомов равны, поэтому (3) приобретает вид

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k}{N}. \tag{4}$$

Далее, представление об удалении атомов от центра масс дает функция:

$$D(r) = \sum_{k=1}^{N} \delta\left(r - \left|\vec{r}_k - \vec{r}_c\right|\right), \tag{5}$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака, $r = |\vec{r}\,|$. Для визуализации $D(r)$ обычно заменяют дельта-функцию Дирака гауссовской функцией подходящей полуширины:

$$D(r;\sigma) = \sum_{k=1}^{N} g(r,\sigma,\mu_k), \tag{6}$$

где $\mu_k = |\vec{r}_k - \vec{r}_c\,|$; $g(r,\sigma,\mu_k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r-\mu_k}{2\sigma^2}\right)$. (7)

В табл. 1 приведены численные значения абсцисс пиков функции $D(r;\sigma)$.

Таблица 1

Абсциссы (Å) первых трех максимумов функции $D(r;\sigma)$, $\sigma = 0.05$ для нанокристаллов из 14, 172, 424, 666 и 1688 атомов. Форма стартовой конфигурации нанокристалла в единицах ребра элементарного куба ГЦК решетки

Кол-во атомов	Форма	1-й максимум	2-й максимум	3-й максимум
14	1×1×1	2.025	3.365	нет
172	3×3×3	2.035	3.495	4.555
424	5×5×3	2.025	3.525	4.525
666	5×5×5	2.035	3.525	4.555
1688	7×7×7	2.035	3.525	4.565

Из этих данных следует, что атомы, равновесные положения которых рассчитаны в рамках полуэмпирической модели Саттона — Чена очень слабо изменяются при изменении размеров нанокристаллов, хотя количество атомов в самом маленьком и самом большом из них отличаются на два порядка. Объяснить это можно тем, что параметры модели Саттона–Чена калибровались для идеального кристалла. Прояснить полученные данные могли бы расчеты с использованием квантовомеханических моделей. Тем не менее, представляется, что применение рассмотренной полуэмпирической модели к численному моделированию топологии серебряных наносистем со сложным пространственным строением, в частности, содержащих краевые дислокации, атомно-шероховатые поверхности и т. п., целесообразно и способно получить корректные результаты, как минимум, на качественном уровне.

Литература

1. *Wang D., Hu Z., Peng G., Yin Y.* Surface energy of curved surface based on lennard-jones potential // Nanomaterials. – 2021. – Vol. 11, No 3. – P. 686. – URL: http://dx.doi.org/10.3390/nano11030686.

2. *Januszko A., Bose S. K.* Phonon spectra and temperature variation of bulk properties of Cu, Ag, Au and Pt using Sutton — Chen and modified Sutton — Chen potentials // Journal of Physics and Chemistry of Solids. – 2015. – Vol. 82. – P. 67–75. URL: http://dx.doi.org/10.1016/J.JPCS.2015.03.008.

3. *Desta O. G., Bykova M. I., Timoshenko Yu. K.* Computer simulations of the influence of atomic structure disorder on the hardness of Cu – Ag and Au – Ag alloys // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – P. 012027. – URL: http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012027.4

4. *Desta O. G., Bykova M. I., Timoshenko Yu. K.* The Effect of High Hydrostatic Pressure on the Mechanical Properties of the Binary Alloys of the System AuAg3, AgAu3 and Their Components Using Computer Simulation // Journal of Computer Science & Computational Mathematics. – 2021. – Vol. 11, No 4. – P. 79–86. – URL: https://doi.org/10.20967/jcscm.2021.04.001.

5. *Desta O. G., Timoshenko Yu. K.* Comparison of MEAM–2NN and Sutton-Chen Mathematical Models for Computing Mechanical Properties of Binary Alloys of Cu – Ag // Journal of Computer Science & Computational Mathematics. – 2021. – Vol. 11, No 3. – P. 63–68. – URL: https://doi.org/10.20967/jcscm.2021.03.006.

6. *Desta O. G., Bykova M. I., Timoshenko Yu. K.* The Study of Effect of High Hydrostatic Pressure on the Mechanical Properties of Al – Cu Binary Alloys // materials of the international scientific and methodological seminar "Physical basis of modern science-intensive technologies". Voronezh: Voronezh State University of Forestry and Technologies. – 2022. – P. 17–26. – URL: http://dx.doi.org/10.34220/PFMSIT2022_17-26.

7. *Desta O. G.* The geometry optimization calculations on mechanical properties of L12 structure Al3X ANDAlX3-type (X = Au, Ag, Cu) intermetallic compounds / Desta O. G., Timoshenko Yu. K. // materials of the international scientific and methodological seminar "Physical basis of modern science-intensive technologies". Voronezh: Voronezh State University of Forestry and Technologies. – 2022. – P. 27–34. – URL: http://dx.doi.org/10.34220/PFMSIT2022_27-34.

8. *Sutton A. P.* Long-range finnis–sinclair potentials / A. P. Sutton, J. Chen // Philosophical Magazine Letters. – 1990. – Vol. 61, No 3. – P. 139–146.

9. *Gale J. D.* The General Utility Lattice Program (Gulp) / J. D. Gale, A. L. Rohl // Molecular Simulation. – 2003. – Vol. 29, No 5. – P. 291–341.

УДК 303.094.7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫПОЛНЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОЕКТА В УСЛОВИЯХ КОРРЕКЦИИ РЕШЕНИЯ ЕГО ОТДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

А. В. Дятчина, С. А. Олейникова

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Объектом исследования является стохастический проект, отдельные задачи которого допускают коррекцию. Предметом исследования является случайная величина, описывающая длительность проекта. Целью являются оценки числовых характеристик данной величины и ее закона распределения (для определения вероятности выполнения проекта в заданном временном интервале). Для достижения поставленной цели используется аппарат имитационного моделирования. В результате проведен эксперимент, позволяющий оценить гистограмму распределения и вероятности несвоевременного завершения проекта в разных условиях.

Ключевые слова: стохастический проект, случайная длительность, коррекция работ, математическое ожидание, дисперсия, закон распределения, гистограмма, имитационная модель, AnyLogic, вычислительный эксперимент.

Введение

Рассматривается задача анализа случайной величины, описывающей длительность выполнения некоторого проекта, который задается множеством последовательно-параллельных задач. Длительность решения отдельной задачи представляет собой случайную величину. Принципиальной особенностью является ненулевая вероятность выполнения задачи с ненадлежащим уровнем качества. Так, например, для IT-проектов в результате тестирования программного кода возможно нахождение некоторых ошибок, требующих устранения, выполнение какой-либо отдельной работы для обслуживающей системы может быть ненадлежащего качества и т. д. В этом случае существующие методы, используемые для оценки гистограммы длительности всего проекта и отдельных его числовых характеристик, могут давать существенные погрешности. Все это обуславливает необходимость проведения исследования случайной величины в условиях, описанных выше.

В качестве инструмента для проведения исследования выбран аппарат имитационного моделирования. В частности, среда AnyLogic имеет весь арсенал средств для имитации выполнения отдельных работ, моделирования их зависимостей и сбора необходимой статистики. В связи с этим, тематика работы посвящена постановке и проведению эксперимента для анализа числовых характеристик и закона распределения длительности проекта, который определяется совокупностью задач, допускающих коррекцию, а также анализу полученных результатов.

1. Обзор существующих методов решения задачи

Пусть имеется некоторый проект, заданный совокупностью взаимно-зависимых стохастических задач, допускающих коррекцию после завершения своего выполнения. Необходимо найти числовые характеристики случайной величины, определяющей его длительность, и оценке соответствующего закона распределения.

Данная задача относится к области управления проектами [1–5]. Наиболее распространенным методом, позволяющим получить ее решения в условиях стохастических характеристик является метод PERT. Длительности отдельных задач при этом должны быть заданы наименьшим (a), наибольшим (b) и наиболее вероятным (m) значениями. Длительность отдельной за-

дачи при этом оценивается случайной величиной, распределенной по закону бета, а ее математическое ожидание — формулой (1):

$$M^*(\xi_i) = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}. \quad (1)$$

Дисперсия такой величины оценивается, согласно правилу трех сигм:

$$D^*(\xi_i) = \frac{(b_i - a_i)^2}{36}. \quad (2)$$

При этом, согласно центральной предельной теореме, длительность всего проекта оценивается нормальным законом распределения. Математическое ожидание соответствующей случайной величины имеет следующую оценку:

$$M^*(\eta) = \sum_{k \in Krit} M^*(\xi_k). \quad (3)$$

Здесь $Krit$ — критический путь проекта; η — случайная величина, описывающая длительность проекта. Дисперсия η оценивается аналогично:

$$D^*(\eta) = \sum_{k \in Krit} D^*(\xi_k). \quad (4)$$

Следовательно, вероятность попадания случайной величины η в некоторый временной интервал $(\min, \max)$ будет оцениваться по формуле [6]:

$$P^*(\min < \eta < \max) = F_\eta^*(\max, a, \sigma) - F_\eta^*(\min, a, \sigma). \quad (5)$$

Здесь $(\min, \max)$ — интересующий временной интервал; $F_\eta^*(x, a, \sigma)$ — функция распределения нормальной случайной величины с параметром a, определяемым формулой (3), и σ, который рассчитывается как корень из дисперсии (формула (4)).

Данный метод в целом дает относительно точные результаты для математического ожидания (3) в случае, если отдельные случайные величины определяются числовыми характеристиками (1) и (2). Относительно других искомых характеристик в настоящее время он в целом наилучший по соотношению параметров «точность»-«вычислительная сложность». Однако, интерес представляет величина отклонения значений от результатов, полученных по формулам (3), (4) и (5) в случае необходимости повторного решения некоторых задач.

Данную задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть длительность каждой из взаимно-зависимых задач задана параметрами a_{i0}, b_{i0} и m_{i0}. Пусть задана некоторая вероятность $q_{i1} = 1 - p_{i1}$ коррекции решения данной задачи. Случайная величина, описывающая процесс коррекции, также может быть оценена с помощью наибольшего, наименьшего и наиболее вероятного времени a_{i1}, b_{i1} и m_{i1}. Возможны также повторные коррекции решения задачи (эти события также оценивается некоторыми вероятностями q_{i2}, q_{i3} и т. д.).

Необходимо оценить влияние процесса коррекции на распределение случайных величин (как длительностей отдельных задач, так и проекта в целом).

2. Моделирование исследуемого проекта

Для достижения поставленной цели соберем статистику о выполнении проекта с исследуемыми особенностями на разных значениях длительностей и разных зависимостях между задачами. Для этого воспользуемся аппаратом имитационного моделирования на базе среды AnyLogic [7]. Эта среда содержит объекты, необходимые для моделирования отдельных работ и их зависимостей, библиотеки статистических функций, позволяющих задать любое распределение случайным величинам, а также инструментарий для сбора статистики. Кроме того, среда позволяет добавлять для каждого события свои дополнительные действия, реализованные на Java.

Опишем моделирование случайных величин, определяющих время задержки при решении задачи. Как было отмечено ранее, для этого воспользуемся законом бета. Его плотность зависит от границ интервала длительности (a,b), а также параметров (p,q). Несложно получить соотношения, описывающие зависимость этих параметров от математического ожидания и моды [8]:

$$p = \left(\left(b - M(\xi)\right)\cdot\left(M(\xi) - a\right)^2 - D(\xi)\cdot\left(M(\xi) - a\right)\right) / \left(D(\xi)\cdot(b-a)\right) \quad (6)$$

и

$$q = \left(\left(b - M(\xi)\right)^2\cdot\left(M(\xi) - a\right) - D(\xi)\cdot\left(b - M(\xi)\right)\right) / \left(D(\xi)\cdot(b-a)\right). \quad (7)$$

Предполагается, что математическое ожидание и дисперсия для этих формул предварительно будут рассчитаны по формулам (1) и (2) соответственно.

Следовательно, для определения параметров бета-распределения для каждой работы по известным значениям наименьшего, наибольшего и наиболее вероятного времени необходимо сначала определить математическое ожидание и дисперсию по формулам (1) и (2), а затем найти значения параметров по формулам (6) и (7). Расчет реализован с помощью параметров и динамических переменных среды AnyLogic. Для каждой работы с помощью библиотеки «Системная динамика» сформированы следующие зависимости (рис. 1). Каждое значение динамической переменной определено формулами, описанными выше.

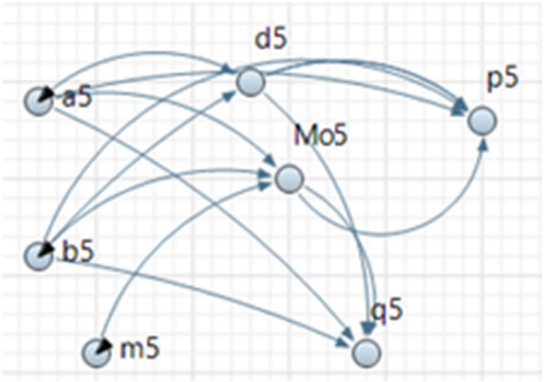


Рис. 1. Зависимости для расчета параметров p и q для бета-распределения

Далее смоделируем сам проект как множество взаимосвязанных объектов Service, каждый из которых имитирует решение задачи за время, заданное функцией beta() с параметрами, нахождение которых описывалось выше. Если некоторое событие является начальным для нескольких работ, оно моделируется блоком Split. Если для выполнения работы необходимо завершения нескольких работ, между ними ставится блок assembler. Коррекция некоторых работ добавляется с помощью условного блока типа SelectOutput, где с некоторой вероятностью заявка завершает работу, а с оставшейся требует повторного выполнения. Если при коррекции необходимо изменить параметры бета-распределения (что соответствует ситуации, когда время на доработку, например, меньше, чем время на решение задачи), то соответствующий код, задающий зависимость изменения параметров (функционально или напрямую через изменение предыдущих значений) пишется в действиях при выходе false из порта SelectOutput. Для построения гистограммы в модель добавлен объект chart, данные в который заносятся при завершении очередного прогона модели.

Пример модели приведен на рис. 2.

Здесь объекты service, имитирующие процесс выполнения работ, обозначены наименованиям job_1,…,job_11; блоки split — sp1,…,sp4; блоки assembler — asm, asm1,asm2; блоки selectOutput — so,sO1, sO2.

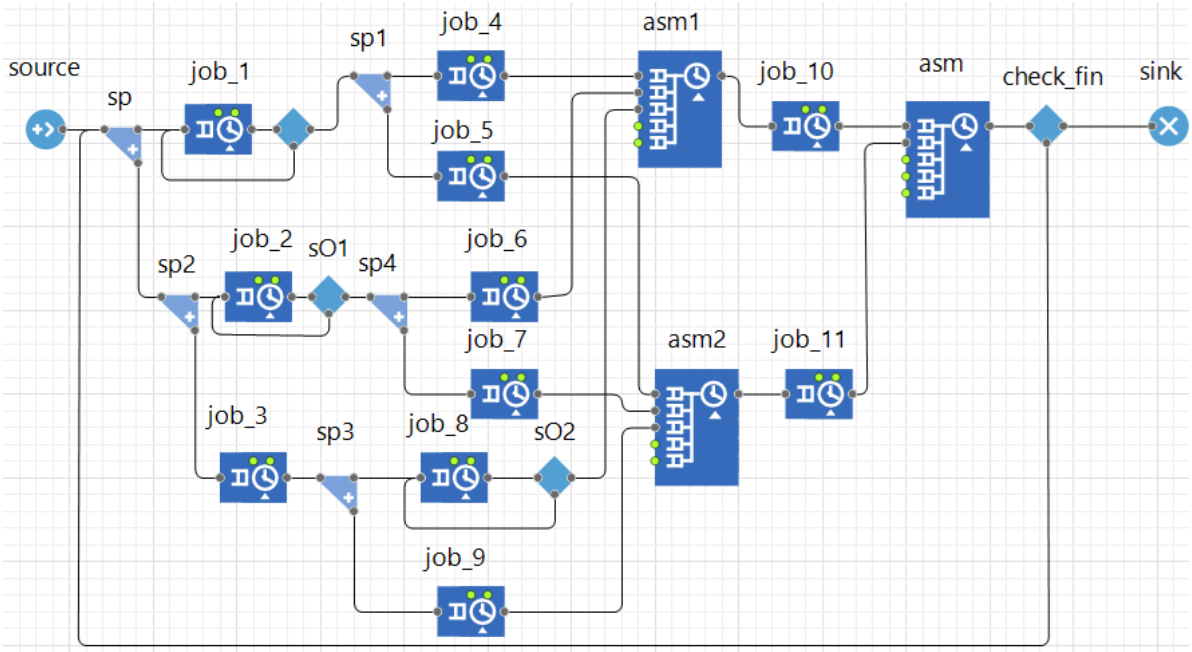


Рис. 2. Пример модели проекта

Кроме того, с помощью дополнительных параметров-счетчиков можно оценить вероятность выполнения проекта в заданном временном интервале (для этого по завершении очередного проекта проверяется попадание итоговой длительности в интересующий временной интервал; фиксируется число положительных исходов и общее число исходов).

Таким образом, получен инструментарий для анализа случайной величины, описывающей время выполнения комплекса взаимно-зависимых работ.

3. Анализ результатов моделирования

Проведем вычислительный эксперимент с целью анализа случайной величины, описывающей длительность проекта при допущении о возможной коррекции решения задач. Для каждой модели проекта менялись временные параметры задач a, b и m, вероятности коррекции решения задачи, а также сами задачи, решение которых подвергается коррекции. Кроме того, меняются сами модели проекта (количество задач и их взаимная зависимость).

Приведем в первую очередь анализ случайной величины, характеризующей длительность отдельной задачи в случае ее возможной коррекции. Как было отмечено ранее, без коррекции соответствующая случайная величина достаточно точно аппроксимировалась законом бета. В случае коррекции соответствующая случайная величина может быть представлена следующей гистограммой (рис. 3).

Как видно из данного рисунка, закон уже не будет являться одномодальным. Число составляющих будет совпадать с количеством коррекций, высота каждой «волны» распределения будет зависеть от вероятности коррекции (и, как следствие, от числа случаев в эксперименте, когда решение данной задачи было скорректировано). Кроме того, следует отметить, что у данной случайной величины изменяется правая граница диапазона (она может существенно увеличиться даже при небольшой вероятности коррекции) и, как следствие, дисперсия.

Далее проанализирована специфика случайной величины, описывающей длительность всего проекта, где решения задач после завершения могут быть скорректированы. На рис. 4 приведен сравнительный анализ гистограмм длительностей на одних и тех же исходных данных для случая, когда задачи не допускают коррекции (слева) и с коррекцией с вероятностью 0.05 единственной задачи, не лежащей на критическом пути проекта (справа).

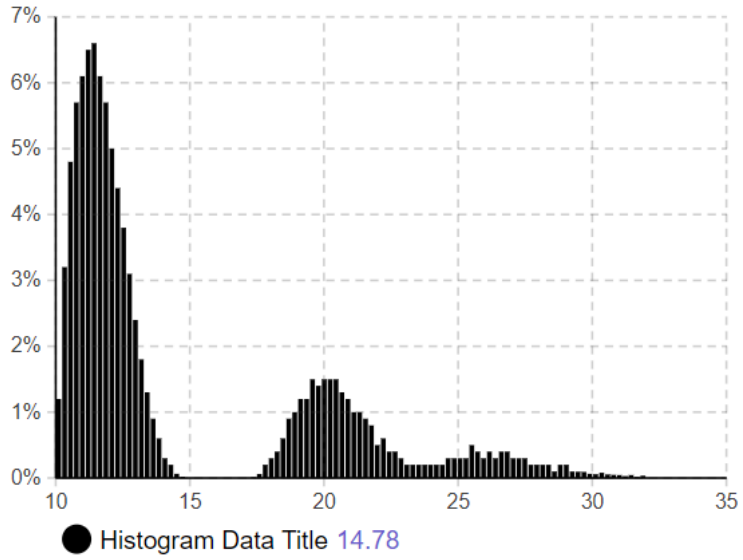


Рис. 3. Гистограмма длительности выполнения работы при ее коррекции

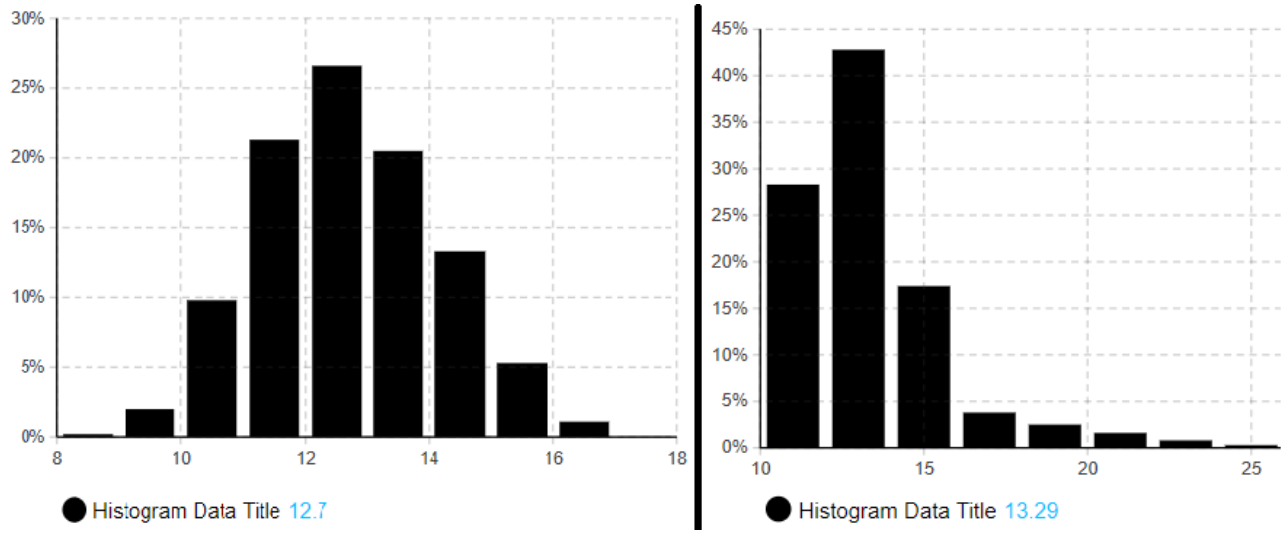


Рис. 4. Гистограмма длительности проекта
(слева — без коррекции, справа — с вероятностью 0.05 коррекции единичной работы)

Проводя анализ законов распределения длительностей на разных проектах с разными вероятностями коррекции решения отдельных задач и разным числом задач, допускающих такую коррекцию, можно сделать вывод о том, что в интервале от начала и до среднего значения гистограмма практически не претерпевает изменения. Само среднее значение незначительно увеличивается (величина его увеличения зависит от вероятностей коррекции работ). После среднего внешний вид гистограммы претерпевает существенные изменения. Это будет уже вытянутая во времени функция, количество локальных максимумов которой зависит от значений вероятностей коррекции. Так, например, на рис. 5 слева представлена гистограмма, описывающая длительность проекта, все задачи которого допускают коррекцию с вероятностью 0.05, а справа гистограмма, в которой половина задач выполнены без последующей коррекции, а решение оставшейся половины задач подвергается коррекции с вероятностью 0.05, а одной задачи — с вероятностью 0.25.

Кроме непосредственно гистограммы в модели также предусмотрена оценка разнообразных вероятностей, касающихся длительности проекта. В частности, на рис. 5 приведены оценки вероятности события, заключающегося в том, что проект будет завершен в пределах плани-

руемых сроков. Этот срок рассчитывается как $M^*(\eta)+3\sigma$, где $M^*(\eta)$ оценивается формулой (3), а σ находится с помощью формулы (4).

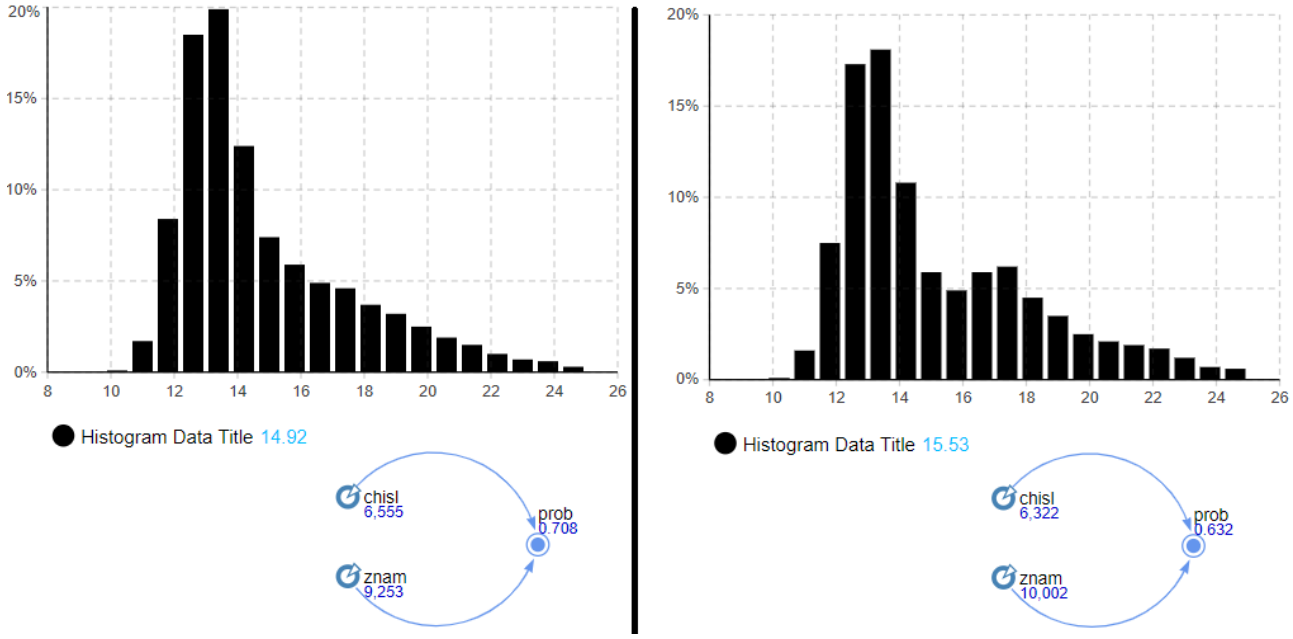


Рис. 5. Гистограммы длительности проекта
(слева с коррекцией всех работ с вероятностью 0.05;
справа — половины работ с вероятностью 0.05 и одной с вероятностью 0.25)

Таким образом, можно оценить, насколько имеющиеся в PERT оценки можно использовать для случая, если отдельные задачи проекта допускают последующую коррекцию. Как видно из рис. 5, соответствующие вероятности для описанных выше случаев равны 0.708 и 0.632, что говорит о том, что необходимо новый математический аппарат, учитывающий специфику данных проектов.

Заключение

В работе с помощью аппарата имитационного моделирования была проведена серия экспериментов, позволяющая исследовать случайную величину, которая описывает длительность проекта в случае, если отдельные его задачи допускают коррекцию. В результате экспериментов можно сделать вывод о том, что коррекция решения даже одной задачи влияет на закон распределения соответствующей случайной величины. В случае, если решения большинства задач допускают коррекцию даже с невысокой вероятностью, вероятность завершить проект вне планируемых (даже максимальных) сроков существенно возрастает. Таким образом, даже малая вероятность допущения коррекции приводит к существенному потенциальному увеличению длительности проекта.

Все это обуславливает необходимость разработки нового математического аппарата, который бы позволял в результате расчета оценок учитывать нюансы исследуемого класса задач.

Литература

1. *Цителадзе Д. Д.* Алгоритмизация процессов управления проектом / Д. Цителадзе // Научные исследования и разработки. Российский журнал управления проектами. – 2020. –Т. 9, № 1. – С. 12–21.

2. *Терентьева З. С.* Гибкие методы управления проектами, анализ и сравнение / З. С. Терентьева, И. А. Хализова // Азимут научных исследований: экономика и управление. –2019. – Т. 8, № 1 (26). – С. 374–376.

3. Математические основы управления проектами: учеб. пособие / С. А. Баркалов, В. И. Воропаев, Г. И. Секлетова [и др.]; под ред. В. Н. Буркова. – М. : Высш. шк., 2005. – 423 с.

4. *Кендалл И.* Современные методы управления портфелями проектов и офис управления проектами: Максимизация ROI / И. Кендалл, К. Роллинз; пер. с англ. – М. : ЗАО «ПМСОФТ», 2004. – 576 с.

5. *Новиков Д. А.* Управление проектами: организационные механизмы / Д. А. Новиков. – М. : ПМСОФТ, 2007. – 140 с.

6. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М. : Физматлит, 2006. – 816 с.

7. *Borshchev A.* The Big Book of Simulation Modeling. Multimethod Modeling with AnyLogic 6 [Электронный ресурс] // AnyLogic.ru. URL https://www.anylogic.ru/resources/books/big-book-of-simulation-modeling/.

8. *Олейникова С. А.* Вычислительный эксперимент для анализа закона распределения случайной величины, описывающей длительность проекта в задачах сетевого планирования и управления / С. А. Олейникова // Экономика и менеджмент систем управления. – 2013. – № (9). – С. 91–97.

УДК 656.132

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРАТЕГИЙ УТИЛИЗАЦИИ ТЕПЛОТЫ ВОЗДУХА ВЫВОДИМОГО ИЗ САЛОНА ЭЛЕКТРОБУСА

А. М. Ермаков, Р. Р. Салахов, И. Р. Хафизов, А. Ф. Закиров

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева - КАИ

Аннотация. Эксплуатация электробусов в российских климатических условиях сталкивается с увеличенным потреблением энергии в холодное время года. Для увеличения пробега электробуса на одном заряде необходимо использовать все имеющиеся ресурсы на борту электробуса, в том числе и теплоту салонного воздуха. В данной работе рассмотрены стратегии утилизации теплоты салонного воздуха электробуса. Для анализа стратегий использования теплоты воздуха создана одномерная численная модель электробуса, включающая в себя салон электробуса с учетом геометрии и характеристиками ограждающих конструкций, жидкостный контур терморегулирования силовых электрических компонентов и парокомпрессионную климатическую установку. Моделирование проведено в диапазоне температур от минус 30 °С до плюс 40 °С.
Ключевые слова: электробус, климатическая система, теплота салона, численное моделирование, утилизация, теплообмен.

Введение

Одной из главных проблем использования электрических автобусов в России, является эксплуатация его в холодное время года, когда на обеспечение микроклимата салона может уходить значительная часть энергии батарей [1].

Исследователи по всему миру ищут способы снижения затрат на обогрев салона электромобилей в холодное время года. Предлагаются различные способы, одним из наиболее перспективных является использование теплоты воздуха, выводимого из салона, где также есть несколько направлений её использования.

В работе [2] предлагается использовать теплоту воздуха, выводимого из салона для терморегулирования тяговых батарей и поддержании микроклимата салона, за счет смешивания выводимого воздуха со свежим воздухом, поступающим в салон, при такой конфигурации использования теплоты, продемонстрированы быстрая реакция по поддержанию микроклимата, но такой режим потребовал увеличение энергопотребления на 10 %.

В работе [3] рассматривается вариант использования теплоты салона в испарителе климатической установки, повышая таким образом температуру испарения и увеличивая термодинамическую эффективность парокомпрессионной установки и коэффициент преобразования от 2,05 до 4,71, обеспечивая таким образом экономию энергии на 13,2 %.

В работе [4] проведена оценка использования теплоты салона электробуса в испарителе парокомпрессионной установки в холодное время года, что приводит к увеличению коэффициента преобразования парокомпрессионной установке, работающей в режиме теплового насоса на 25,55 %, в работе [5] увеличение составляет 13,2 %, а работе [6] увеличение — 18,9 %.

В российском научном сообществе, работ, посвященных использованию теплоты салонного воздуха электробусов мало, примером подобной работы может служить [7], где рассматривается использование теплоты воздуха, выводимого из пассажирского вагона с помощью пластинчатых или роторных теплообменников, что позволяет снизить затраты тепловой энергии для обеспечения микроклимата на 50–65 %. Таким образом, необходимо сравнить различные подходы при утилизации теплоты салонного воздуха в испарителе парокомпрессионной установки или дополнительном рекуператоре, подогревающим воздух, поступающий в салон.

Целью данной работы является исследование стратегий использования теплоты салонного воздуха при работе в объединенной системе термоменеджмента электробуса со сравнением вышеперечисленных подходов.

1. Численное моделирование работы утилизатора теплоты электробуса

1.1. Постановка задачи

Для оценки затрат на поддержание микроклимата в салоне электробуса создана подробная модель электробуса, которая включает в себя как расчет ограждающих конструкций электробуса с учетом температуры окружающего воздуха, скорости электробуса, так и расчет температуры салонного воздуха с учетом количества пассажиров, а также систему охлаждения силового электрооборудования. В одномерной модели реализованы алгоритмы управления, которые позволяют производить оценку работы комплексной системы термоменеджмента, как в установившихся режимах, так и смешанном и городском циклах.

Одномерная модель системы термоменеджмента электробуса условно разбита на блоки, которые в отдельности верифицированы:

– блок задания внешних условий, в котором задается температура внешнего воздуха. Материалы ограждающих конструкций салона электробуса. Также задается плотность энергии солнечного излучения, которая представляет собой аппроксимацию данных по плотности солнечного излучения в г. Москва и средней температуры окружающего воздуха, при температуре ниже минус 20 °C значение плотности теплового потока равняется нулю;

– блок задания нагрузок на электробус, в котором по температуре окружающего воздуха определяется целевая температура в салоне. Также в блоке задается нагрузка на силовое электрооборудование для расчета его тепловыделений, которая может быть как постоянная, так и нестационарной по смешанному циклу или городскому циклу;

– блок расчета ограждающих конструкций салона электробуса, в котором заданы площади боковых панелей, крыши и окон салона электробуса с учетом их расположения (вертикальное или горизонтальное) для расчета тепловых нагрузок от солнечной радиации. Также задано количество слоев и материалы этих слоев в зависимости от ограждающей конструкции. С стороны внешних слоев на ограждающие конструкции действует скорость с температурой окружающего воздуха для расчета конвективного теплообмена. Также заданы материал и масса сидений, необходимые при расчете прогрева электробуса;

– блок расчета подачи воздуха в салон электробуса, в котором задан объем воздуха салона, вентиляторы для подачи окружающего воздуха, вентиляторы отопителей, теплообменник рекуператор теплоты салонного воздуха. Тепловыделение от пассажиров сымитировано теплообменным аппаратом, к которому подводится количество теплоты, рассчитанное как количество пассажиров, умноженное на тепловыделение одного пассажира, что необходимо при расчете в транзиентных циклах при движении по маршруту и меняющемся количестве пассажиров;

– блок расчета контура охлаждения силового электрооборудования, в котором заданы масса портальных мостов, батарей и инверторов, а также гидравлические характеристики каналов их охлаждения, для расчета коэффициентов теплоотдачи. Подвод энергии производится пропорционально действующей нагрузки и может быть как постоянным, так и меняющимся по смешанному и городскому циклу. В объединенной системе термоменеджмента обогрев и охлаждение салона реализуется через теплообменные аппараты в контуре охлаждения. Подвод и отвод тепловой энергии климатической установкой, также реализован через жидкостный теплообменник;

– блок расчета климатической установки, в котором производится расчет тепловой и холодильной мощности, а также потребление энергии компрессором. В нем задается перепад температур между хладагентом и средой. Кроме того, в нем же рассчитываются коэффициенты преобразования;

– блок алгоритмов управления системой термоменеджмента (рис. 1), в котором в зависимости от температуры окружающего воздуха происходит регулирование температуры охлаждающей жидкости и в салоне электробуса.



Рис. 1. Общий алгоритм управления системы терморегулирования

Одномерная модель в сборе содержит в себе также более 60 глобальных переменных, в которых заданы геометрические характеристики и свойства материалов, а также производится расчет геометрических характеристик теплообменных аппаратов, использующихся при расчете их теплообмена.

1.2. Одномерное численное моделирование

Для выбора наиболее рациональной стратегии использования теплоты воздуха выводимого из салона рассмотрены следующие варианты её использования:

– без утилизации теплоты отводимого воздуха;

– использование теплоты в испарителе климатической установки в холодное время года;

– использование теплоты в теплообменнике-рекуператоре, разработанном на втором этапе данного проекта.

Использование утилизации теплоты салонного воздуха осуществлялось при температуре окружающего воздуха ниже плюс 10 °C.

Без использования теплоты салонного воздуха в системе термоменеджмента (рис. 2) основная нагрузка по обогреву салона в зимнее время приходится на климатическую установку. В холодное время года потребляется значительно большее количество энергии на привод компрессора, что обусловлено большим перепадом температур в испарителе и конденсаторе.

При использовании теплоты салонного воздуха в испарителе климатической установки (рис. 3) воздух из салона смешивается с воздухом из окружающей среды и повышая его на 3–5 °C, что приводит к повышению термодинамической эффективности парокомпрессионной

установки и потребляемая мощность при этом снижается с 6,5 кВт при минус 30 °С без утилизации до 5,8 кВт при минус 30 °С при утилизации в испарителе.

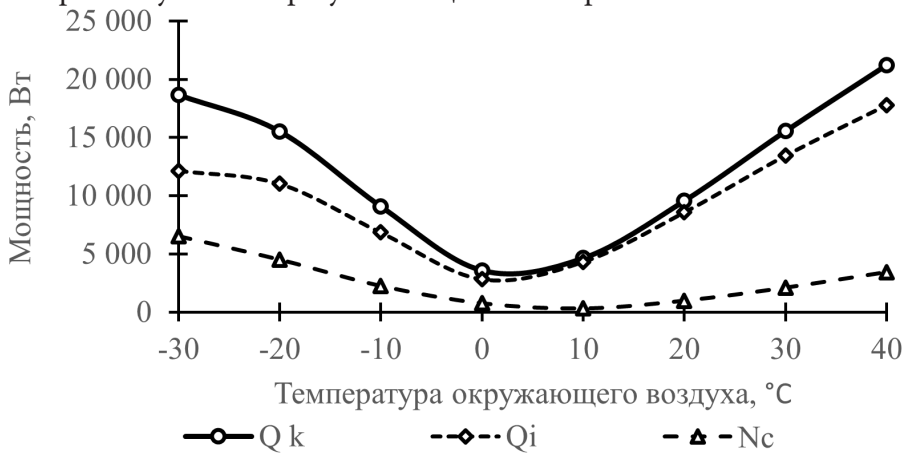


Рис. 2. Мощности в оборудовании климатической установке без использования системы утилизации салонного воздуха

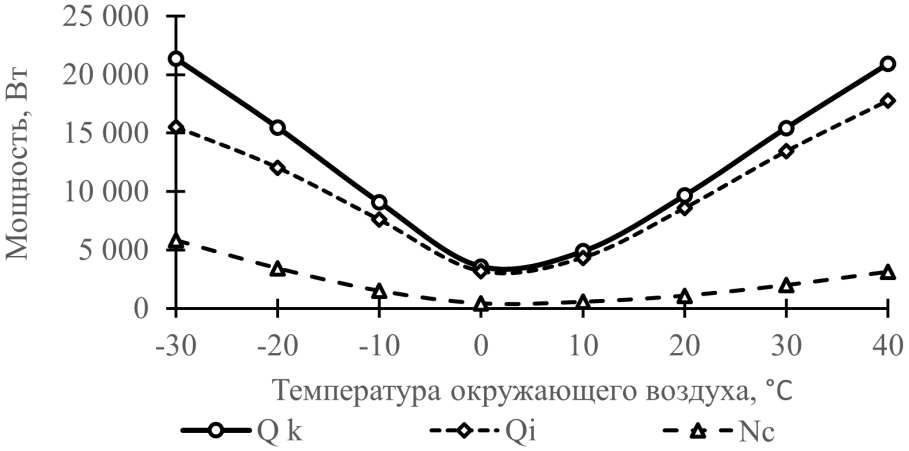


Рис. 3. Мощности в компонентов климатической установки при утилизации теплоты салонного воздуха в испарителе

При использовании теплоты воздуха, отводимого из салона, в теплообменнике рекуператоре происходит нагрев подаваемого воздуха в салон и происходит снижение тепловой нагрузки на климатическую установку в холодное время года (рис. 4), что влечет за собой снижение потребляемой мощности компрессора до 2,1 кВт.

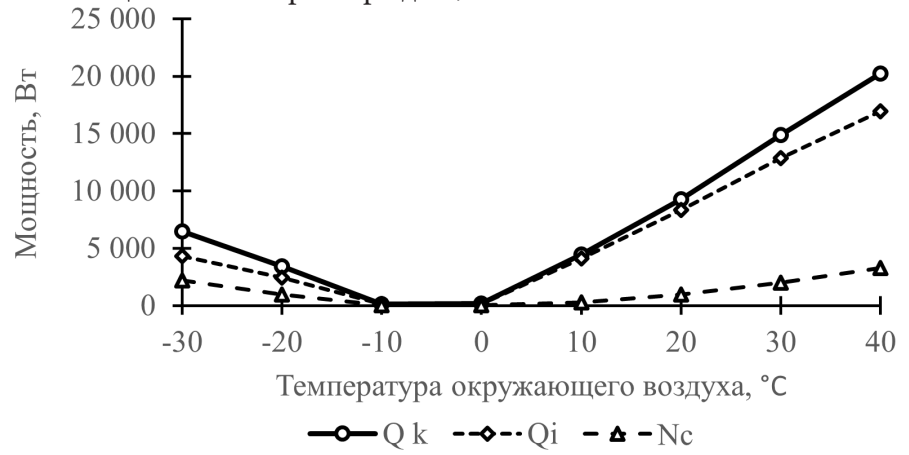


Рис. 4. Мощность компонентов климатической установки при утилизации теплоты салонного воздуха в рекуператоре

При сравнении мощности компрессора, потребляемой при рассмотренных стратегиях использования теплоты воздуха отводимого из салона (рис. 5), в теплое время года при температуре больше 0 °С практически мощности отличаются незначительно, но при низких температурах утилизация в испарителе позволяет сэкономить от 10 до 44 %, а утилизация в теплообменнике рекуператоре – от 66 до 93 %.

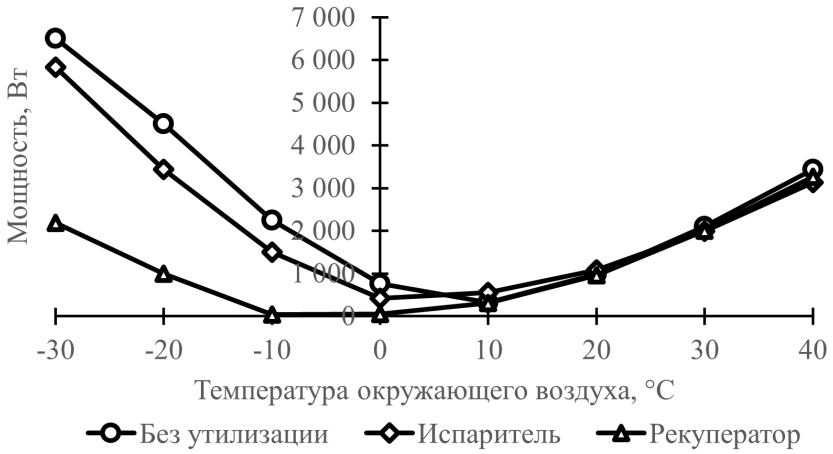


Рис. 5. Потребляемая мощность компрессора климатической установки при различных вариантах утилизации теплоты салонного воздуха

Заключение

Получены сравнительные результаты стратегий утилизации теплоты воздуха, выводимого из салона электробуса в испарителе парокомпрессионной установки и в системе утилизации теплоты салонного воздуха. При утилизации в испарителе климатической установки снижение потребляемой мощности составляет уменьшается от 44 % при 0 °С до 10 % при минус 30 °С, в то время как, при утилизации в испарителе снижение потребляемой мощности составляет от 93 % при 0 °С до 66 % при минус 30 °С. Наиболее предпочтительным вариантом в холодное время года является утилизация теплоты салонного воздуха для подогрева холодного воздуха, подаваемого в салон электробуса, что позволяет снизить нагрузку на климатическую установку и существенно снизить мощность, потребляемую компрессором.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00373, https://rscf.ru/project/22-19-00373/

Литература

1. *Девянин С. Н.* Проблемы электрификации автомобильного транспорта России / С. Н. Девянин, В. А. Марков, А. А. Савастенко, Э. А. Савастенко // Двигателестроение. – 2022. – №1(287). – С. 21–31.

2. *Choi M. G.* Integrated battery thermal management and CO2 control in electric buses using recirculated air and waste heat recovery / M. G. Choi, M. Koushaeian, J. S. Park, H. Y. Lee, J. D. Chung // Results in Engineering. – 2024. – V. 24. – 102883.

3. *Yang D.* Recent advances on air heating system of cabin for pure electric vehicles: A review / D. Yang, Y. Huo, Q. Zhang, J. Xie, Z. Yang // Heliyon. – 2022. – V. 8 (10). – e11032.

4. *Han X.* Investigation on the heating performance of the heat pump with waste heat recovery for the electric bus / X. Han, H. Zou, J. Wu, C. Tian, M. Tang, G. Huang // Renewable Energy. – 2020. – V. 152. – P. 835–848.

5. *Tian Z.* Performance evaluation of an electric vehicle thermal management system with waste heat recovery / Z. Tian, B. Gu, W. Gao, Y. Zhang // Applied Thermal Engineering. – 2020. –V. 169. – 114976.

6. *Yu X.* A novel energy-economic-environmental evaluation model for heat pump air conditioners integrated with waste heat recovery in electric vehicles / X. Yu, R. Jiang, G. Lu, H. Liu, Y. Tong, G. Qian, R. Huang, Z. Li // Case Studies in Thermal Engineering. – 2023. – V. 41. – 102605.

7. *Стоякин Г. М.* Пути улучшения характеристик климатических систем пассажирского подвижного состава / Г. М. Стоякин, А. В. Костин, С. Н. Науменко // Вестник Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. – 2020. – Т. 79, № 1. – С. 34–38.

УДК 538.911:004.942

АНАЛИЗ ДЕФЕКТА ТРЕЩИНЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ АТОМИСТИЧЕСКОГО И КОНТИНУАЛЬНОГО ПОДХОДОВ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

Е. П. Ермилов

Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королёва

Аннотация. Аналитическое решение системы уравнений напряжений у края трещины при континуальном подходе является классическим подходом в анализе дефектов в металлах. Однако по определению континуальной механики, свойства материала являются однородными во всём пространстве. Метод молекулярной динамики (далее — МД) является более гибким подходом, поскольку учитывает структуру материала. Задачей данной работы является анализ дефекта трещины в кристалле никеля с гранецентрированной кубической решёткой (далее — ГЦК) с помощью атомистического подхода в ПО LAMMPS (Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator) и континуального подхода, посредством решения системы уравнений у края трещины, в том числе определение временного промежутка выполняемости закона Гука при заданных физических условиях [1].
Ключевые слова: молекулярная динамика, компьютерное моделирование, континуальная механика, потенциалы взаимодействия, дефект кристалла, гранецентрированная кубическая решётка, тензор напряжений, функция напряжений Эри, ПО LAMMPS, растягивающая нагрузка.

Введение

Молекулярно-динамическое моделирование, основанное на потенциалах взаимодействий, нашло широкое применение в вопросах анализа материалов с учётом их структур. В данной работе применяется метод «погруженного атома» (далее — “embedded atom method” / EAM), полученный на основе модификации ранней теории квазиатома. Следует отметить решение проблемы авторами потенциала учёта объёма кристаллической решётки при подсчёте полной потенциальной энергии при возмущении системы после «внедрения» атома [2].

Задача состоит в сравнении молекулярно-динамического и континуального подходов при моделировании трещины в кристалле никеля с гранецентрированной кубической решёткой с предварительным отысканием временного интервала выполнимости закона Гука при молекулярно-динамическом моделировании.

1. Теоретические сведения

Общая энергия при потенциале внедрённого атома записывается следующим образом:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\phi_{\alpha_i-\alpha_j}(r_{ij}) + \sum_i F_{\alpha_i}(\rho_i),$$

где $\phi_{\alpha_i-\alpha_j}(r_{ij})$ — парный потенциал взаимодействия атомов по химическим сортам,

$F_{\alpha_i}(\rho_i)$ — энергия «погружения» атома как функции суммарной электронной плотности на позиции атома, обусловленная всеми другими атомами в системе (соответствует притяжению атомов) [1].

Запишем систему уравнений у края острой трещины для функции напряжения Эри χ:

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \\ \sigma_r = \nabla^2 \chi - \sigma_\theta, \\ \tau_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \chi}{\partial \theta}\right). \end{cases}$$

где θ — угол при трещине,

r — радиальная координата трещины [2].

Решением данной системы является множество компонент тензора напряжений, одним из множителей которого являются универсальные угловые распределения. Компоненты тензора в данной работе реализованы функциональным программированием на языке Python.

2. Экспериментальная часть

С целью определения временного интервала и скорости деформации было произведено моделирование в ПО LAMMPS с построением графика «напряжения-деформации». Написана инструкция в ПО по созданию кубической структуры ГЦК никеля с линейным размером 10 Å. Среда описывается NPT ансамблем с температурой равновесия 300 K с загрузкой потенциала внедрённого атома. Построенные графики изображены на рис. 1.

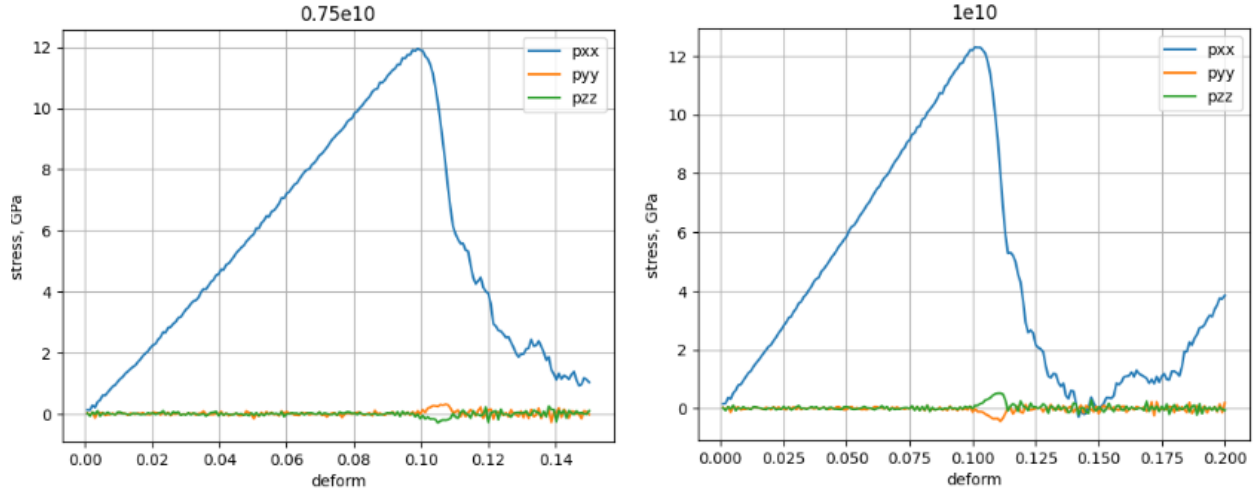


Рис. 1. Графики «напряжение – деформация»

Из графиков наблюдается сохранение закона Гука до временного шага 10 пс для данного случая. Дальнейшие явления не рассматриваются. Выбирается скорость растяжения 0,1.

Далее производим создание структуры в программном пакете LAMMPS (в виде инструкции) в виде пластины из 200000 атомов с линейными размерами $(350,63 \times 350,63 \times 10,52)$ Å. Входной параметр решётки равен 3,524. Создана трещина длиной 38,48 Å методом удаления взаимодействий между атомами, затем применилась растягивающая нагрузка вдоль оси y по полученной скорости нагрузки. Далее произведён дамп координат и тензоров напряжений в ПО OVITO. Данное ПО обладает возможностью выделения цвета по значению определенных параметров через функцию expression selection, с помощью которой произведено усечение структуры в кольцо для построения графика распределения компонент напряжения от угла в окружности молекулярно-динамическим методом (рис. 2). Через color coding были выведены компоненты напряжений для каждого временного шага, а также произведено построение двух графиков функции зависимостей компонент напряжений от угла при временных шагах 2,5; 5; 7,5; 10 пс (рис. 3–6).

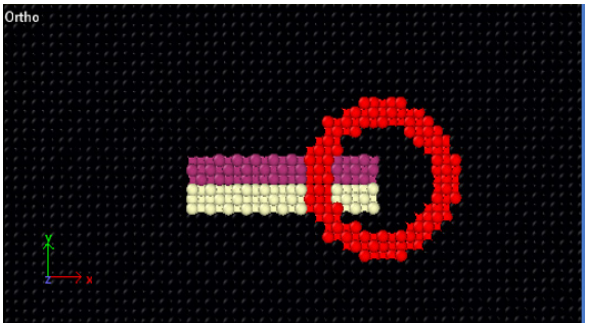


Рис. 2. Кольцевая структура в ПО OVITO

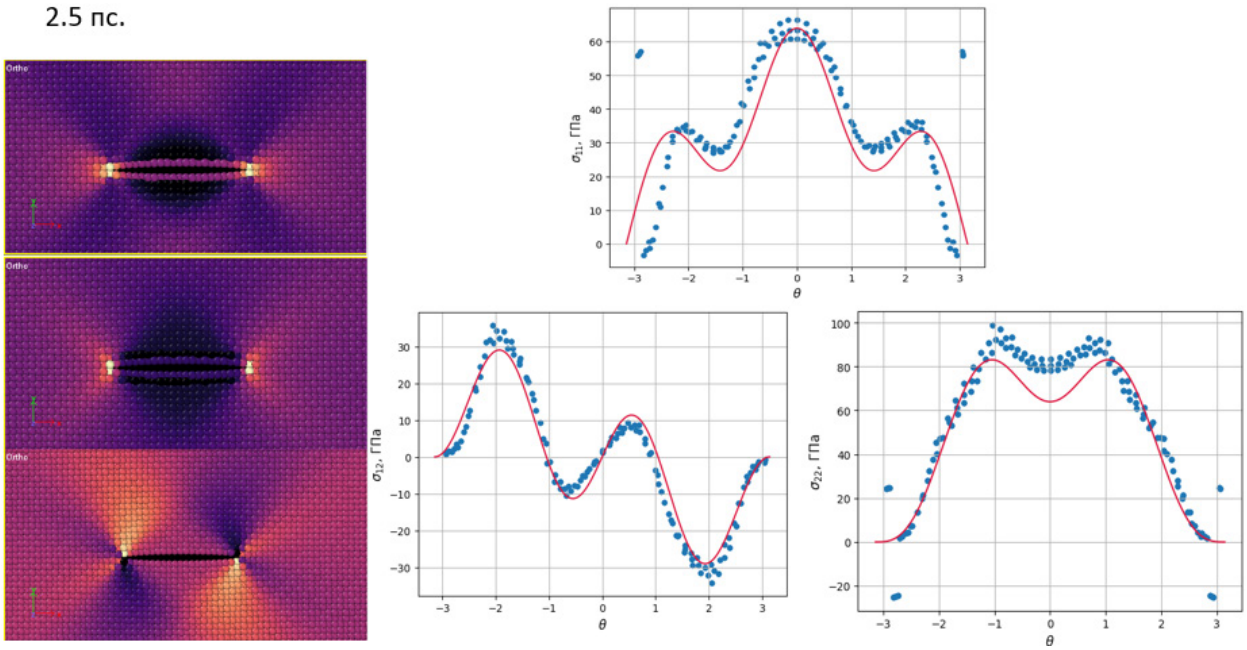


Рис. 3. Распределение полей напряжений и графики при 2,5 пс

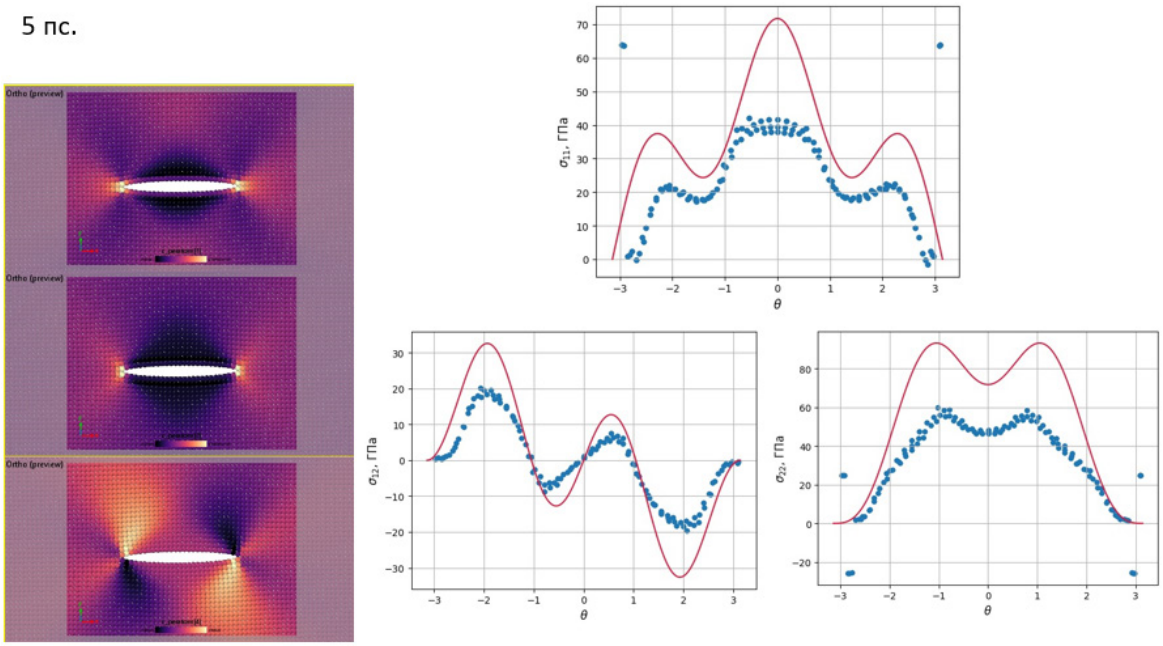


Рис. 4. Распределение полей напряжений и графики при 5 пс

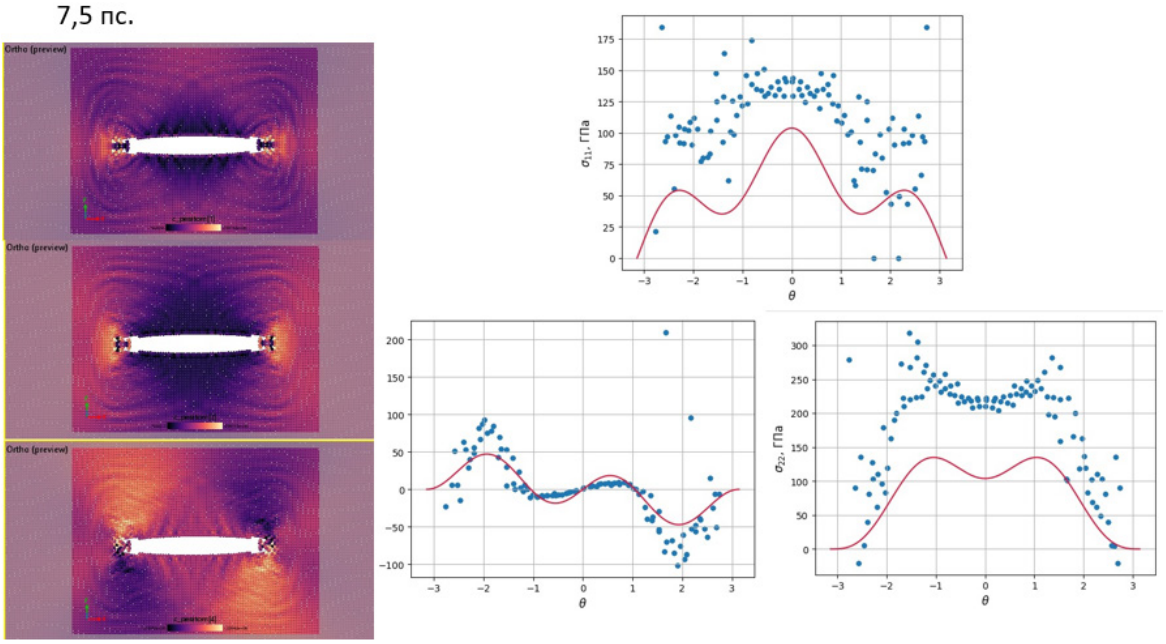


Рис. 5. Распределение полей напряжений и графики при 7.5 пс

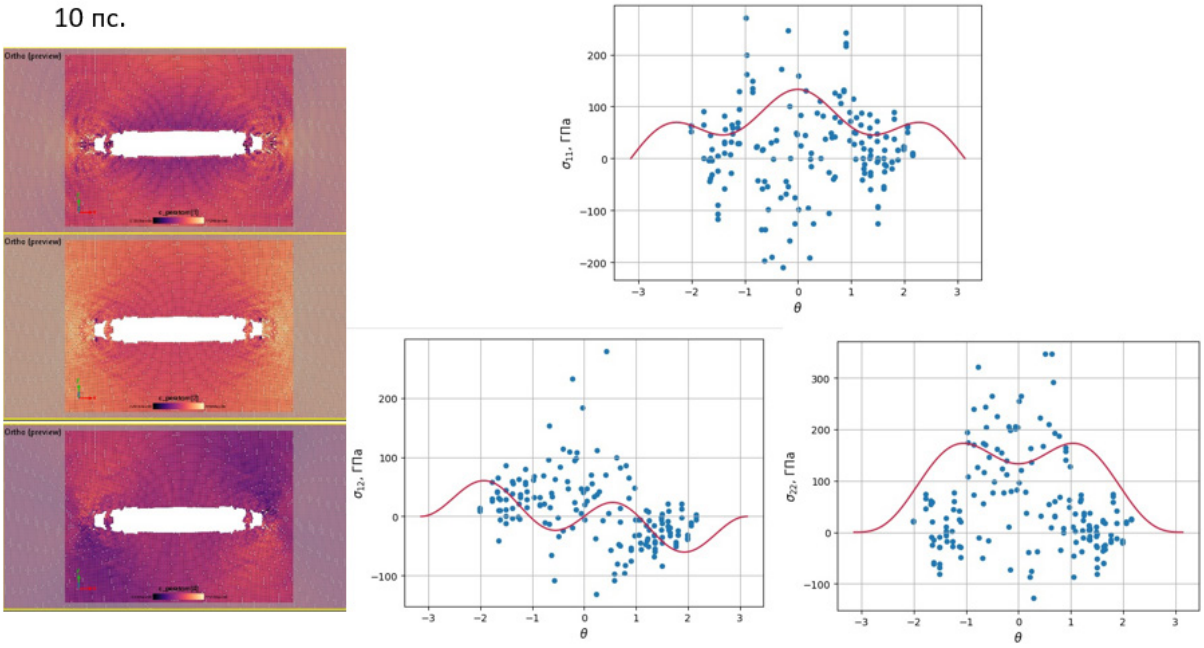


Рис. 6. Распределение полей напряжений и графики при 10 пс

Наблюдаем соответствие континуального и атомистического подхода для никеля с структурой ГЦК (для временных шагов 2,5; 5 пс), соответствие подходов для одной из компонент для временного шага 7,5 пс, для 10 пс наблюдаем отсутствие связи. Соответствие выполняется в приблизительно временных рамках действия закона Гука при температуре 300 К и скорости растяжения 0,1.

Заключение

Таким образом получаем соответствие континуального и атомистического подходов для никеля в гранецентрированной кубической решётке при временных шагах менее или равно 5 пс. При увеличении временного шага два метода показывают приращение разности между

собой. Отсюда следует, что при стремлении к временным шагам, где закон Гука не представляется в линейной форме, два подхода показывают большее несоответствие.

Литература

1. *Мушанкова К. А.* Применение молекулярно-динамического моделирования к анализу полей напряжений анизотропных материалов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4–6 декабря 2023 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 573–576.

2. *Степанова Л. В.* Экспериментальное и конечно-элементное опреде-ление коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть I / Л. В. Степанова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 4. – С. 237–249.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА В ГАРМОНИЧЕСКОМ ПОТОКЕ ТЕПЛА

О. И. Иванищева, А. А. Левченко

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье исследуется характер влияния различных параметров стохастической модели теплопроводности на значение характеристики температурного поля неоднородного материала. Построены зависимости математического ожидания и дисперсии стохастического температурного поля от глубины слоя и статистических характеристик неоднородности Рассмотрены экспоненциальный и нормальный законы распределения коэффициента теплопроводности среды. Моделирование 2D и 3D образов проведено в системе компьютерной математики.

Ключевые слова: гармонический поток тепла, неоднородное тело, функции Бесселя, стохастическая модель материала, коэффициент теплопроводности, математическое ожидание, дисперсия.

В работе рассмотрена стохастическая модель на основе краевой задачи теплопроводности для неоднородной среды. Моделирование проведено на основе полученной многопараметричекой модели с использованием разделов библиотеки системы компьютерной математики Mathcad [1].

1. Исследование температурного поля тела в гармоническом потоке тепла

1.1. Температурное поле слоя в гармоническом потоке тепла

Расположим координатные оси x, y в верхней плоскости, ограничивающей слой, ось z направим вниз. Таким образом, в рассматриваемых ниже задачах $\lambda(x, y, z) = \lambda(z)$.

Примем, что граничные условия на каждой из плоскостей, ограничивающих слой, одинаковы по всему ее протяжению.

При рассмотрении слоя толщиной h удобнее представить функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = B_1 \operatorname{sh} \gamma z + B_2 \operatorname{ch} \gamma z.$$

2. Распределение температур в неоднородном теле

2.1. Вариант материала полосы с неоднородностью теплофизических свойств, подчиняющейся степенному закону

Если коэффициент теплопроводности изменяется по закону

$$\lambda(z) = \lambda_0 (1 + \varepsilon z)^{\mu+1},$$

то $f(z)$ выражается через бесселевы функции [2]. Введем новую независимую переменную $\xi = 1 + \varepsilon z$, обозначим $\delta = \gamma / \varepsilon$, тогда [3]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\mu+1}{\xi} \frac{df(\xi)}{d\xi} - \delta^2 f(\xi) = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение приводится к уравнению Бесселя [4] подстановкой

$$f(\xi) = \xi^{-\frac{\mu}{2\nu}} (\xi),$$

в результате которой получаем

$$\frac{d^2v}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dv}{d\xi}-\delta^2 v-\frac{\mu^2}{4\xi^2}v=0.$$

Следовательно, решение уравнения (1) имеет вид

$$f(\xi)=\xi^{-\mu/2}\left[B_1 I_{\frac{\mu}{2}}(\delta\xi)+B_2 K_{\frac{\mu}{2}}(\delta\xi)\right]. \qquad (2)$$

Если μ есть нечетное число, то $f(\xi)$ выражается через элементарные функции.

В частном случае $\mu=0$, если коэффициент теплопроводности изменяется по линейному закону,

$$f(\xi)=B_1 I_0(\delta\xi)+B_2 K_0(\delta\xi). \qquad (3)$$

В задаче о полупространстве необходимо положить в (2), (3) $B_1=0$ для того, чтобы избежать неограниченного возрастания $f(\xi)$ при $z\to\infty$.

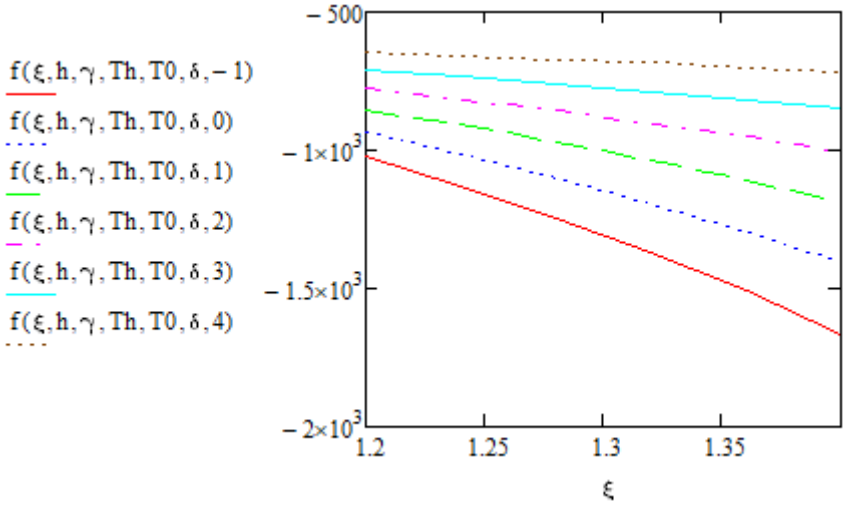


Рис. 1. Зависимость характеристики температурного поля от глубины слоя при различных значениях показателя степени функции, описывающей неоднородность теплофизических свойств материала

Увеличение показателя степени приводит к возрастанию температуры в каждом сечении. Это влияние увеличивается с глубиной слоя.

С увеличением параметра μ скорость изменения температуры уменьшается и стремится к постоянной величине.

3. Статистическая обработка результатов моделирования

3.1. Построение математического ожидания стохастического температурного поля

В случае экспоненциального закона распределения случайного параметра имеем

$$\left\langle f(\xi)\right\rangle=\int_0^\infty \xi^{-\mu/2}\left[\left(\frac{q_h}{\lambda_0\gamma\cosh\gamma h}-T_0\tanh\gamma h\right)I_{\frac{\mu}{2}}(\delta\xi)+T_0K_{\frac{\mu}{2}}(\delta\xi)\right]ke^{-k\lambda_0}d\lambda_0.$$

В случае нормального закона распределения случайного параметра имеем

$$\left\langle f(\xi)\right\rangle=\int_0^\infty \xi^{-\mu/2}\left[\left(\frac{q_h}{\lambda_0\gamma\cosh\gamma h}-T_0\tanh\gamma h\right)I_{\frac{\mu}{2}}(\delta\xi)+T_0K_{\frac{\mu}{2}}(\delta\xi)\right]\frac{1}{\frac{1}{k}\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-\left(\lambda_0-\frac{1}{k}\right)^2}{2\left(\frac{1}{k}\right)^2}}d\lambda_0.$$

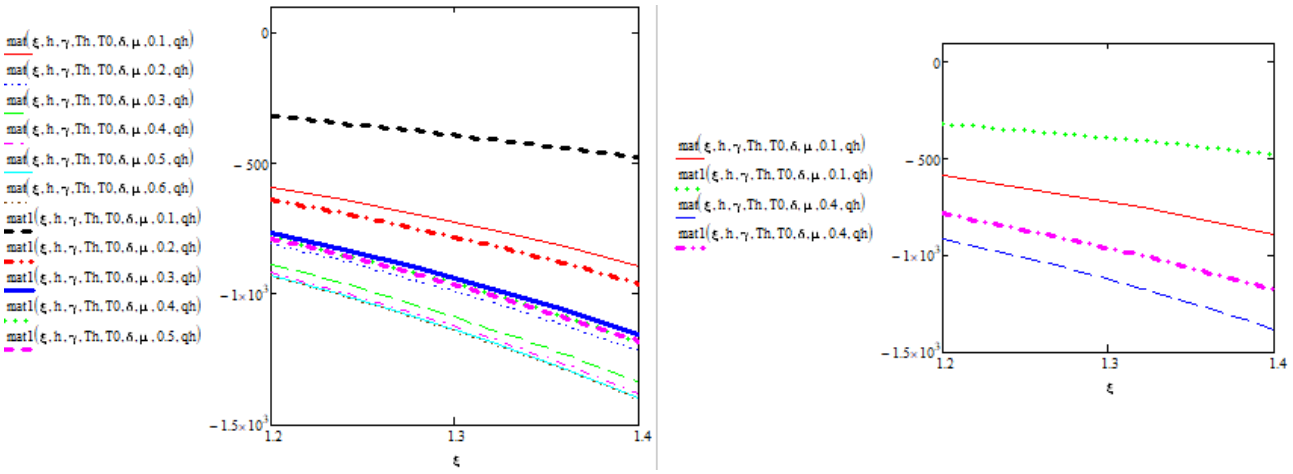


Рис. 2. Зависимость математического ожидания температурной характеристики от параметра модели k

Расчеты проведены при T0 = 200, Th = 100, $\mu = 0$.

Рассмотрены зависимости математического ожидания температурной характеристики при различных значениях параметра $k \in [0.1, 0.2, \ldots, 1]$.

Анализ показывает, что:

1) Увеличение параметра k приводит к уменьшению значения математического ожидания функции.

2) С увеличением глубины слоя влияние параметра k на математическое ожидание температурной характеристики увеличивается.

3) Чем ближе значение параметра k к 1, тем меньше разброс.

4) При нормальном законе распределения математическое ожидание принимает большие значения, чем при экспоненциальном. Влияние параметра k на математическое ожидание при нормальном законе более заметно.

5) Зависимости имеют монотонный характер.

3.2. Оценка дисперсии стохастической характеристики температуры

В случае экспоненциального закона распределения дисперсия стохастической характеристики имеет вид

$$\mathrm{D}(\xi) = \int_0^{\infty} \left(f(\xi) - \langle f(\xi) \rangle \right)^2 k e^{-k\lambda_0} d\lambda_0.$$

При нормальном законе распределения случайной величины дисперсия имеет вид

$$\mathrm{D}(\xi) = \int_0^{\infty} \left(f(\xi) - \langle f(\xi) \rangle \right)^2 \frac{1}{\frac{1}{k}\sqrt{2\pi}} \exp^{\frac{-\left(\lambda_0 - \frac{1}{k}\right)^2 * k^2}{2}} d\lambda_0.$$

Расчеты проведены при T0 = 200, Th = 100, $\mu = 0$.

Рассмотрены зависимости дисперсии температурной характеристики при различных значениях параметра $k \in [0.000001, 0.00001, \ldots, 1]$.

Анализ показывает, что:

1) Увеличение параметра k до значения, близкого к 0.1, приводит к увеличению значения дисперсии функции. При дальнейшем увеличении параметра до значения 1 и больше значение дисперсии стремится к 0.

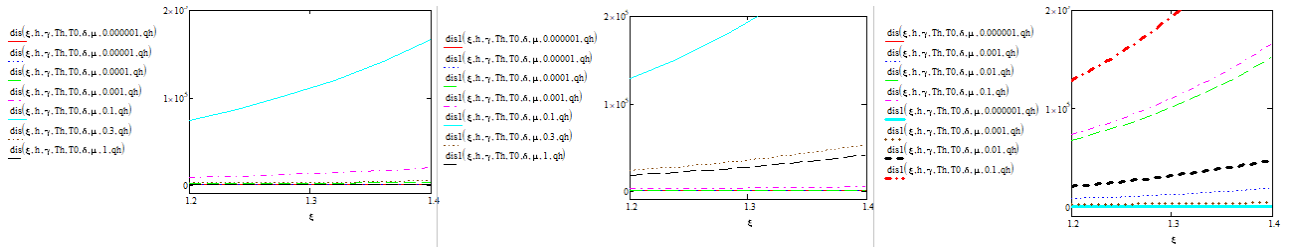


Рис. 3. Зависимость дисперсии температурной характеристики от параметра модели k

2) С увеличением глубины слоя влияние параметра k на дисперсию температурной характеристики увеличивается.

3) Чем ближе значение параметра k к 0, тем меньше разброс.

4) При нормальном законе распределения дисперсия принимает большие значения, чем при экспоненциальном. Влияние параметра k на дисперсию при нормальном законе более заметно.

5) Зависимости имеют монотонный характер.

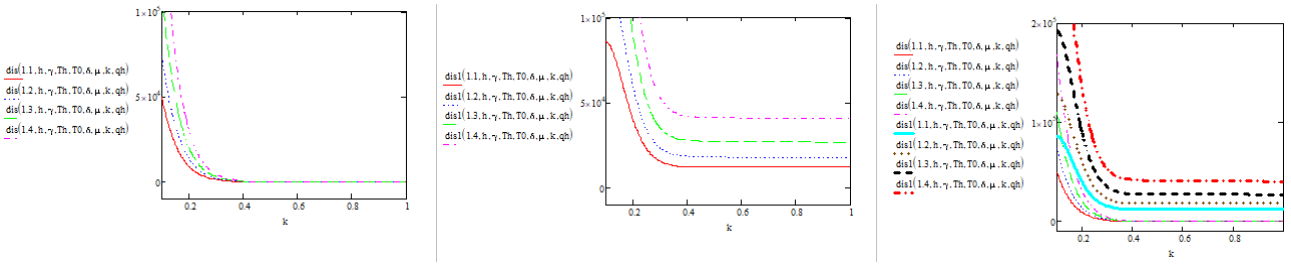


Рис. 4. Зависимость дисперсии температурной характеристики от глубины слоя ξ

Расчеты проведены при T0 = 200, Th = 100, $\mu = 0$.

Рассмотрены зависимости дисперсии температурной характеристики при различных значениях глубины слоя $\xi \in [1.1,1.2,\ldots,1.4]$.

Анализ показывает, что:

1) Увеличение глубины слоя ξ приводит к увеличению значения дисперсии функции.

2) При уменьшении значения параметра ξ влияние глубины слоя на дисперсию уменьшается.

3) Чем ближе значение параметра ξ к 0, тем меньше разброс.

4) При нормальном законе распределения значения дисперсии имеют больший разброс, чем при экспоненциальном. Влияние параметра ξ на дисперсию при нормальном законе более заметно.

5) Зависимости имеют монотонный характер.

Заключение

В работе исследован характер влияния параметров построенной модели на значение характеристики температурного поля неоднородного материала. Рассмотрены экспоненциальный и нормальный законы распределения коэффициента теплопроводности среды. Построены математическое ожидание и дисперсия стохастического температурного поля, проведен их сравнительный анализ.

Литература

1. *Кирьянов Д. В.* Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.

2. *Грей Э., Метьюз Г.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. – Перевод с англ. Коган С. Я. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1949. – 386 с.

3. *Коренев Б. Г.* Задачи теории теплопроводности и термоупругости. Решения в бесселевых функциях. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 400 с.

4. *Иванищева О. И.* Элементы статистического моделирования в задаче упругости со случайными параметрами: учебно-методическое пособие / О. И. Иванищева, Ю. Н. Прибытков. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. – 21 с.

УДК 528.9, 532.5

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЬЕФА ПОЙМ КРУПНЫХ РЕК

А. Н. Ильичева, А. Ю. Кликунова, А. В. Хоперсков

Волгоградский государственный университет

Аннотация. Исследование направлено на разработку метода построения цифровой модели рельефа (ЦМР) речной долины высокой точности. Итерационный подход построения ЦМР предполагает использование большого количества различных входных данных для достижения высокого разрешения полученных моделей, а также методов вычислительной гидродинамики. Верификация модели проводится через сравнение данных уровня воды с гидропостами Волгоградской области, что подтверждает её применимость для оценки гидродинамических процессов. Результаты исследования дают возможность более точно прогнозировать паводковые явления и принимать меры по сохранению водных ресурсов региона.

Ключевые слова: ГИС-технологии, цифровая модель гидрологического ландшафта, цифровая модель рельефа, пространственные данные, Волго-Ахтубинская пойма, Волжская ГЭС, гидродинамическое моделирование, вычислительный эксперимент, модель мелкой воды.

Введение

Изучение рельефа местности и его последующее моделирование является ключевой задачей современной географической науки. Развитие вычислительной техники и численных методов позволяют значительно расширить возможности для моделирования прикладных задач динамики жидкости для территорий, которые чувствительны к любым заметным гидрологическим изменениям [5, 6, 8, 9]. Особенно актуально это для анализа и прогноза состояния пойменных систем, где любое отклонение в водном балансе может привести к разрушительным последствиям для экосистем и местного хозяйства [6, 9].

Применение геоинформационного анализа и гидродинамического моделирования обеспечивает высокую точность в исследовании пространственного распределения воды, с учетом всех основных физических и топографических особенностей территории, и изменяющихся во времени метеорологических условий, гидрологических процессов и других факторов [3, 8].

Проблема негативного изменения водных ресурсов Волго-Ахтубинской поймы (ВАП), связанная с различными естественными процессами (эрозия берегов, изменения русла реки, каскад природных водоемов в период паводка) [7], антропогенными воздействиями и метеорологическими факторами [16], требует проведения мер по спасению поймы [6, 10]. Одним из вариантов решения является компьютерное моделирование паводковых событий с использованием современных высокопроизводительных вычислений, что позволяет прогнозировать последствия гидрологических изменений и разрабатывать эффективные защитные меры [6, 8].

Целью исследования является разработка метода построения высокоточной цифровой модели рельефа речных пойм с применением методов численного моделирования динамики поверхностных вод на примере северной части Волго-Ахтубинской поймы.

1. Математическая модель

Модель мелкой воды, основанная на уравнениях Сен-Венана, позволяет учитывать большое количество факторов (физических и метеорологических), влияющих на динамику тече-

ний жидкости при решении задач затопления территорий. Стандартная модель мелкой воды получается усреднением трехмерных уравнений гидродинамики [4, 13]:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial (Hu_x)}{\partial x}+\frac{\partial (Hu_y)}{\partial y}=q(\vec{\mathbf{r}},t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial (Hu_x)}{\partial t}+\frac{\partial (Hu_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial (Hu_xu_y)}{\partial y}=-gH\frac{\partial \eta}{\partial x}+Hf_x^{(M)}+Hf_x^{(q)}+Hf_x^{(turb)}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial (Hu_y)}{\partial t}+\frac{\partial (Hu_xu_y)}{\partial x}+\frac{\partial (Hu_y^2)}{\partial y}=-gH\frac{\partial \eta}{\partial y}+Hf_y^{(M)}+Hf_y^{(q)}+Hf_y^{(turb)}, \tag{3}$$

где H — глубина воды, $\vec{\mathbf{u}}=\{u_x,u_y\}$ — вертикально усредненная скорость воды, q — поверхностные источники воды, определяемые гидрографом плотины $Q(t)$, $\eta(x,y,t)=b(x,y)+H(x,y,t)$ — уровень воды, измеряемый от отметки дна (глубина слоя воды в метрах), $b(x,y)$ — неоднородный рельеф местности, $\vec{\mathbf{f}}^{(M)}=\{f_x^{(M)},f_y^{(M)}\}$ — сила гидравлического сопротивления, которая зависит от коэффициента трения по Маннингу, $\vec{\mathbf{f}}^{(q)}=\{f_x^{(q)},f_y^{(q)}\}$ — удельная сила, описывающая импульс, связанный с источником q, $\vec{\mathbf{f}}^{(turb)}=\{f_x^{(turb)},f_y^{(turb)}\}$ — вязкая сила из-за турбулентного трения, g — ускорение свободного падения.

Для численного интегрирования уравнений (1)–(3) и моделирования динамики поверхностных вод применяется CSPH-TVD метод [6, 14]. Он представляет собой базовую версию вычислительного модуля аппаратно-программного комплекса «EcoGIS-Simulation», разработанного для проведения высокопроизводительных вычислений на суперкомпьютерах с графическими сопроцессорами [11]. Программный модуль подготавливает все необходимые входные данные, включая пространственные и временные характеристики, подробно описанные в работах [5, 6]. Моделирование проводится на равномерной прямоугольной сетке с постоянным шагом.

2. Метод построения цифровой модели рельефа

Процесс построения ЦМР основан на итерационном подходе с использованием разнородных источников информации о высотных характеристиках территории [1, 15]. В основе метода лежит разработанный алгоритм с применением геоинформационных технологий. Он сочетает результаты гидрологических исследований с данными численного моделирования динамики поверхностных вод, что предполагает применение современных методов анализа пространственных данных, позволяющих учитывать особенности водоразделов, русел, прибрежных зон и других элементов рельефа, влияющих на динамику водных потоков (рис. 1).

При решении практической задачи затопления территории, изучение динамики течения жидкости требует детальной информации о свойствах осадков, поверхностных и подземных вод, придонном трении и уклоне донной поверхности, инфильтрации и сгонно-нагонных явлений. Поэтому первый этап построения ЦМР предполагает исследование речной поймы в рамках натурных гидрологических данных, а именно данных наблюдений об изменениях береговых линий многочисленных водоемов во время весеннего паводка.

Второй этап построения ЦМР сводится к созданию ряда тематических слоев карты высокого разрешения, содержащих в себе информацию о структуре рельефа исследуемой территории Волгоградской области:

1) глобальный рельеф поверхности суши, построенный на основе данных дистанционного зондирования Земли (SRTM и SRTMGL1);

2) модель рельефа дна исследуемого участка реки Волга на основе лоцманских карт: векторизация изобат для уточнения модели дна речной сети с добавлением абсолютных отметок

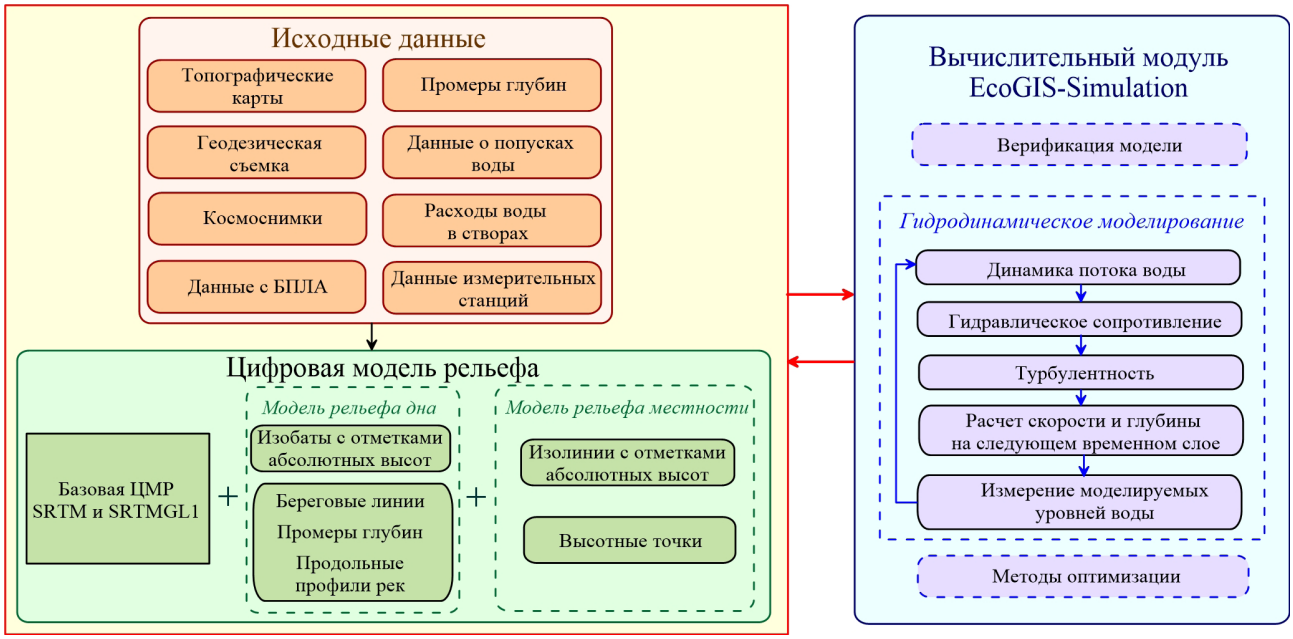


Рис. 1. Общая схема метода построения ЦМР

высот с шагом 0.5 метра, в соответствии с числовыми значениями на карте глубин водоемов; формирование матрицы высот на основе космических снимков и топографических карт для векторизации русловой системы; аппроксимация данных промеров глубин, распределенных на все узлы расчетной сетки, с последующим созданием матрицы с высотными данными речных русел; уточнение матриц высот путем использования данных о динамике береговых линий; построение цифрового продольного профиля Волго-Ахтубинской поймы;

3) модель рельефа местности на основе проектных планов: векторизация изолиний ериков, водоемов и озер; формирование точечного слоя абсолютных высот для создания модели рельефа местности вблизи исследуемой речной сети [2].

Дополнительная обработка матриц высот проводится с использованием различных методов сглаживания и сведение разнородной топографической информации в единую систему. Построенная ЦМР воспроизводит детализированное изображение русел рек Волга и Ахтуба, включая основные ерики и пойменную часть исследуемой территории (рис. 2).

Для оценки применимости модели рельефа в решении гидродинамической задачи затопления исследуемой территории Волгоградской области используем модель в качестве входных данных в расчетном аппаратно-программном комплексе «EcoGIS-Simulation». Результатом верификации является сравнение уровней воды, полученных в результате численного моделирования с использованием построенной ЦМР, с данными, зафиксированными на трех гидрологических постах Нижней Волги: Нижний бьеф Волжской ГЭС, речной порт г. Волгоград (расположенный на расстоянии 17.5 км ниже плотины Волжской ГЭС) и пгт. Светлый Яр (расположенный на расстоянии 60 км ниже плотины Волжской ГЭС). Отличие этих рядов данных не превышает 20 см при характерных глубинах реки Волга 5–10 м.

Заключение

В рамках исследования разработан и апробирован метод построения высокоточной цифровой модели рельефа на примере северной части Волго-Ахтубинской поймы, применяемый для задач гидродинамического моделирования. Использование метода CSPH-TVD в аппаратно-программном комплексе «EcoGIS-Simulation» позволило эффективно решить задачу численного моделирования движения воды с учетом реальных особенностей местности. Разрабо-

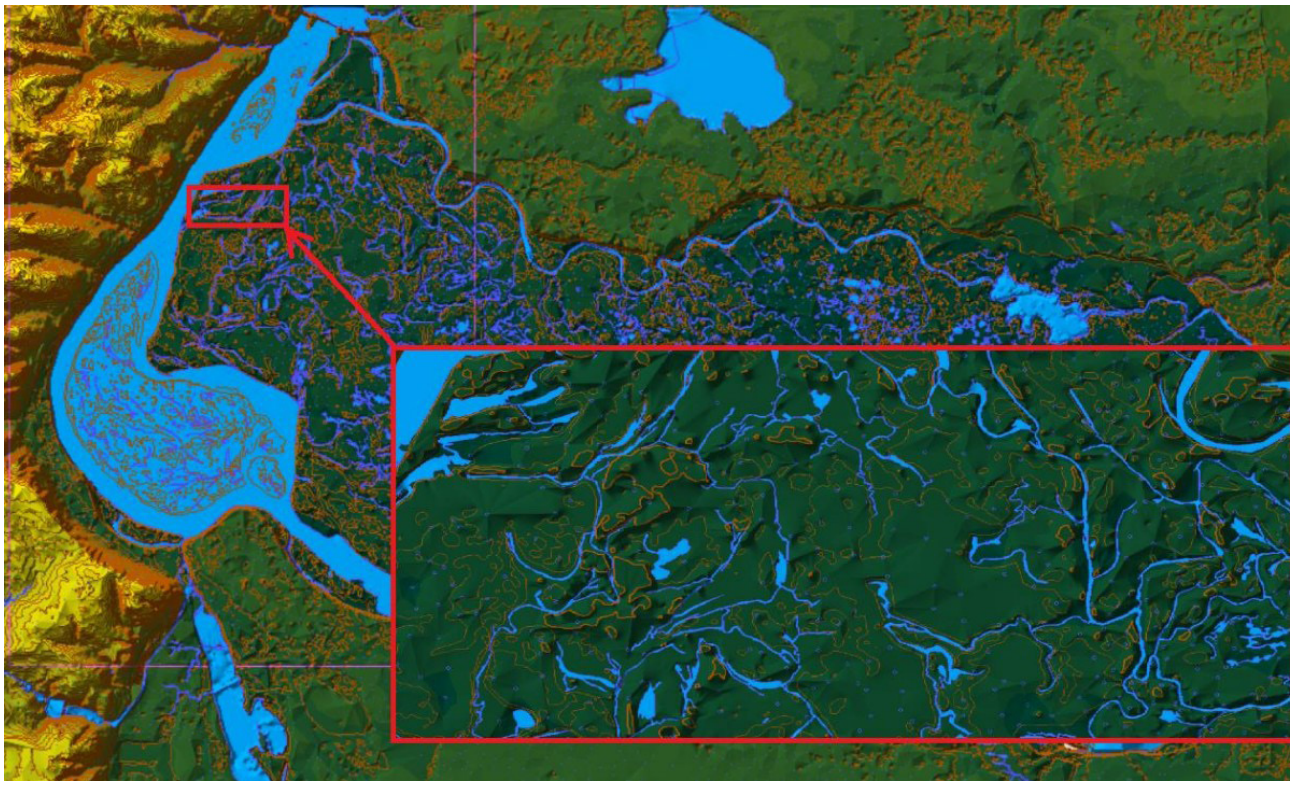


Рис. 2. Построенная цифровая модель рельефа северной части ВАП (размер элемента матрицы 10 м)

танный метод может быть использован для решения задач по управлению водными ресурсами и защиты пойменных территорий, подверженных затоплению, а также для повышения устойчивости экосистемы региона к неблагоприятным гидрологическим изменениям.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-71-00016, https://rscf.ru/project/23-71-00016/). Исследование проводится с использованием оборудования совместного исследовательского центра высокопроизводительных вычислительных ресурсов Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Литература

1. *Кликунова А. Ю.* Метод построения кадастровых карт затопления речных долин на основе гидродинамического и геоинформационного моделирования / А. Ю. Кликунова // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2023. – Т. 26, № 3. – С. 15–25.

2. *Мальцева А. Н.* Построение цифровой модели рельефа дна участка реки Волга / А. Н. Мальцева // Материалы Научной сессии в 2 томах. – Волгоград: Волгоградский государственный университет. – 2023. – Т. 2. – С. 73–77.

3. Геодинамическая эволюция и морфоструктурный анализ западной части арктического шельфа России / Н. О. Сорохтин, С. Л. Никифоров, С. М. Кошель, Н. Е. Козлов // Вестник Мурманского государственного технического университета. Науки о Земле и смежные экологические науки. – 2016. – Т. 19, № 1/1. – С. 123–137.

4. Численное моделирование самосогласованной динамики поверхностных вод, влекомых и взвешенных наносов: I. влияние промышленной добычи песка на безопасность судоходства

в русле р. Волга / С. С. Храпов, Е. О. Агафонникова, А. Ю. Кликунова [и др.] // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2022. – Т. 25, № 23. – С. 31–57.

5. *Храпов С. С.* Численное моделирование самосогласованной динамики поверхностных и грунтовых вод / С. С. Храпов // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2021. – Т. 24, № 3. – С. 45–62.

6. *Agafonnikova E. O.* Computer simulation of the Volga river hydrological regime: problem of water-retaining dam optimal location / E. O. Agafonnikova, A. Y. Klikunova, A. V. Khoperskov // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2017. – Vol. 10, № 3. – P. 148–155.

7. *Bondareva V. V.* Dynamics of vegetation in the Volga–Akhtuba floodplain (by the example of a transect near the settlement of Bolkhuny) / V. V. Bondareva, V. B. Golub // Biology Bulletin. – 2016. – Vol. 43, № 10. – P. 1370–1376.

8. *Voronin A.* Project Optimization for Small Watercourses Restoration in the Northern Part of the Volga-Akhtuba Floodplain by the Geoinformation and Hydrodynamic Modeling / A. Voronin, A. Vasilchenko , A. Khoperskov // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. – 2018. – Vol. 973. – P. 012064.

9. *Voronin A. A.* Control model of floodplain socio-economic development process / A. A. Voronin, I. I. Isaeva // Mathematical Physics and Computer Simulation. – 2023. – Vol. 26, № 2. – P. 16–31.

10. Designing Mechanisms of the Hydrological Regime Management of the Volga-Akhtuba Floodplain Based on Geoinformation and Hydrodynamic Modelling / A. A. Voronin, A. A. Vasilchenko, A. V. Pisarev, S. S. Khrapov, Yu. E. Radchenko // Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics. – 2016. – № 1 (32). – P. 24–37.

11 *Dyakonova T.* Numerical model of shallow water: the use of NVIDIA CUDA graphics processors // T. Dyakonova, A. Khoperskov, S. Khrapov // Communications in Computer and Information Science. Supercomputing: Second Russian Supercomputing Days, RuSCDays 2016. – 2016. – P. 132–145.

12. Modeling the Territorial Structure Dynamics of the Northern Part of the Volga-Akhtuba Floodplain / I. I. Isaeva, A. A. Voronin, A. V. Khoperskov, M. A. Kharitonov // Conference: 2021 3rd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – 2022. – №10 (4). – P. 313–318.

13. *Khoperskov A.* A Numerical Simulation of the Shallow Water Flow on a Complex Topography / A. Khoperskov, S. Khrapov // Numerical Simulations in Engineering and Science. – Rijeka : IntechOpen. – 2018. – № 13. – P. 237–254.

14. *Khrapov S. S.* Numerical Modeling of Hydrodynamic Accidents: Erosion of Dams and Flooding of Territories / S. S. Khrapov // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. – 2023. – Vol. 56, № 2. – P. 261–272.

15. *Klikunova A. Y.* Numerical hydrodynamic model of the Lower Volga / A. Y. Klikunova, A. V. Khoperskov // Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing. – 2018. – Vol. 1128, № 1. – P. 012087.

16. *Lebedeva S. V.* Flow Distribution, Flooding and Water Engineering Measures in the Volga-Akhtuba Floodplain Region: 2 Modeling / S. V. Lebedeva, I. V. Zemlyanov, A. A. Lomonosov // Russian Meteorology and Hydrology. – 2018. – Vol. 43. – P. 655–663.

УДК 004.054

ПЕНТЕСТИНГ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

А. Д. Истратов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Работа посвящена моделированию, реализации и анализу процесса проведения тестов на проникновение (пентестинга) информационных систем. Для моделирования атак создана тестовая модель в среде EVE-NG, включающая устройства, уязвимые к различным угрозам. В качестве инструментария использовались специализированные платформы, такие как Kali Linux и Metasploit Framework, а также сканеры уязвимостей Nmap.
Ключевые слова: кибератака, пентестинг, моделирование, Kali Linux, EVE-NG.

Введение

Информационные системы стали неотъемлемой и основной частью инфраструктуры большинства предприятий, организаций и производств. Однако параллельно с ростом их значимости увеличилось и число кибератак, что, в свою очередь, требует внимания к вопросам кибербезопасности. Определить наличие уязвимостей в такой системе возможно с помощью проведения тестирования на проникновение, или пентестинга. Пентестинг позволяет выявить уязвимости в системе до того, как они будут использованы злоумышленниками. Данная возможность является особенно важной когда речь заходит о критически важных информационных объектах.

1. Актуальность проблемы

Актуальность пентестинга в современных условиях обусловлена резким ростом числа и сложности кибератак. Организации по всему миру сталкиваются с новыми вызовами: хакеры используют более сложные методы атак, такие как целевые фишинговые кампании, эксплуатация уязвимостей нулевого дня и использование ботнетов, созданных на основе IoT-устройств. В таких условиях пентестинг становится ключевым элементом стратегии кибербезопасности, позволяя выявлять уязвимости до того, как ими воспользуются злоумышленники.

Так, Согласно данным Cybereason, 77 % компаний, которые проводили пентесты в 2023 году, сообщили о значительном улучшении уровня защиты их инфраструктуры, а Исследование компании Synopsys показало, что компании, проводившие регулярный пентестинг, снижали вероятность успешной атаки на 30–40 %.

2. Постановка задачи

При проведении пентестинга важной задачей является проектирование модели информационной системы, которая позволяет оценить уровень защищенности системы, обеспечиваемый выбранными решениями, и заблаговременно разработать эффективные механизмы борьбы с различными атаками.

Существует ряд подходов для моделирования систем, каждый из которых имеет определенные преимущества и недостатки.

Так одним из вариантов реализации может являться система имитационного моделирования (СИМ). Она представляет собой набор программных средств для создания имитационной

модели и ее симуляции (имитационного моделирования). При использовании СИМ процесс создания имитационных моделей упрощается за счет реализации атомарных компонентов (каналов, сетевых устройств, протоколов и моделей приложений), обычно используемых для создания моделей компьютерных систем. Наиболее известными примерами СИМ являются: Cisco Packet Tracer, GNS3, Omnit++, CORE и EVE-NG.

Однако наиболее точные результаты достигаются при натурном и полунатурном моделировании, при котором производится тестирование системы при помощи реальных инструментов реализации разного рода атак.

3. Реализация задачи

В качестве примера будет рассмотрена модель VLAN, простроенная с помощью системы виртуализации EVE-NG. Она будет представлять из себя 3 персональных компьютера на операционной системе Windows 7: Ultimate, которые соединены между собой сетевым коммутатором Switch. Так же одна из виртуальных машин, а именно “Win1” подключена напрямую к сети интернет “Net2”. Основным рабочим инструментом является виртуальная машина под названием “Linux”, которая основана на “Kali Linux”. С её помощью будет производится пентестинг устройств находящихся в VLAN (рис. 1).

Далее будет продемонстрирована работа виртуальной машины Linux. На рис. 2 продемонстрирована консоль, с помощью которой будет запущен графический инструмент Armitage. Получив права администратора, необходимо ввести Armitage.

Так как утилита была предустановлена заранее, происходит подключение к базе данных проекта Metasploit. На рис. 3 продемонстрирован главный экран Armitage. По центру будут выведены найденные устройства исследуемой сети. В нижней части экрана располагается консоль, которую так же можно задействовать. Используя встроенный Nmap Scan, были найдены устройства внутренней сети.

Кроме обнаруженных портов, Armitage предоставляет базу данных атак, которые могут быть реализованы с помощью выявленных уязвимостей. Так, перепробовав несколько предложенных атак, было найдено несколько успешных, которыми злоумышленник может воспользоваться. Одна из таких приведена рис. 4.

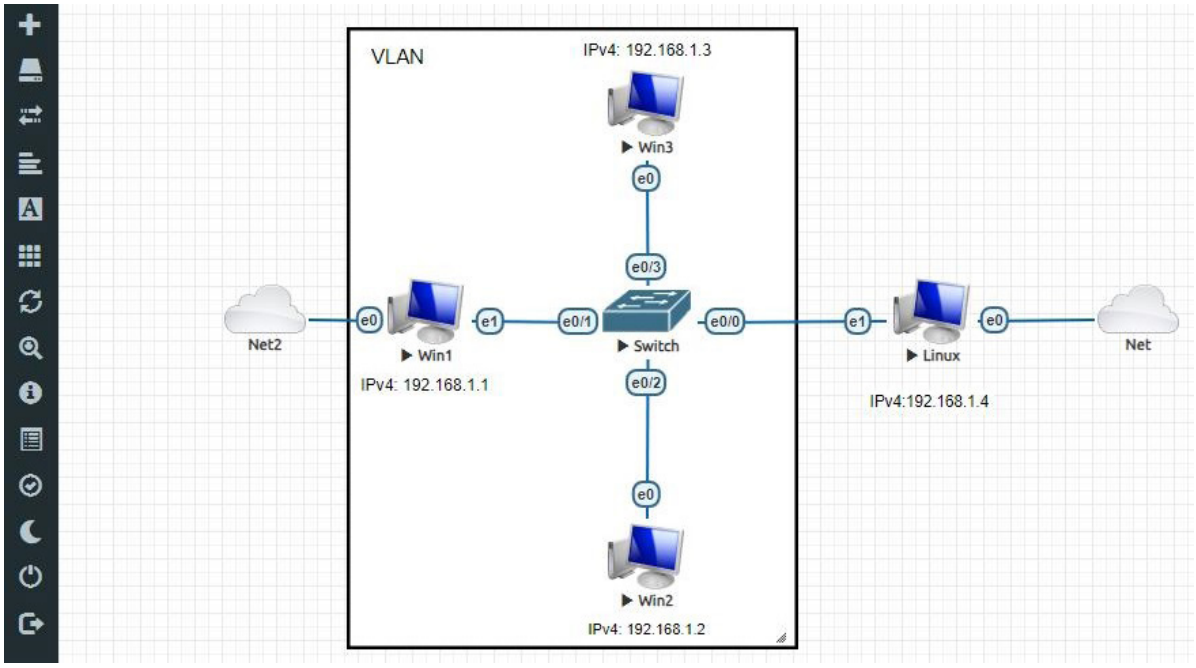


Рис. 1. Инфраструктура VLAN

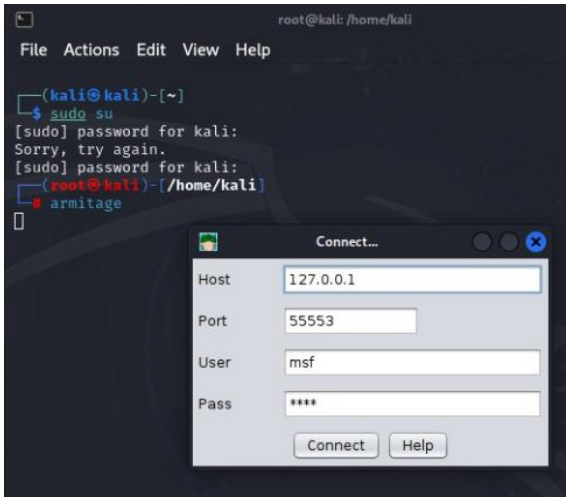


Рис. 2. Консоль Kali-Linux

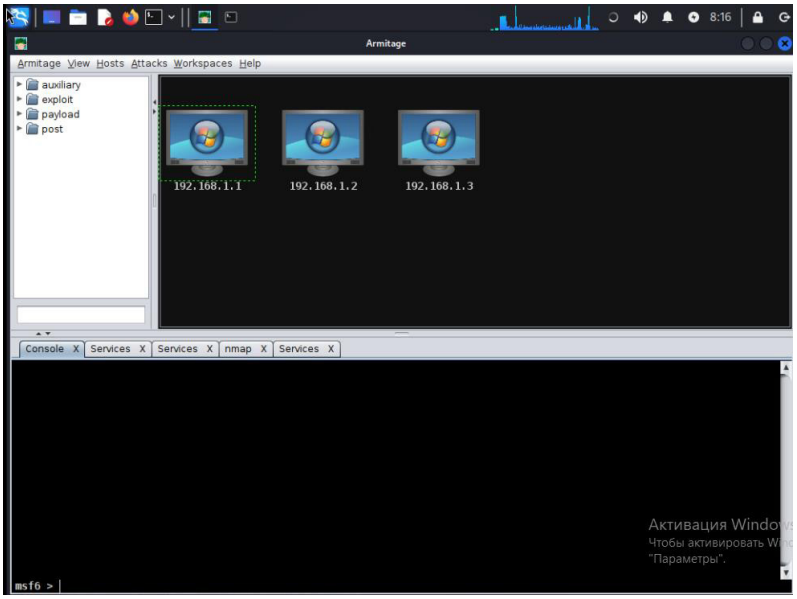


Рис. 3. Рабочий экран утилиты Armitage

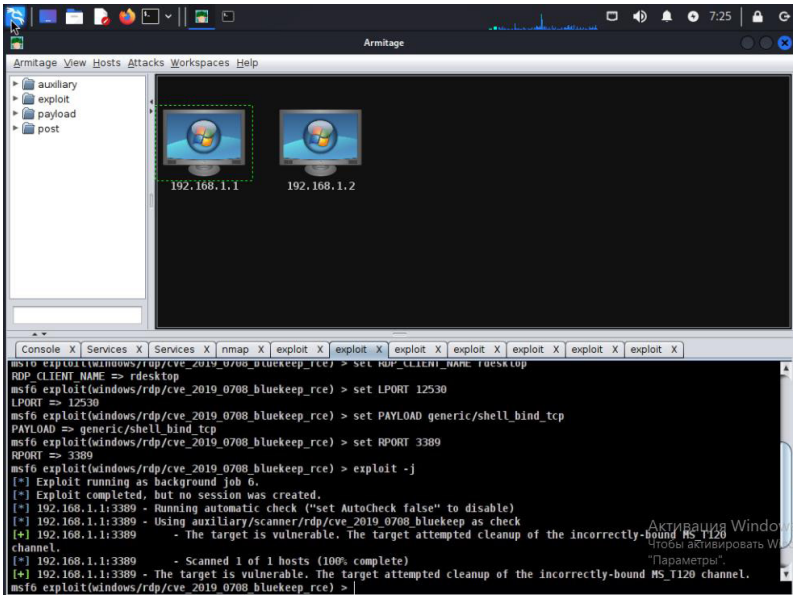


Рис. 4. Пример успешной атаки на host 192.168.1.1

Заключение

По итогам данной работы была смоделирована и проанализирована на уровне трафика DDoS-атака со стороны злоумышленника. Результаты исследования могут помочь оценить уязвимости сети и принять меры по повышению ее безопасности. Разработка новых методов и технологий по средствам полученных данных, а также постоянное обновление и улучшение существующих систем защиты являются ключевыми факторами в борьбе с DDoS-атаками и обеспечении безопасности сетевых инфраструктур.

Литература

1. Инфраструктурный пентест по шагам. – URL: https://habr.com/ru/companies/bastion/articles/767704/ (дата обращения: 29.10.2024).

2. Пентест: методы тестирования. – URL: https://ksb-soft.ru/blog/ekspertiza/pentest-metody-testirovaniya/ (дата обращения: 30.10.2024).

3. Установка и использование виртуальной сетевой лаборатории EVE-NG. – URL: https://habr.com/ru/articles/323014/ (дата обращения: 08.11.2024).

4. Строим киберполигон. – URL: https://xakep.ru/2021/08/09/eve-ng/ (дата обращения: 09.11.2024).

УДК 550.388.2

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ И СТРУКТУР В СРЕДНЕШИРОТНОЙ ИОНОСФЕРЕ В РАЗЛИЧНЫХ ГЕЛИОГЕОФИЗИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

С. А. Ишанов, Д. А. Савкин, П. М. Каратаева, А. В. Шоть, Е. П. Ставицкая

Балтийский федеральный университет имени И. Канта

Аннотация. С применением математической модели ионосферы и плазмосферы, разработанной на основе МГД-уравнений, были проведены исследования различных динамических процессов и нестационарных структур. Исследования проводились в существенно анизотропной среде в спокойных и возмущенных условиях. В примененной в рамках исследования модели была учтена как глобальная динамика ионосферной плазмы, так и основные процессы химической кинетики, взаимодействие плазмы с нейтральным ветром, амбиполярная диффузия и ряд других параметров. По результатам проведенных компьютерных экспериментов был проведен анализ пространственно-временного распределения основных показателей, характеризующих поведение ионосферно-магнитосферной плазмы.
Ключевые слова: ионосфера, плазмосфера, численное моделирование, вычислительный эксперимент, кинетика, неустойчивость, возмущение, магнитная гидродинамика.

Введение

Необходимо отметить, что проведение исследования физической природы, динамических характеристик и структуры околоземной космической плазмы имеет основополагающее значение для обеспечения работоспособности разнообразных космических аппаратов, осуществления радиосвязи, функционирования различных спутниковых систем. Без данных исследований невозможно планирование научных экспериментов в космическом пространстве и проведение анализа полученных данных, прогнозирования различных возмущений в ионосфере. Решение экологических проблем, стоящие перед человечеством, также невозможно без исследования ионосферы. Таким образом, исследование околоземной космической плазмы является актуальной проблемой физики плазмы и вычислительной математики [1, 2].

Изучение околоземной космической плазмы также тесно связано с такими направлениями современных исследований как изучение ускорения заряженных частиц, применением различных подходов к регистрации быстропротекающих реакций, исследованием процессов генерации электромагнитного излучения, распространения и рассеивания электромагнитных волн в плазме и плазмоподобных средах.

Изучение процессов зарождения и изменения пространственно-временных структур в ионосфере является составной и важной частью разрабатываемых в настоящее время геофизических приложений.

Целью работы является исследование динамики плазмы среднеширотной ионосферы и плазмосферы в возмущенных и спокойных условиях с учетом широкого спектра геофизических факторов, ответственных за образование этих структур: сложного состава ионосферной плазмы, диффузии электронно-ионного газа, фотохимии, дипольной геометрии геомагнитного поля, электрического дрейфа, ионосферно-плазмосферного обмена, кинетики сверхтепловых электронов [1–3].

Используемая в данной работе численная модель системы ионосфера-плазмосфера, основанная на системе уравнений магнитной гидродинамики, позволяет рассчитывать концентрации, температуры и скорости ионов H^+, He^+, O^+, N^+, N_2^+, O_2^+, NO^+ и электронов вдоль геомагнитной силовой трубки от высоты 125 км до нескольких радиусов Земли.

В статье представлены результаты некоторых вычислительных экспериментов в различных гелиофизических условиях, проведенных для средних широт.

1. Описание математической модели

При проведении исследований было сделано предположение, что макроскопическое движение плазмы происходит вдоль геомагнитного поля. Использование дипольной системы координат сводит трехмерную физическую задачу трехмерного движения плазмы к двумерной математической задачи от двух переменных: s — координата вдоль силовой линии; t — время. Полученная таким образом математическая модель основана на часто применяемом подходе — численном решении системы уравнений гидродинамики частично ионизированной плазмы для ионов и электронов. Представим систему уравнений непрерывности, импульса и теплового баланса для заряженных компонентов [3, 4] в терминах концентрации n_α, потока $n_\alpha u_\alpha$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial A n_\alpha u_\alpha}{\partial s} + L_\alpha n_\alpha = Q_\alpha \tag{1}$$

$$\frac{\partial n_\alpha u_\alpha}{\partial s} + \frac{1}{A}\frac{\partial A n_\alpha u_\alpha^2}{\partial s} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial s} = F_\alpha \tag{2}$$

где n_α, u_α, p_α — концентрация, скорость и давление ионов сорта α; A — расходимость силовых линий магнитного поля (коэффициент, обусловленный криволинейностью системы координат); L_α — скорость рекомбинации; Q_α — функция источников ионов сорта α; f_α и F_α — коэффициенты, обусловленные внешними силами — силой тяжести, силой Лоренца, силами трения с ионами другого сорта и нейтральными частицами; пространственная координата s отсчитывается вдоль силовой линии магнитного поля.

$$F_\alpha = -g\sin I + \sum_{j\neq\alpha} S_{\alpha j}(u_\alpha - u_j) + R_\alpha(V_{nx}\cos I - u_\alpha) - \frac{1}{m_\alpha N_e}\frac{\partial P_e}{\partial s}, \tag{3}$$

где g — ускорение силы тяжести;

I — магнитное наклонение;

$S_{\alpha j}$ — коэффициент силы трения ионов сорта α и сорта j;

R_α — коэффициент силы трения ионов сорта α с нейтральными частицами;

V_{nx} — меридиональная составляющая скорости нейтрального ветра;

N_e и P_e — электронная концентрация и давление.

Положим справедливым условие квазинейтральности плазмы

$$N_e = \sum_\alpha n_\alpha. \tag{4}$$

Учет взаимодействия плазмы с горизонтальным термосферным ветром на ионосферных высотах проводится так же, как в [2].

Уравнения движения нейтрального газа записываются в виде

$$\frac{\partial V_{nx}}{\partial t} = \frac{\mu}{\sin^2 I}\frac{\partial^2 V_{nx}}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho_n}\sum_\alpha n_\alpha R_\alpha m_\alpha (V_{nx} - u_\alpha\cos I) + 2\Omega\sin\phi V_{ny} - \frac{1}{\rho_n}\frac{P_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V_{ny}}{\partial t} = \frac{\mu}{\sin^2 I}\frac{\partial^2 V_{ny}}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho_n}\sum_\alpha n_\alpha R_\alpha m_\alpha V_{ny} - 2\Omega\sin\phi V_{nx} - \frac{1}{\rho_n}\frac{\partial P_n}{\partial y}.$$

Здесь V_{ny} — зональная составляющая скорости нейтрального ветра, x и y — оси локальной декартовой системы координат (ось x направлена на юг, ось y — на восток), μ — коэффициент кинематической вязкости, определяемый плотностью и температурой нейтральной атмосферы, Ω — угловая скорость вращения Земли, ϕ — географическая широта, ρ_n и P_n — плотность и давление нейтральной атмосферы.

Нестационарные уравнения фотохимического равновесия для молекулярных ионов O_2^+, NO^+, N_2, записываются в виде

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = Q_i - \alpha_i n_i, \ \ i = 3,\ 4,\ 5 \tag{5}$$

Члены θ_α, входящие в уравнения теплового баланса (3)–(4), которые учитывают упругие и неупругие процессы обмена энергией между заряженными частицами и нейтральными составляющими, взяты из [5]. Для расчета P_g согласно [7], решалось кинетическое уравнение для сверхтепловых электронов.

Численное решение системы уравнений модели осуществлялось вдоль геомагнитной силовой линии с применением метода конечных разностей. Линеаризация разностных уравнений проводилась с использованием значений неизвестных функций, взятых с предыдущего временного слоя, с последующими итерациями по нелинейности и связанности уравнений. При решении системы уравнений (1)–(2) использован подход, приведенный в [9, 10]. Сначала запишем уравнение (2) в дивергентной форме [3]:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A n_i v_i^2}{\partial s} + \frac{\partial n_i v_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial s} = F_i. \tag{6}$$

Здесь F учитывает действие внешних сил:

$$F_i = n_i \gamma_i + v_i (Q_i - \alpha_i n_i),$$

$$\gamma_i = \frac{R_i}{m_i}(v_{nx}\cos I - v_i) - g\sin I + \frac{S_{ij}}{m_i}(v_j - v_i) - \frac{1}{m_i N_e}\frac{\partial p_e}{\partial s}.$$

Используя метод суммарной аппроксимации [11], можно разделить исходную систему уравнений на последовательно решаемую систему уравнений переноса

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial A n_i v_i}{\partial s} = 0, \ \ \frac{\partial n_i v_i}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial A n_i v_i^2}{\partial s} + \frac{\partial p_i}{\partial s} = 0 \tag{7}$$

и систему обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающих элементарные процессы (фотохимию и столкновения)

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \alpha_i n_i = Q_i, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \beta_i v_i = f_i \tag{8}$$

где β_i и f_i учитывают силы взаимодействия (сила тяжести, электрическая сила, силы трения ион-ион, ион-нейтрал):

$$\beta_i = \frac{S_{ij}}{m_i} + \frac{R_i}{m_i}; \ \ f_i = \gamma_i + \beta_i v_i.$$

Решение уравнений (8) дается формулами

$$\hat{n}_i = n_i e^{-\tau\alpha_i} + \frac{Q_i}{\alpha_i}(1 - e^{-\tau\alpha_i}); \ \ \hat{v}_i = v_i e^{-\tau\beta_i} + \frac{f_i}{\beta_i}(1 - e^{-\tau\beta_i}),$$

где n_i, v_i — концентрация и скорость, полученные решением системы (7); $\hat{n}_i$, $\hat{v}_i$ — результирующие значения концентрации и скорости, полученные за два шага: «перенос + элементарные взаимодействия».

Для решения системы уравнений переноса (7) применялся алгоритм, основанный на явной консервативной схеме [9, 11].

2. Результаты вычислительных экспериментов

В рамках работы решение нестационарных задач динамики околоземной космической плазмы при учете спокойных и возмущенных условий проводилось с применением усовершенствованных вычислительных методов и реализующих их алгоритмов.

Для расчета пространственно-временных вариаций температуры нейтральной атмосферы и концентраций компонентов O_2, N_2, O, H, He, N была использована эмпирическая модель температуры, приведенная в [12].

Первый вычислительный эксперимент был проведен для следующих условий: использовалась замкнутая силовая трубка $L = 3{,}2;$ солнечная активность была определена значением $F_{10.7} = 150.$ Расчеты проводились на начало года в Северном полушарии.

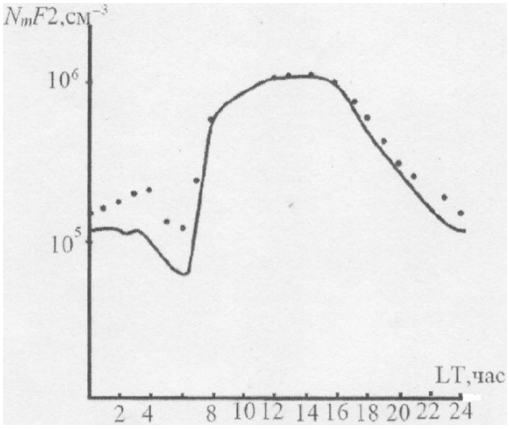


Рис. 1. Сравнение суточного хода значений N_mF2, полученных с помощью компьютерных расчетов на базе ионосферно-плазмосферной модели (изображена сплошной линией) с экспериментальными данными (кружки на графике)

В данном случае F2 — это область, в которой основным ионом является ион O+. При этом считаем, что распределение данного иона в этой области регулируется процессами амбиполярной диффузии и термосферными ветрами.

Необходимо учитывать, что плазмосфера имеет первостепенное значение для формирования структуры F2-области и внешней ионосферы. Поток ионосферной плазмы вдоль геомагнитного поля из плазмосферы ночью поддерживает F2-слой.

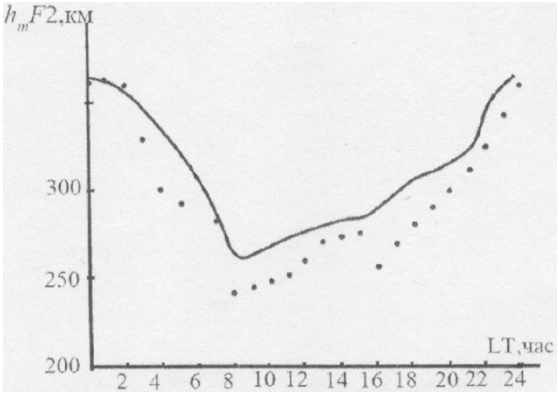


Рис. 2. Сравнение суточного хода значений h_mF2, где модельные расчеты изображены сплошной линией, а экспериментальные изменения h_mF2 обозначаются кружками

В ходе исследований с помощь модели системы ионосфера – плазмосфера были проведены расчеты изменения концентрации электронов в главном ионосферном максимуме (N_mF2) и высоты в максимуме (h_mF2) в течение суток. Результаты приведены на рис. 1 и 2. На рис. 3 представлены расчеты суточной вариации потока ионов O^+.

Сравнение полученных в ходе компьютерных экспериментов расчетных данных с результатами экспериментальных данных, взятых из работы [13], показывает сопоставимость данных.

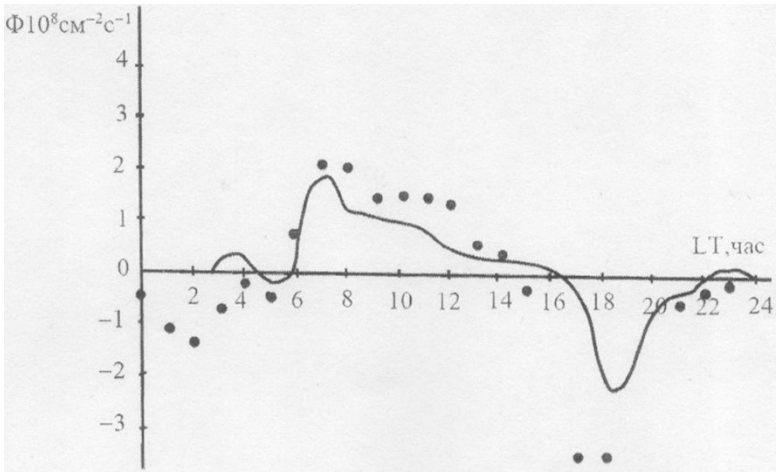


Рис. 3. Сравнение рассчитанной суточной вариации потоков монов O^+ для высоты в 635 км, изображенной сплошной линией, и результатов измерений из [13]

Для второго вычислительного эксперимента была выбрана замкнутая геомагнитная трубка $L = 2$ в условиях равноденствия (81 день) при уровне солнечной активности $F_{10.7} = 80$.

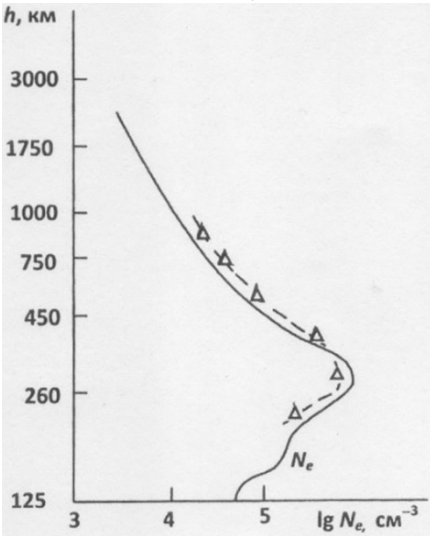


Рис. 4. Сравнение высотного распределения ионных компонент в полдень. На рисунке непрерывная линия обозначает численные расчета, а Δ — экспериментальные данные

На рис. 4 и 5 приведены высотные распределения ионных компонент для дневных и ночных условий: теоретические расчеты и данные экспериментальных измерений [14]. Можно отметить неплохое совпадение результатов.

Для дальнейших исследований была выбрана задача моделирования процессов модификации магнотосферных областей ионосферы при разных техногенных выбросах.

На рис. 6 в виде сплошных линий представлены профили, которые соответствуют возмущенных условиям, а в виде штриховки — «местное» несопряженное воздействие с 12.00 LT. Темными кружками отмечено антропогенное возмущение в Северном и Южном полушариях в 12.00 LT, а светлые кружки обозначают воздействие в Северном полушарии в момент 12.00 LT и Южном полушарии в 13.00 LT.

Для третьего вычислительного эксперимента был выбран расчет суточных вариаций ионосферных параметров для силовой трубки с параметрами Мак-Илвейна $h = 2$ (наибольшая высота над поверхностью Земли 6356 км) для средней солнечной активности ($F_{10.7} = 150$) и начала года — зима в Северном полушарии, лето в Южном полушарии.

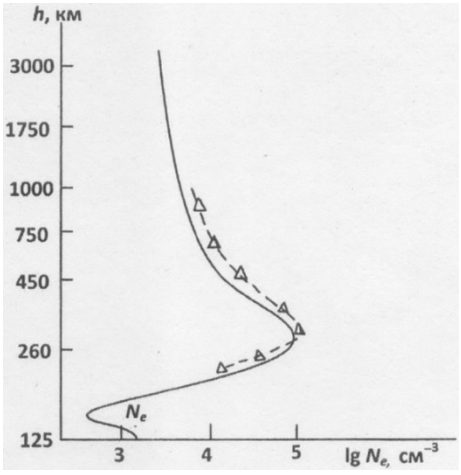


Рис. 5. Высотное распределение ионных компонент в полночь: непрерывная линия — модельные расчеты; Δ — экспериментальные данные

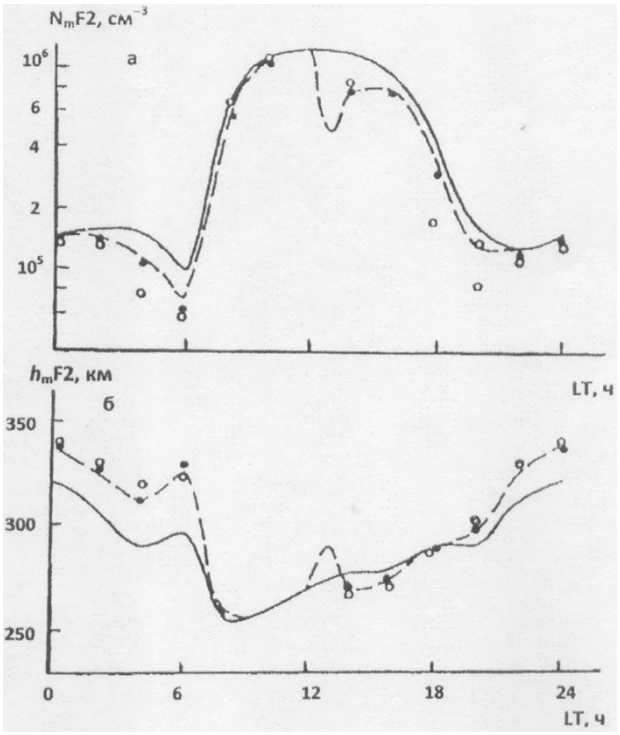


Рис. 6. Временные вариации N_mF2 (а), h_mF2 (б) в Северном полушарии

На рис. 6 показан суточный ход N_mF2, h_mF2 при выбросах воды для зимних условий (момент возмущения LT = 12 час) в Северном полушарии, моменты возмущения ионосферы Южного полушария LT = 12, 13 час. Значения N_mF2 для «местного» несопряженного выброса в Северном полушарии в сравнении с фоном уменьшились (временной интервал 0–6 час.) на 25 %, а для разнесенных по времени и пространству воздействий уменьшились примерно в 2 раза.

Подобное поведение параметров N_mF2, h_mF2 наблюдается и для Южного полушария. Это можно объяснить тем, что плазмосфера сильнее обедняется в случае сопряженных воздействий, и в ночное время это обеднение проявляется наиболее полно.

Заключение

В данной статье приведены результаты ряда вычислительных экспериментов в различных гелиогеографических условиях для исследования пространственно-временных структур и процессов в околоземной космической плазме. Расчеты проводились с применением гидродинамической усовершенствованной модели ионосферно-плазмосферных взаимодействий.

В уравнениях, из которых состоит модель, последовательно и согласованно учтены процессы образования и потерь ионов, оценено влияние диффузии плазмы с учетом нейтрального ветра, обмен энергии, получающейся в результате столкновений ионов, электронов и нейтральных частиц. Также учтена теплопроводность плазмы и взаимодействие с сверхтепловыми электронами.

Результаты, полученные в ходе исследования, показали, что корректная постановка задачи исследования системы ионосфера — плазмосфера задается для полной системы уравнений движения и непрерывности гиперболического типа.

Численная устойчивость и функционирование построенной математической модели по входным данным подтверждены аналитическими решениями задач динамики и энергетики околоземной космической плазмы.

В результате компьютерного эксперимента по исследованию нестационарных процессов и структур в среднеширотной ионосфере получены и проведены сравнительные анализы пространственно-временных распределений макроскопических параметров тепловой плазмы в геомагнитных силовых трубках при различных геофизических ситуациях.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение от 28.02.2024 № 075-02-2024-1430).

Литература

1. *Мингалев О. В., Мингалев И. В., Малова Х. В., Мерзлый А. М., Мингалев В. С., Хабарова О. В.* Описание крупномасштабных процессов в околоземной космической плазме // Физика плазмы. – 2020. – Т. 46, № 4. – С. 329–350.

2. Современные достижения в плазменной гелиогеофизике // Под редакцией Зеленого Л. Н., Петруковича А. А., Веселовского И. С. – М. : Физматлит, 2019. – 688 с.

3. *Латышев К. С., Зинин Л. В., Ишанов С. А.* Математическое моделирование околоземной космической плазмы // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. – 2008. – Т. 7–1, Ч. 3. – С. 337–349.

4. *Ишанов С. А., Мацула П. В.* Вычислительный эксперимент при моделировании динамики антропогенных возмущений ионосферно-магнитосферной плазмы // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 6. – С. 128–136.

5. *Брюнелли Б. Е., Намгаладзе А. А.* Физика ионосферы. – М. : Наука, 1988. – 528 с.

6. *Richards P. G.* Reexamination of ionospheric photochemistry // J. Geophys. Res. – 2011. – V. 116, iss A8. – A08307.

7. *Barakat A. R., Schunk R. W., Moore T. E., Waite J. H.* Ion escape fluxes from the terrestrial high-latitude ionosphere // J. Geophys. Res. – 1987. – V. 92, № 11. – P. 12255–12266.

8. *Кринберг Н. А., Тащилин А. В.* Ионосфера и плазмосфера. – М. : Наука, 1984. – 189 с.

9. *Елизарова Т. Г., Четверушкин Б. Н.* Об одном вычислительном алгоритме для расчета газодинамических течений // ДАН СССР. – 1984. – Т. 279, № 1. – С. 80–83.

10. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – М. : Наука, 1983.

11. *Chetverushkin B., D'Ascenzo N., Ishanov S., Saveliev V.* Hyperbolic type explicit kinetic scheme of magneto gas dynamics for high performance computing systems // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. – 2015. – 30(1). – P. 27–36.

12. *Hedin A. E.* Thermospheric model // J. Geophys. Res. – 1987. – V. 92, № A5. P. 4649–4662.

13. *Evans J. V.* A Study of F2-region daytime vertical ionisation fluxes at Millstone Hill during 1969 // Planet and Space Sci. – 1975. – Vol. 23, N 11. – P. 1461–1482.

14. *Evans J. V.* Observation of F-region vertical velocities at Millstone Hill. 1. Evidence for drifts due to expansion, contraction and winds. // Radio Sci. – 1971. – Vol. 6, N 5. – P. 542–557.

УДК 519.6

РАЗРАБОТКА ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА ТРОПИЧЕСКОГО ЦИКЛОНА ПО УПРОЩЁННОЙ МОДЕЛИ

А. В. Калач[1], А. А. Парамонов[1], А. Л. Шкерин[1], Т. Е. Смоленцева[1], К. А. Кузнецова[2]

[1]Российский технологический университет – МИРЭА
[2]Воронежский институт ФСИН России

Аннотация. Приведены результаты анализа динамики процесса эволюции тропического циклона с использованием численных методов. Исследовано влияние различных факторов, таких как скорость диффузии, влияние ветра и интенсивность шума, на развитие циклона, с использованием двумерной сеточной модели. Целью исследования является проверка гипотезы о влиянии выбранных факторов на устойчивость и динамическое поведение тропического циклона. Также приведены результаты сравнительного анализа результатов аналитического и численного моделирования эволюции тропического циклона.
Ключевые слова: тропический циклон, численное моделирование, диффузия, влияние ветра, атмосферные явления, динамические системы.

1. Упрощённая модель тропического циклона

Упрощённая модель тропического циклона основана на двухмерной дискретной сетке размером $n \times m$ ячеек. Атмосферное состояние представлено такими параметрами, как давление (в гПа), температура (в Кельвинах), и влажность (в долях). Инициализация модели начинается с однородного распределения этих параметров по всей сетке, что обеспечивает условия для последующего возникновения градиентов, способствующих образованию циклона.

Начальная точка циклона была выбрана в центре сетки (широта 10.0, долгота 80.0). Предлагаемая система уравнений учитывает диффузионные процессы, влияние ветра и стохастический шум. Вектор скорости ветра задается случайным образом и применяется для переноса значений давления, температуры и влажности в соседние ячейки. Диффузия в модели учитывает обмен значениями между соседними ячейками, что позволяет моделировать распространение влияния центральной области циклона на окружающие участки.

Для моделирования трех ключевых параметров — давления, температуры и влажности — были использованы следующие формулы. Уравнение изменения давления:

$$P_{(i,j)}^{(n+1)} = P_{(i,j)}^{n} + D_P * (P_{(i+1,j)} + P_{(i-1,j)} + P_{(i,j+1)} + P_{(i,j-1)} - 4 * P_{(i,j)}) + W_P + \eta_P, \quad (1)$$

где $P_{(i,j)}^{(n+1)}$ — давление в ячейке (i, j) на текущем временном шаге.

D_P — коэффициент диффузии давления.

W_P — вклад от ветра, который учитывает влияние горизонтального переноса атмосферных масс.

η_P — шум для моделирования стохастических флуктуаций в атмосфере.

Уравнение изменения температуры:

$$T_{(i,j)}^{(n+1)} = T_{(i,j)}^{n} + D_T * (T_{(i+1,j)} + T_{(i-1,j)} + T_{(i,j+1)} + T_{(i,j-1)} - 4 * T_{(i,j-1)}) + W_T + \eta_T, \quad (2)$$

где $T_{(i,j)}^{(n+1)}$ — температура в ячейке (i, j) на текущем временном шаге.

D_T — коэффициент диффузии температуры, представляющий процесс теплопереноса.

W_T и η_T аналогичны тем, что используются для давления.

Уравнение влажности:

$$H_{(i,j)}^{(n+1)} = H_{(i,j)}^{n} + D_H * (H_{(i+1,j)} + H_{(i-1,j)} + H_{(i,j+1)} + H_{(i,j-1)} - 4 * H_{(i,j)}) + W_H + \eta_H, \quad (3)$$

где $H_{(i,j)}^{(n+1)}$ — влажность в ячейке (i, j)

D_H — коэффициент диффузии влажности, который определяет распространение водяного пара в атмосфере.

W_H и η_H аналогичны тем, что используются для давления и температуры.

Для моделирования был реализован метод конечных разностей. В каждом временном шаге выполняются следующие вычисления:

• **Инициализация Состояния:** на каждом шаге инициализируется текущее состояние давления, температуры и влажности для всех ячеек сетки.

• **Расчёт Диффузии:** используется метод конечных разностей для учета обмена значениями между соседними ячейками, изменения значений которых описываются уравнениями, приведёнными выше.

• **Влияние Ветра:** Используя случайные компоненты скорости ветра, вычисляется перенос давления, температуры и влажности с учетом коэффициента влияния ветра.

• **Добавление Стохастического Шума:** для учета случайных изменений вводится стохастический шум.

Эти этапы повторяются на каждом временном шаге, и состояние атмосферы обновляется до следующего временного момента. Данный подход позволяет моделировать эволюцию упрощённого тропического циклона на протяжении заданного количества временных шагов. Модель использует фиксированное количество временных шагов для анализа развития циклона в течение определенного периода, что позволяет эффективно оценивать влияние различных параметров.

2. Результаты численного эксперимента

Для первой конфигурации, с низкой скоростью диффузии и минимальным влиянием ветра с отсутствием стохастического шума, наблюдалось незначительное изменение давления и температуры в центральной области циклона, что указывает на слабую эволюцию системы (рис. 1).

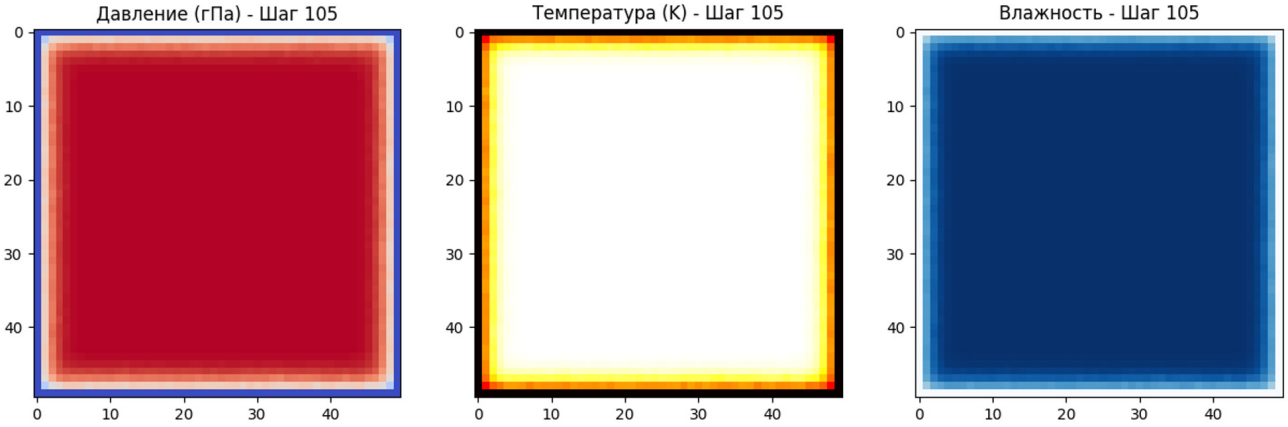


Рис. 1. Результаты моделирования с коэффициентами диффузии, скорости ветра и стохастического шума 0.01, 0.01, 0

В то же время, для конфигурации с высоким влиянием ветра и шума, модель продемонстрировала значительное усиление циклонической активности, что привело к снижению давления в центральной области и увеличению градиента давления от центра к краям (рис. 2).

Результаты также показали, что стохастический шум оказывает значительное влияние на структуру циклона. В моделях с высоким уровнем шума наблюдались более хаотичные изменения давления и температуры, что привело к неустойчивой и нерегулярной форме циклона (рис. 3).

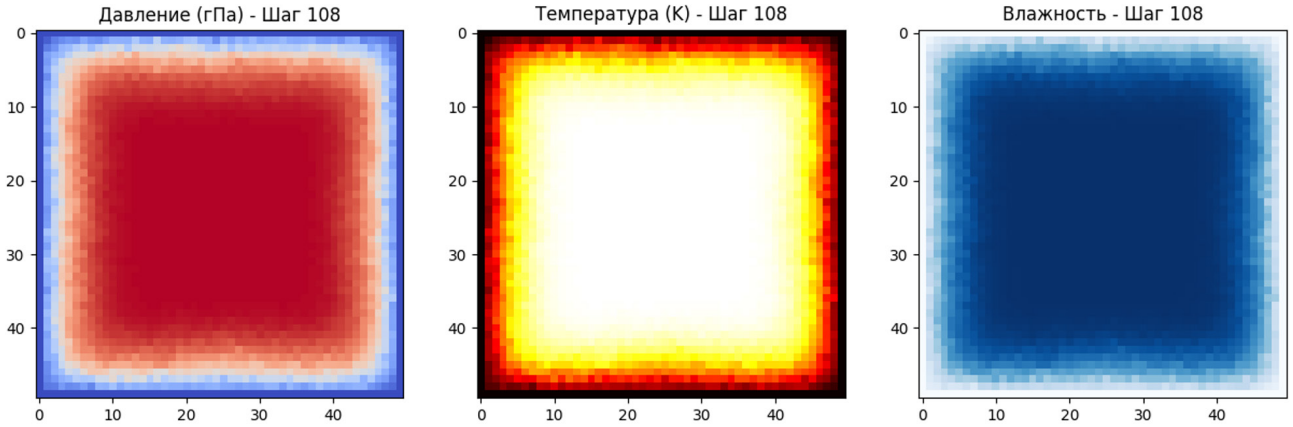


Рис. 2. Результаты моделирования с коэффициентами диффузии, скорости ветра и стохастического шума 0.01, 0.1, 0.1

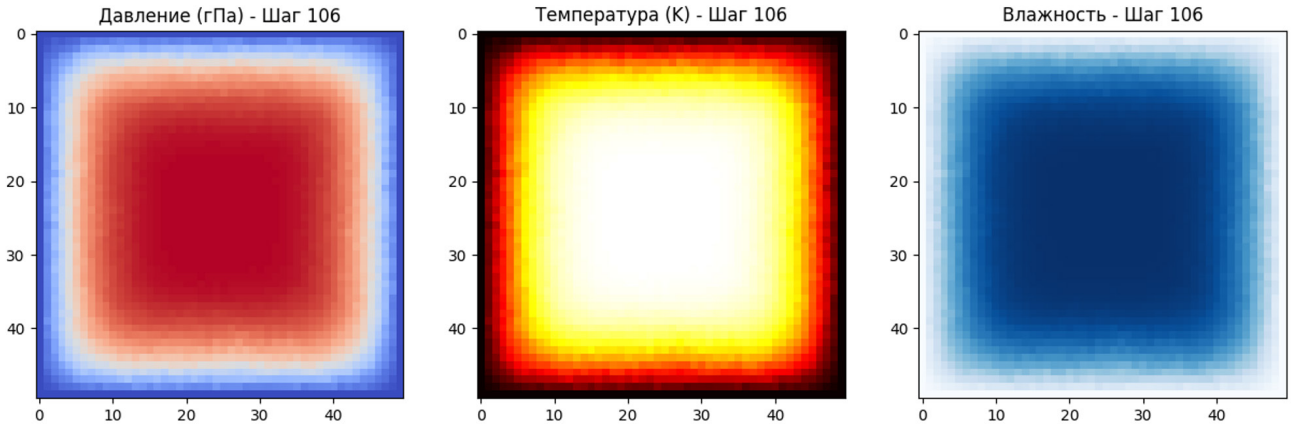


Рис. 3. Результаты моделирования с коэффициентами диффузии, скорости ветра и стохастического шума 0.1, 0.1, 0.2

3. Валидация полученных результатов

Результаты валидации модели с использованием датасета IBCTracks показали, что предложенная модель является слишком упрощенной и не один временной шаг не соответствует реальному поведению тропических циклонов. В частности, модель не учитывает важные атмосферные процессы и взаимодействия, что приводит к значительным расхождениям между смоделированными результатами и наблюдаемыми данными. Это подчеркивает необходимость дальнейшей доработки модели для включения дополнительных факторов, таких как взаимодействие с океаном, вертикальная структура атмосферы и более точное представление ветровых полей.

Эти результаты согласуются с общими представлениями о поведении тропических циклонов в реальной атмосфере, где факторы, подобные ветру и влажности, играют ключевую роль в формировании и развитии циклонических систем, однако показывают, что система гораздо сложнее и требует дополнительных исследований.

Заключение

В данной работе был проведен численный анализ модели тропического циклона, включающий исследование влияния диффузии, ветра и стохастического шума на его развитие. Полученные результаты показали, что изменения в параметрах модели существенно влияют на ди-

намическое поведение циклона, что подтверждает важность оптимизации гиперпараметров для достижения реалистичных результатов.

Однако полученные результаты расходятся при валидации результатов, что показывает необходимость использования другого подхода, метода или иных средств моделирования и учёта дополнительных факторов. Численное моделирование подтвердило, что даже небольшие изменения в параметрах могут привести к значительным изменениям в структуре и интенсивности циклона. Это подчеркивает важность комплексного подхода к моделированию атмосферных явлений и необходимость дальнейших исследований для лучшего понимания процессов, влияющих на формирование тропических циклонов

Литература

1. *Парамонов А. А., Крынецкий Б. А., Смоленцева Т. Е.* Практическая значимость почти-периодического анализа // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». – 2024. – Т. 1. – С. 227–230.

2. *Озерова Н. А.* Исследование особенностей эволюции тропических циклонов, влияющих на погоду Дальнего Востока России / Под науч. рук. Анискина О. Г. // Сборник материалов участников XIX Большого географического фестиваля. – Санкт-Петербург : Свое издательство, 2023. – С. 300–304.

3. *Ермакова О. С., Русаков Н. С., Поплавский Е. И., Сергеев Д. А., Троицкая Ю. И.* База данных спутниковых снимков тропических циклонов в сезоны ураганов 2017–2020 гг. // Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук. – 2022.

4. *Юровская М. В.* Набор данных о ветре и волнении для изучения тропических циклонов // Морской гидрофизический журнал. – 2023. – Т. 39, № 2 (230). – С. 220–233.

5. *Калач А. В., Парамонов А. А.* Применение почти-периодического анализа изображений динамики активности циклонов в целях выработки управленческих решений по повышению устойчивости территорий в чрезвычайных ситуациях // Теория и практика повышения устойчивости урбанизированных территорий в чрезвычайных ситуациях. Сборник материалов международного круглого стола «Комплексная безопасность-2024». – Москва : ВНИИ ГОЧС, 2024. – С. 106–112.

6. National Centers for Environmental Information (NCEI). International Best Track Archive for Climate Stewardship (IBTrACS). – URL: https://www.ncei.noaa.gov/products/international-best-track-archive (датаобращения: 27.10.2024).

УДК 550.388.2

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДРЕЙФОВОГО ТИПА В ОБЛАСТИ ВЕРХНЕГО ФРОНТА ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ПУЗЫРЕЙ

Н. М. Кащенко, С. А. Ишанов, Е. В. Зубков, Е. П. Ставицкая

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта

Аннотация. В работе исследуется процесс развития неоднородностей на верхних фронтах экваториальных плазменных пузырей в ионосфере Земли, развившихся в результате неустойчивости Релея — Тэйлора. Исследование проводилось в форме серии вычислительных экспериментов с использованием разработанной авторами оригинальной двумерной модели развития неустойчивости Релея — Тэйлора в экваториальной ионосфере Земли и двумерной модели неустойчивости дрейфового типа. Результаты, полученные в ходе проведенных исследований, могут быть использованы как в других теоретических работах, так и при планировании и проведении исследований явления F-рассеяния в ионосфере Земли. Численное моделирование проводилось для геофизических условий, благоприятных для развития в экваториальной F-области ионосферы Земли экваториальных плазменных пузырей.

Ключевые слова: ионосфера, математическое моделирование, численное моделирование, неустойчивости градиентного типа, инкремент неустойчивости, неустойчивость Рэлея — Тейлора, экваториальный плазменный пузырь, F-рассеяние.

Введение

Целью работы является исследование процессов развития мелкомасштабных неоднородностей плазмы механизмами неустойчивостей градиентного типа из малых начальных возмущений на верхнем фронте экваториальных плазменных пузырей, развившихся в результате неустойчивости Релея — Тэйлора и поднявшихся в верхнюю экваториальную ионосферу Земли [2].

Роль начального агента могут играть внутренние гравитационные волны, что может объяснить связь между неоднородной структурой области F и движением нейтрального газа на меньших высотах, например, на уровне турбопаузы [1]. Неустойчивость Рэлея — Тейлора позволяет объяснить появление среднемасштабных по поперечным к магнитному полю Земли направлениям экваториальных плазменных пузырей и построить очень простые модели их поведения [12, 13].

В этом процессе генерируются большие градиенты концентраций электронов, ионов и скоростей, что может приводить в этих зонах к эффекту F-рассеяния [1] вследствие усиления мелкомасштабных неоднородностей механизмами плазменных неустойчивостей различного типа, в частности неустойчивостей дрейфового типа. Как известно [7], благоприятные условия для развития неустойчивости Релея — Тэйлора в экваториальной ионосфере возникают в вечернее время при наличии направленного вверх вертикального дрейфа, при этом условия развития улучшаются во время геомагнитных бурь, и на начальной стадии скорость развития может быть описана линейным инкрементом γ. Наличие положительных значений γ приводит на линейной стадии к экспоненциальному росту обеднения плазмы с характерным временем γ^{-1}.

1. Математическая модель

Модель неустойчивости Релея — Тэйлора в экваториальной ионосфере [2, 10] содержит уравнения непрерывности ионов и электронов (1), уравнения движения ионов (2) и электронов (3), уравнение потенциальности и условие электростатики электрического поля (4) и уравнение непрерывности электрического тока (4):

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\left(n\vec{V}_i\right)=-\nu_r n \tag{1}$$

$$0=-\frac{\nabla p_i}{nm_i}+\frac{e}{m_i}\left(\vec{E}+\vec{V}_i\times\vec{B}\right)-\nu_{in}(\vec{V}_i-\vec{V}_n)-\nu_{ie}(\vec{V}_i-\vec{V}_e)+\vec{g} \tag{2}$$

$$0=-\frac{\nabla p_e}{nm_e}-\frac{e}{m_e}\left(\vec{E}+\vec{V}_e\times\vec{B}\right)-\nu_{ei}(\vec{V}_e-\vec{V}_i) \tag{3}$$

$$\nabla\times\vec{E}=0,\quad \vec{E}=-\nabla\Phi \tag{4}$$

$$\nabla\left(en\left(\vec{V}_i-\vec{V}_e\right)\right)=0 \tag{5}$$

где n — концентрация ионов и электронов; — скорости ионов и электронов; ν_r — скорость рекомбинации электронов и ионов; m_i, m_e — массы ионов и электронов; e — заряд ионов; $p_i=knT_i$, $p_e=knT_e$ – давление ионного и электронного газа; ν_{in}, ν_{ie}, ν_{ei} — частоты столкновений между частицами; $\vec{E}$ – напряженность электрического поля; Φ — потенциал электрического поля; k — постоянная Больцмана, T_i, T_e — температура ионов и электронов.

В работе использована ортогональная правая система координат (x,y,z): x направлена вдоль силовых линий магнитного поля Земли на юг, y направлена на восток, z направлена вверх. Для вычисления параметров нейтральных частиц использована глобальная эмпирическая термосферная модель MSIS [9]. Для задания начальных значений модели (1)–(5) решались уравнения низкоширотной модели ионосферы до получения периодического по суткам решения.

Модель (1)–(5) в силу предположения достаточно развитых экваториальных плазменных пузырей, вытянутых вдоль магнитного поля Земли может быть записана в двумерном приближении [2, 10], формально получаемом заменой оператора ∇ на оператор $\nabla_\perp$ — поперечная магнитному полю Земли часть оператора ∇. Двумерная математическая модель позволяет использовать достаточно подробные вычислительные сетки, что важно по причине малых размеров исследуемых неоднородностей и достаточно большую область решения, что необходимо в силу электостатической связи с характерными масштабами более 100 км.

2. Модель неустойчивости

Опишем схему анализа линейной стадии неустойчивостей плазмы F-области низкоширотной ионосферы в нелокальном подходе и приведем результаты численных оценок эффективности неустойчивости. Метод анализа существенно используют ряд предположений [1–3]:

– использовано приближение двухжидкостной столкновительной гидродинамики для плазмы, состоящей из электронов и одного сорта ионов, а именно O^+;

– развитые экваториальные плазменные пузыри поднимаются на высоты 500 ÷ 700 км, на этих высотах становятся малыми величины интегральной проводимости Холла и концентрации молекулярных ионов;

– пренебрегаем инерцией электронов;

– использовано приближение квазинейтральности плазмы;

– поскольку исследуется послезаходные процессы, пренебрегаем функцией ионизации и полагаем температуру ионов и электронов постоянной и равной;

– пренебрегаем столкновениями электронов и нейтральных частиц и силой Земного тяготения для электронов;

– рассматриваются характерные времена процессов, превышающие времена свободного пробега частиц, характерные пространственные масштабы, превышающие как длины свободного пробега, так и ларморовские радиусы;

– возмущения электрического поля в неоднородностях считаются потенциальными, а возмущения концентрации плазмы — квазинейтральными;

– рассматриваются умеренно вытянутые неоднородности, $l_\perp << l_\parallel$;

– ионосферная плазма считается сильно замагниченной, что справедливо и в области F и во внешней ионосфере.

Вследствие замагниченности ионосферной плазмы F-области процессы переноса вдоль магнитного поля будут определяться столкновениями, а поперек поля — дрейфовым движением плазмы. Из-за сильной анизотропии, обусловленной магнитным полем Земли, процессы переноса заряженных частиц в области F экваториальной ионосферы происходят в основном вдоль силовых линий геомагнитного поля, а в поперечном направлении процессы определяются дрейфовыми движениями. Плазма на высотах экваториальной F-области является высокопроводящей вдоль геомагнитного поля средой, поэтому будем считать, что силовые линии геомагнитного поля эквипотенциальны. Магнитное поле Земли будем считать постоянным по времени и дипольным.

Исходя из описанных приближений получаем ограничения на волновые числа возмущений:

$$k_x < 10^{-2}, \quad k_y > 5\times 10^{-4}, \quad 10^{-3} \ll k_z < 10^{-1}, \quad k_y, k_x \ll k_z.$$

Метод анализа — линеаризация системы по малым возмущениям концентрации n, скоростей ионов и электронов и потенциала Φ для двумерного приближения модели (1)–(5):

$$n = N_0 + N, \quad \vec{V}_i = \vec{V}_0 + \vec{V}, \quad \Phi = \Phi_0 + \varphi \cdot B \tag{6}$$

где N_0 — невозмущенная концентрация электронов; V_{0y} и V_{0z} — невозмущенная скорость дрейфа; Φ_0 — невозмущенный потенциал электрического поля; N, $\vec{V}$, φ — соответствующие возмущения, $\vec{V}$ определено так:

$$V_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{7}$$

Невозмущенные значения этих величин получены из решения двумерного приближения модели неустойчивости Релея — Тэйлора. Тогда система уравнений для N и φ имеет вид, аналогичный модели, описанной в работах [8, 11]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} + (V_{0y} + V_y)\dfrac{\partial N}{\partial y} + (V_{0z} + V_z)\dfrac{\partial N}{\partial z} + V_y \dfrac{\partial N_0}{\partial y} + V_z \dfrac{\partial N_0}{\partial z} = -\nu_r N \\ \Delta\varphi = -\dfrac{V_{0y}}{N_0}\dfrac{\partial N}{\partial z} - \dfrac{V_{0z}}{N_0}\dfrac{\partial N}{\partial y} \end{cases} \tag{8}$$

В отличие от работы [8] здесь не учитывалась диффузия.

3. Численная модель

Численное моделирование проводилось в два этапа. На первом этапе получены невозмущенные значения N_0, $\vec{V}_0$, Φ_0 в области, ограниченной снизу высотой 100 км, сверху высотой 1700 км, по горизонтали протяженность области интегрирования равна 500 км. Уравнения описанной двумерной модели решались численно конечноразностными методами на квазиравномерных сетках, сгущающихся к центру области решения. Сетка на этом этапе выбрана так, что в центральной области шаги равны 0.5 км по координатам y и z. Уровни солнечной активности, геомагнитной активности и восточная компонента фонового электрического поля задавались так: $F_{10.7} = 150.0$, $k_p = 1.0$, $E_y = 1.0$ мв/м. Для концентраций на нижней границе заданы условия химического равновесия, вверху и на боковых границах задано условие равенства нулю потоков. Начальные неоднородности концентрации заданы модельно круглой

формы с отношением концентрации в центре неоднородности к фоновому значению равным 0.9 и полуразмерами области неоднородности равными 5.0 км.

Двумерные уравнения переноса (1) модели решались по схеме расщепления, симметрированной для получения второго порядка точности. Для решения одномерных уравнений переноса выбран метод с нелинейной коррекцией потоков [4–6]. Уравнение потенциала (5) электрического поля решалось многосеточным методом, с использованием F-цикла.

В проведенных численных экспериментах получено, что фазовая скорость верхнего фронта плазменного пузыря на высотах из диапазона от 600 до 800 км приближенно равна 190 м/с, что согласуется с данными наблюдений [7].

На втором этапе результаты расчетов первого этапа использованы в качестве невозмущенных значений для модели неустойчивости (8). Область решения выбрана так: по высоте, $z \in [600;\ 800]$, $y \in [-10;\ 10]$. Разностная сетка конечноразностного метода решения уравнений модели (8) выбрана равномерной, с шагами равными 0.02 км и 0.07 км по переменным y и z соответственно. Двумерные уравнения переноса модели (8) решались по такой же схеме, как уравнение (1), а уравнение потенциала решалось прямым методом — методом редукции.

4. Результаты численных экспериментов

В работе представлены результаты серии численных экспериментов с описанной моделью. На рис. 1 приведено распределение $\lg(n)$ в экваториальной плоскости, полученное решением уравнений модели (1)–(5), распределение соответствует значению времени 3400 с от момента инициализации плазменного пузыря. Белый прямоугольник соответствует области решения на втором этапе.

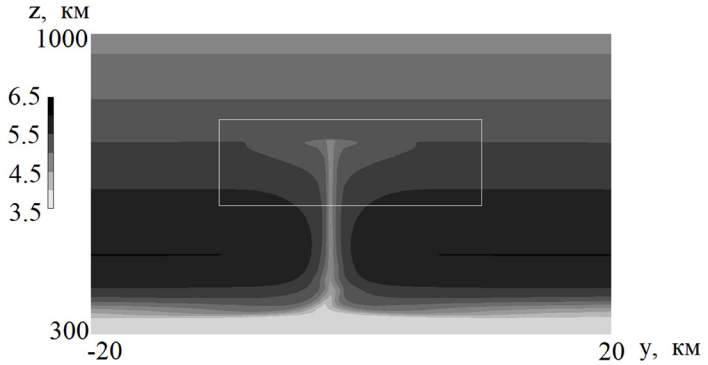


Рис. 1. Распределение $\lg(n)$ *в плоскости* (y, z) *на момент времени 3400 с*

На рис. 2 приведен пример распределения начального возмущения для модели (8) для волновых чисел $k_y = 10^{-2}$ и $k_z = 10^{-3}$. Серый цвет фона на рис. 2 соответствует нулевому значению величины N, черный — максимальному, а белый — минимальному значению.

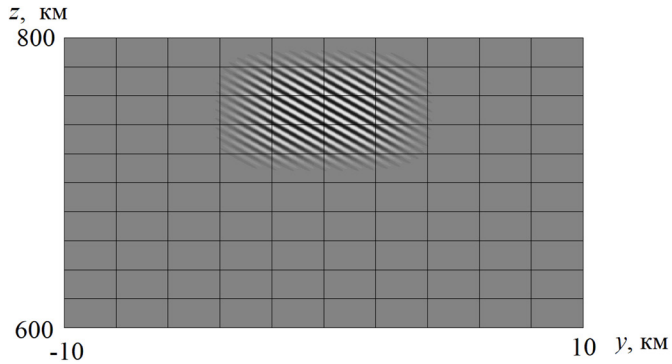


Рис. 2. Распределение начального возмущения в модели (8) для $k_y = 10^{-2}$ *и* $k_z = 10^{-3}$

В первой серии численных экспериментов получено значение инкремента исследуемой неустойчивости для различных значений волновых чисел в условиях, когда центр волнового возмущения имеет координаты (0, 750), что соответствует рис. 1. Значение инкремента вычислялось с помощью полученной зависимости амплитуды возмущения от времени. Результаты этой серии сведены в табл. 1.

Таблица 1

Зависимость обратного значения инкремента неустойчивости дрейфового типа (с) от волновых чисел возмущения

		k_z						
k_y		–0.0001	0.0000	0.0001	0.0003	0.001	0.003	0.010
	0.0				25.9	163.5	–183.7	–24.0
	0.0001		24.9					
	0.001		23.4					
	0.003		23.4					
	0.010	24.4	21.9	21.0	24.0	–57.7	–44.7	

Во второй серии численных экспериментов исследована зависимость инкремента от положения начального возмущения для волновых чисел $k_y = 0,\ k_z = 10^{-3}$, результаты этой серии представлены в табл. 2.

Таблица 2

Зависимость обратного значения инкремента (с) от положения начального возмущения для волновых чисел $k_y = 0,\ k_z = 10^{-3}$

Положение центра начального возмущения, y (км).	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
Обратное значение инкремента (с)	162	159	166	178	190	164	157	161	200

Заключение

Представленные выше результаты численных экспериментов, описанных в разделе 4, позволяют сделать следующие выводы.

1. Подтверждено, что инкремент неустойчивости дрейфового типа может быть положительным на верхнем фронте развитых плазменных пузырей.

2. Значения инкремента неустойчивости в условиях проведенных численных экспериментов могут достигать значений порядка 0.048 $с^{-1}$, что соответствует времени нарастания начальных возмущений порядка 21 с. Значения инкремента сильно зависят соотношения волновых чисел и слабо от положения начального возмущения.

3. Такие времена нарастания могут являться механизмом генерации мелкомасштабных неустойчивостей на верхних фронтах развитых экваториальных плазменных пузырей в вечернее и ночное время, что в свою очередь может быть одной из причин F-рассеяния.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение от 28.02.2024 № 075-02-2024-1430).

Литература

1. *Гершман Б. Н., Казимировский Э. С., Кокоуров В. Д., Чернобровкина Н. А.* Явление F-рассеяния в ионосфере. – М.: Наука, 1984. – 141 с.

2. *Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Мациевский С. В.* Развитие неустойчивости Рэлея — Тейлора в экваториальной ионосфере и геометрия начальной неоднородности // Математическое моделирование. – 2018. – Т. 30(9). – С. 21–32.

3. *Кащенко Н. М., Никитин М. А.* Характеристики инкремента нарастания дрейфово-диссипативной неустойчивости на фронтах экваториальных плазменных пузырей // Геомагнетизм и аэрономия. – 2020. – 60 (4). – С. 502–507.

4. *Кащенко Н. М., Ишанов С. А., Зубков Е. В.* Численная модель переноса в задачах неустойчивостей низкоширотной ионосферы Земли с использованием двумерной монотонизированной Z-схемы // Компьютерные исследования и моделирование. – 2021. – Т. 13, № 5. – С. 1011–1023.

5. *Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф., Чеванин В. С.* Об одном варианте существенно неосциллирующих разностных схем высокого порядка точности для систем законов сохранения // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21(11). – С. 19–32.

6. *Сафронов А. В.* Оценка точности и сравнительный анализ разностных схем сквозного счета повышенного порядка // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т. 11(1). – С. 137–143.

7. *Сидорова Л. Н.* Экваториальные плазменные пузыри: зависимость вероятности наблюдения от местного времени // Геомагнетизм и аэрономия. – 2020. – Т. 60, № 5. – С. 557–565.

8. *Суковатов Ю. А.* Численное моделирование нелинейной стадии развития градиентно-дрейфовой неустойчивости во внешней ионосфере // Известия АлтГУ. – 2011. – № 1-2. – С. 168–171.

9. *Hedin A. E., Reber C. A., Newton G. P. [et al.]* A global thermospheric model based on mass spectrometer and incoherent scatter data MSIS 2. Composition // Ibid. – 1977. – V. 82(A1). – P. 2148–2156.

10. *Huba J. D., Joyce G., Krall J.* Three-dimensional modeling of equatorial spread F // Aeronomy of the Earth's atmosphere and ionosphere. IAGA Special Sopron Book Series. – 2011. – Vol. 2. – P. 211–218.

11. *Kashchenko N., Ishanov S., Zubkov E., Khudenko V.* Determination of Gradient-Drift Instability Parameters under Conditions of Multiple Plasma Bubbles. Mathematical Models and Computer Simulations. – 2023. – 15. – P. 615–622. 10.1134/S2070048223040051.

12. *Tulasi Ram S. [et al.]* Vertical rise velocity of equatorial plasma bubbles estimated from Equatorial Atmosphere Radar (EAR) observations and HIRB model simulations // Ibid. – June 2017. – Vol. 122(6). – P. 6584–6594.

13. *Yokoyama T., Shinagawa H., Jin H.* Nonlinear growth, bifurcation, and pinching of equatorial plasma bubble simulated by three-dimensional high-resolution bubble model // Ibid. – 2014. – Vol. 119(12). – P. 10,474–10,482.

УДК 532.5, 004.032.26

ИНТЕГРАЦИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО И НЕЙРОСЕТЕВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОТОКУ ВОДЫ

А. Ю. Кликунова, О. В. Коноваленко

Волгоградский государственный университет

Аннотация. Описан метод определения параметров гидравлического сопротивления потоку воды с использованием методов нейросетевого моделирования. Предложенный подход основан на согласовании результатов моделирования динамики поверхностных вод и данных с измерительных станций, расположенных в речном русле крупной реки. Рассматриваемая модель гидравлического сопротивления имеет четыре свободных параметра, которые определяются с помощью нейронной сети с архитектурой LSTM. Использование полученных параметров для проведения гидродинамического моделирования дает хорошее совпадение результатов расчетов с наблюдаемыми данными.
Ключевые слова: гидрологический режим, вычислительная гидродинамика, модель мелкой воды, нейронная сеть, LSTM, гидравлическое сопротивление, коэффициент шероховатости, турбулентность.

Введение

Гидрологическое моделирование используется для решения широкого круга задач, таких как прогноз затопления территорий [1–5], проектирование проектов гидротехнических сооружений [6], моделирование чрезвычайных ситуаций, связанных с затоплением и подтоплением территорий [7–8], решение задач эвакуации населения [9–10]. Одной из ключевых проблем вычислительной гидрологии поверхностных вод является верификация численных моделей, которые должны обеспечивать согласие с временными рядами измерений на гидропостах [11–12]. Такие модели содержат набор свободных параметров, определяющих, в частности, гидравлическое сопротивление. Последнее зависит от сложных процессов, связанных с взаимодействие потока с неоднородным дном и нестационарностью на разных масштабах, включая турбулентное трение [12]. Определение этих параметров требует привлечения данных измерений уровней и расхода воды в разных точках. Фактически, речь идет о необходимости решения обратной задачи для гидродинамической модели мелкой воды.

1. Модель гидравлического сопротивления в приближении мелкой воды

Для моделирования динамики воды мы используем пакет EcoGIS-Simulation для параллельных вычислений на GPU [13–16], в основе которого лежит решение уравнения мелкой воды [17, 14]:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial (Hu_x)}{\partial x}+\frac{\partial (Hu_y)}{\partial y}=q(\vec{\mathbf{r}},t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial (Hu_x)}{\partial t}+\frac{\partial (Hu_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial (Hu_xu_y)}{\partial y}=-gH\frac{\partial \eta}{\partial x}+Hf_x^{(q)}+Hf_x^{(HR)}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial (Hu_y)}{\partial t}+\frac{\partial (Hu_xu_y)}{\partial x}+\frac{\partial (Hu_y^2)}{\partial y}=-gH\frac{\partial \eta}{\partial y}+Hf_y^{(q)}+Hf_y^{(HR)}, \tag{3}$$

где функция q задает поверхностную плотность источников или стоков воды, $\eta = b + H, \eta(x, y, t)$ — уровень воды, $b(x, y)$ — функция дна, H — глубина потока, $f^{(q)}$ — удельная сила из-за

источников, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ — вектор скорости. Сток воды $Q(t)$ определяется как $Q(t) = \int q(x, y, t)dxdy$.

Мы полагаем, что гидравлическое сопротивление $f^{(HR)}$ состоит из двух компонент. Первая $f^{(M)}$ зависит от эффективного коэффициента шероховатости n_M, который зависит от пространственной структуры дна. Наша модель учитывает также турбулентную вязкость $f^{(turb)}(H)$, зависящую от двух неизвестных параметров в приближении изотропной турбулентности $(\hat{\alpha}, \gamma)$. В итоге получаем следующее уравнение для определения силы гидравлического сопротивления [11–12]:

$$\vec{\mathbf{f}}^{(HR)} = \vec{\mathbf{f}}^{(M)} + \vec{\mathbf{f}}^{(turb)} = n_M^2 \frac{g\,|\vec{\mathbf{u}}|}{H^{4/3}}\vec{\mathbf{u}} + \% \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{g}{\lambda^3}\right)^{\gamma/2} \hat{\alpha} H^{\gamma} |\vec{\mathbf{u}}|^{1-\gamma} \cdot \vec{\mathbf{u}}. \tag{4}$$

Используется также параметризация граничных условий на выходе потока воды из вычислительной области $(\Theta^{(b)})$. В условиях паводка уровни и расход воды могут изменяться в несколько раз по сравнению с меженными значениями, что требует учета этих параметров от времени, что существенно усложняет задачу восстановления $H = \{n_M, \hat{\alpha}, \gamma, \Theta^{(b)}\}$. Для определения величин H используются методы нейросетевого моделирования [11–12].

Объектом исследования выступает нижнее течение реки Волга (100 км) от Волжской ГЭС до поселка Светлый Яр (рис. 1). На рассматриваемом участке расположено три измерительные станции, на которых каждый день фиксируются уровни воды. Мы ставим перед собой задачу минимизации отклонения уровней воды, полученных в результате гидродинамического моделирования $\eta_{mod}^{(k)}(t_n)$, от соответствующих уровней, зафиксированных на измерительных станциях $\eta_{obs}^{(k)}(t_n)$:

$$\sigma_\eta^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{N_d}\sum_{n=1}^{N_d}\left(\eta_{obs}^{(k)}(t_n) - \eta_{mod}^{(k)}(t_n)\right)^2}, \quad \sigma_\eta = \frac{1}{3}\left(\sigma_\eta^{(1)} + \sigma_\eta^{(2)} + \sigma_\eta^{(3)}\right). \tag{5}$$



Рис. 1. Нижнее течение реки Волга ниже Волжской ГЭС. Красными треугольниками обозначены измерительные станции в русле реки Волга: 1 — нижний бьеф Волжской ГЭС, 2 — речной порт г. Волгоград, 3 — пгт. Светлый Яр

Для нахождения минимума функции (5) используется нейронная сеть LSTM, архитектура которой позволяет учитывать влияние предыдущих состояний системы на состояние в текущий момент времени. В крупных реках, подверженных изменению уровня воды во время регулярных паводков, наблюдаются гистерезисные явления [11], когда уровень воды в данный момент зависит от поведения гидрографа $Q(t)$ на всем исследуемом интервале. Поэтому использование именно такой архитектуры нейронной сети для решения задач моделирования поверхностных вод является обоснованным [11].

На рис. 2 показана общая схема восстановления параметров $H = \{n_M, \hat{\alpha}, \gamma, \Theta^{(b)}\}$, состоящая из нескольких модулей. Первый включает в себя сбор входных данных для проведения моделирования. Второй модуль использует эти данные для проведения вычислительного эксперимента с использованием аппаратно-программного комплекса EcoGIS-Simulation. В рамках модуля машинного обучения мы создаем комбинированную выборку данных, состоящую из результатов численных экспериментов и результатов реальных наблюдений. Первые, в дополнение к гидрографическим данным гидрографа Q и значениям η для трех измерительных станций, включают значения коэффициентов H, поэтому они используются для обучения. На следующем этапе мы формируем обучающий и тестовый наборы. Мы используем стандартное случайное разделение на обучающий и тестовый наборы: 70 % — обучающий набор, 30 % — тестовый набор. Получаем оптимальное решение задачи (5) в виде набора параметров гидравлического сопротивления H, которые используются для конечного вычислительного эксперимента.

В рамках исследования получены соответствующие параметры гидравлического сопротивления для 2022 года для исследуемого участка. Для рассчитанных временных рядов уровней воды было вычислено среднеквадратичное отклонение от результатов измерений (табл. 1). Имеется хорошее согласие для всех трех гидропостов, включая стадию весеннего затопления, когда уровень воды резко повышается в короткие сроки.

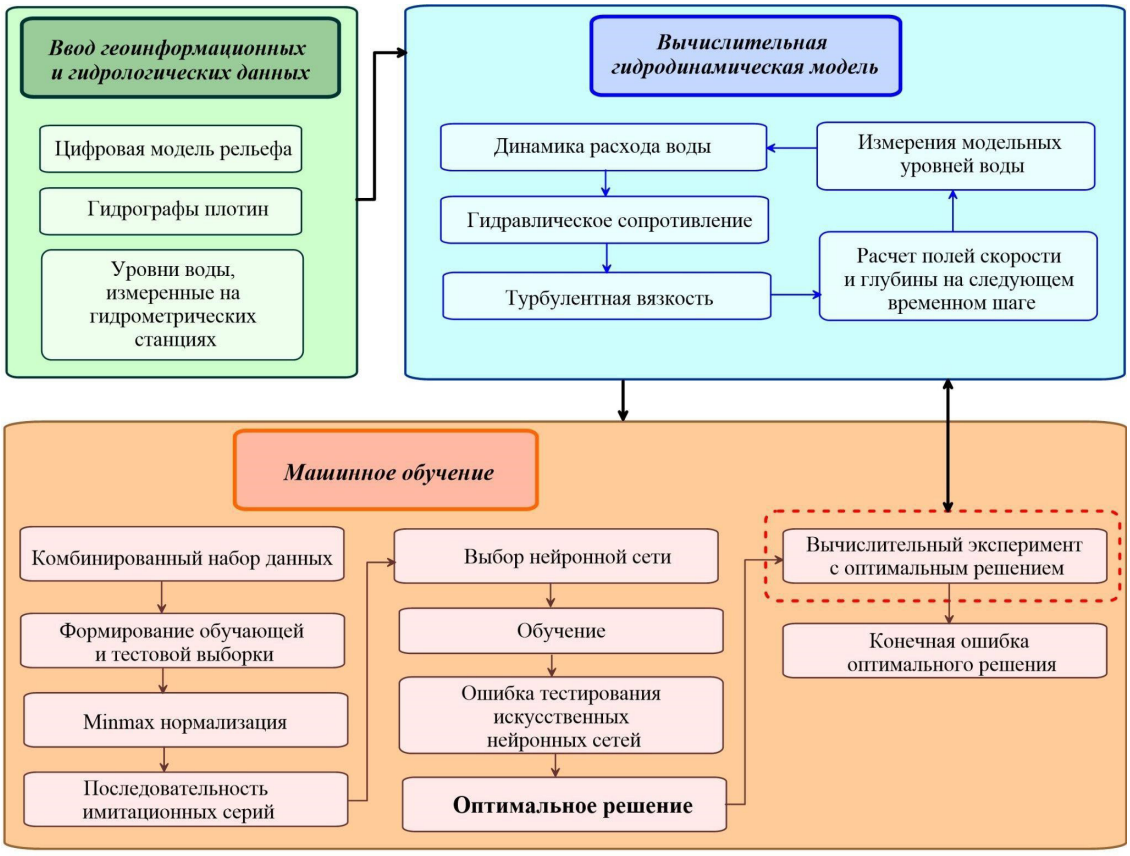


Рис. 2 Схема восстановления параметров гидравлического сопротивления реки на основе сочетания гидродинамического моделирования и машинного обучения

Таблица 1

Среднеквадратичное отклонение результатов моделирования от данных, зафиксированных на измерительных станциях

	Нижний бьеф Волжской ГЭС	Речной порт г. Волгоград	пгт. Светлый Яр
σ	0.111 м	0.182 м	0.203 м

Заключение

Проведенный анализ показал эффективность архитектуры нейронной сети Long Short-Term Memory, которая позволяет учитывать наличие памяти в речной системе длиной несколько суток. Для обучения и тестирования строятся комбинированные наборы данных, объединяющие результаты натурных измерений и гидродинамического моделирования. Развиваемый подход на примере Нижней Волги дает высокую точность воспроизведения рядов наблюдений уровней воды в пределах 10–20 см.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-71-00016, https://rscf.ru/project/23-71-00016/). Исследование проводится с использованием оборудования совместного исследовательского центра высокопроизводительных вычислительных ресурсов Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Литература

1. *Isaeva I. I.* Modeling the Territorial Structure Dynamics of the Northern Part of the Volga-Akhtuba Floodplain / I. I. Isaeva, A. A. Voronin, A. V. Khoperskov, M. A. Kharitonov // Computation. – 2022. – Vol. 10, № 4, id. 62. – P. 31.

2. *Hu H.* Urban hydrological model (UHM) developed for an urban flash flood simulation and analysis of the flood intensity sensitivity to urbanization / H. Hu, M. Yu, X. Zhang., Y. Wang // Geomatics, Natural Hazards and Risk. –2024. – Vol. 15, №. 1. – P. 2302561.

3. *Кликунова А. Ю.* Метод построения кадастровых карт затопления речных долин на основе гидродинамического и геоинформационного моделирования / А. Ю. Кликунова // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2023. –Т. 26, № 3. – С. 15–23.

4. *Тертычная А. С.* Метод определения береговых линий водных объектов на основе обработки данных дистанционного зондирования LandsatETM+ / А. С. Тертычная, К. С. Тертычный, А. В. Хоперсков // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. – 2023. – Т. 20, № 5. – С. 28–38.

5. *Кликунова А. Ю.* Моделирование затоплений населенных пунктов в период весеннего паводка / А. Ю. Кликунова, Т. А. Дьяконова, Е. О. Агафонникова [и др.] // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2021. – Т. 24, № 3. – С. 63–72.

6. *Гиргидов А.А.* Гибридное моделирование в проектировании гидротехнических сооружений и flow-3d® как средство его реализации / А. А. Гиргидов // Инженерно-строительный журнал. – 2011. – № 3 (21). – С. 21–27.

7. *Klikunova A. Y.* Modeling of Extended Flooding of the Volga-Akhtuba Floodplain Under Various Conditions / A. Y. Klikunova, T. A. Dyakonova, E. O. Agafonnikova // 2023 Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems (AMCSM). – IEEE. – 2023. – С. 1–6.

8. *Агафонникова Е. О.* Проблема прогноза и управления гидрологическим режимом на горной территории в период ливневого паводка на основе гидродинамических численных экспериментов / Е. О. Агафонникова, А. В. Хоперсков, С. С. Храпов // Кибернетика и программирование. – 2016. – № 3. – С. 35–53.

9. *Vatyukova O. Yu.* The problem of effective evacuation of the population from floodplains under threat of flooding: algorithmic and software support with shortage of resources / O. Yu. Vatyukova, A. Yu. Klikunova, A. A. Vasilchenko [and others] // Computation. – 2023. – Vol. 11, № 8, id. 150. – P. 1–26.

10. *Voronin A. A.* The Problem of Safe Evacuation of Large Floodplains Population During Flooding / A. A. Voronin, A. A. Vasilchenko, A. Yu. Klikunova A.Yu. [and others] // Advances in Systems Science & Applications. – 2022. – Vol. 22, № 4. – P. 65–78.

11. *Klikunova A. Yu.* Problem of building high-quality predictive model of river hydrology: the combined use of hydrodynamic simulations and intelligent computing / A. Yu. Klikunova, M. V. Polyakov, S. S. Khrapov, A. V. Khoperskov // Communications in Computer and Information Science. – 2023. – Vol. 1909. – P. 191–205.

12. *Khoperskov A. V.* Efficiency of Using GPUs for Reconstructing the Hydraulic Resistance in River Systems Based on Combination of High Performance Hydrodynamic Simulation and Machine Learning / A. V. Khoperskov, S. S. Khrapov, A. Yu. Klikunova, I. E. Popov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, № 7. – P. 3094–3105.

13. *Khrapov S.* EcoGIS-Simulation Software for riverbed sediments modeling / S. Khrapov, E. Agafonnikova, P. Potaptseva [and others] // E3S Web of Conferences. – EDP Sciences. – 2023. – Vol. 411, № 3. – P. 02005.

14. *Khrapov S. S.* Numerical modeling of self-consistent dynamics of shallow and ground waters / S. S. Khrapov // Mathematical Physics and Computer Modeling. – 2021. – Vol. 24, № 3. – P. 45–62.

15. *Khrapov S. S.* Numerical Modeling of Hydrodynamic Accidents: Erosion of Dams and Flooding of Territories / S. S. Khrapov // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. – 2023. – Vol. 56, № 2. – P. 261–272.

16. *Dyakonova T.* Numerical Model of Shallow Water: the Use of NVIDIA CUDA Graphics Processors / T. Dyakonova, A. Khoperskov, S. Khrapov // Communications in Computer and Information Science. – 2016. – Vol. 687. – P. 132–145.

17. *Khrapov S. S.* Application of Graphics Processing Units for Self-Consistent Modelling of Shallow Water Dynamics and Sediment Transport / S. S. Khrapov, A. V. Khoperskov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, № 8. – P. 1475–1484.

УДК 519.652

ЛОКАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ БАЗИСНЫЕ СПЛАЙНЫ

В. А. Конева

Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова

Аннотация. Локальные параболические базисные сплайны — это инструмент для интерполяции и аппроксимации функций, характеризующийся высокой гибкостью и точностью. Они опираются на базисные сплайны, используя формулы для расчета на равномерной сетке. В статье представлена схема построения локального параболического базисного сплайна и, с учетом введения новой переменной *t*, показано, как связывать разные ветви сплайна. Такие сплайны обладают локальными свойствами, позволяющими эффективно управлять формой кривых и расположением узлов, что важно для улучшения качества интерполяции и снижения вычислительных затрат. Они находят применение в моделировании физических процессов, анализе данных, медицинской визуализации и других областях, улучшая качество изображений и облегчая моделирование сложных геометрий.
Ключевые слова: локальные параболические базисные сплайны, интерполяция функций, аппроксимация функций, сплайны, применение сплайнов, интерполирование на равномерной сетке.

Локальные параболические базисные сплайны представляют собой мощный инструмент для интерполяции и аппроксимации функций. Они используют концепцию базисных сплайнов для создания сглаженных кривых, обеспечивая при этом достаточно высокую степень гибкости и точности.

Локальные параболические базисные сплайны опираются на определение базисных сплайнов. Рассмотрим следующую формулу [1]:

$$\tilde{B}_{n,i}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)\sum_{p=i}^{i+n+1}\frac{(x-x_p)_+^n}{\omega'_{n+1,i}(x_P)},$$

где $(x-x_p)_+^n = \begin{cases} 0, x \le x_p \\ (x-x_p)^n, x \ge x_p \end{cases}$ $\omega_{n+1,i}(x) = \prod_{p=i}^{i+n+1}(x-x_p).$

Для случая параболического сплайна $(n=2)$ формула будет иметь следующий вид:

$$\tilde{B}_{2,i}(x) = (-1)^3 \cdot 3\sum_{p=i}^{i+3}\frac{(x-x_p)_+^2}{\omega'_{3,i}(x_P)}$$

$$\omega_{3,i}(x) = \prod_{p=i}^{i+3}(x-x_p) = (x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})(x-x_{i+3})$$

В результате расчета на равномерной сетке мы получим новые значения $\omega_{3,i}(x)$ для различных узлов. Это позволит преобразовать формулу $\tilde{B}_{2,i}(x)$ и привести к выражению, где указаны новые значения для разных диапазонов x:

$$\tilde{B}_{2,i}(x) = \frac{1}{2h^3}(x-x_i)^2, x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\tilde{B}_{2,i}(x) = \frac{1}{2h^3}(x-x_i)^2 - \frac{3}{2h^3}(x-x_{i+1})^2, x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]$$

$$\tilde{B}_{2,i}(x) = \frac{1}{2h^3}(x-x_i)^2 - \frac{3}{2h^3}(x-x_{i+1})^2 - \frac{3}{2h^3}(x-x_{i+2})^2, x \in [x_{i+2}, x_{i+3}]$$

Часто применяются нормированные базисные сплайны [1], где $B_{2,i}(x)$ можно выразить через $\tilde{B}_{n,i}(x)$ [3].

Таким образом, через введение переменной $t = \dfrac{x - x_i}{h}$ можно связать разные ветви сплайна и функции $f(x)$ на определенном отрезке будет соответствовать параболический сплайн $S(t)$ [2]:

$$S(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2})^2 f_{i-1} + (-t^2 + \frac{3}{4}) f_i + \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2})^2 f_{i+1}, \ t \in [0;1].$$

В качестве примера на рис. 1 и рис. 2 приведены различные построения по рассматриваемой схеме.

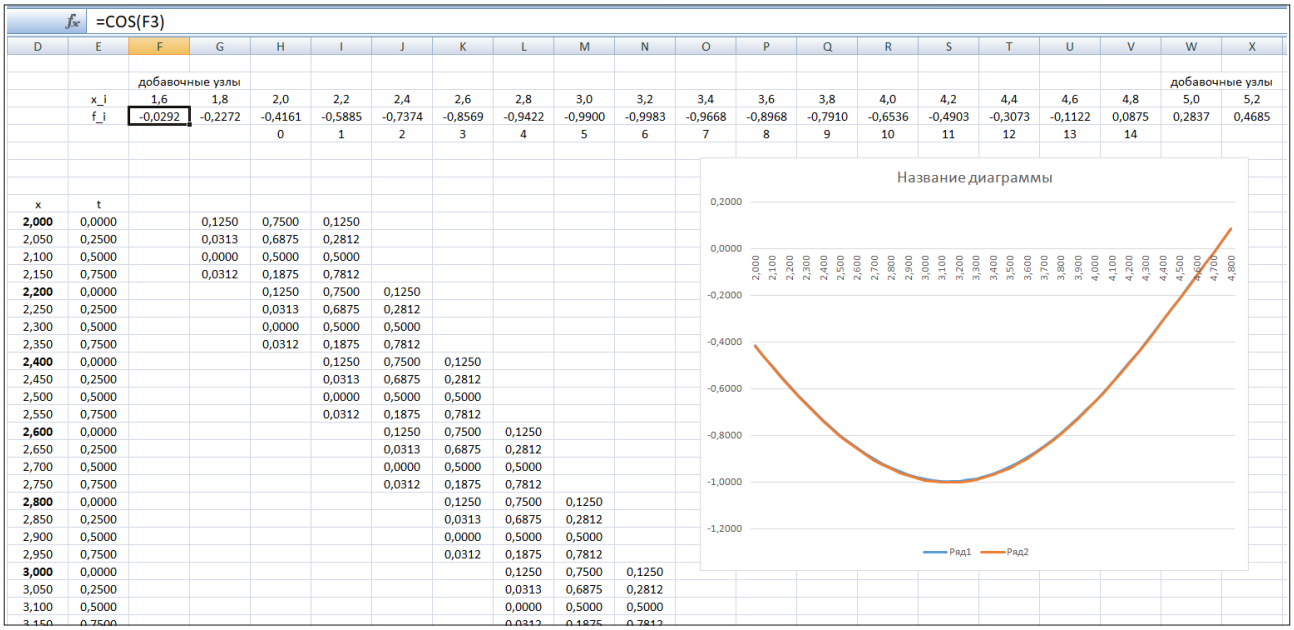


Рис. 1. Сплайн интерполяция функции $y = \cos x$

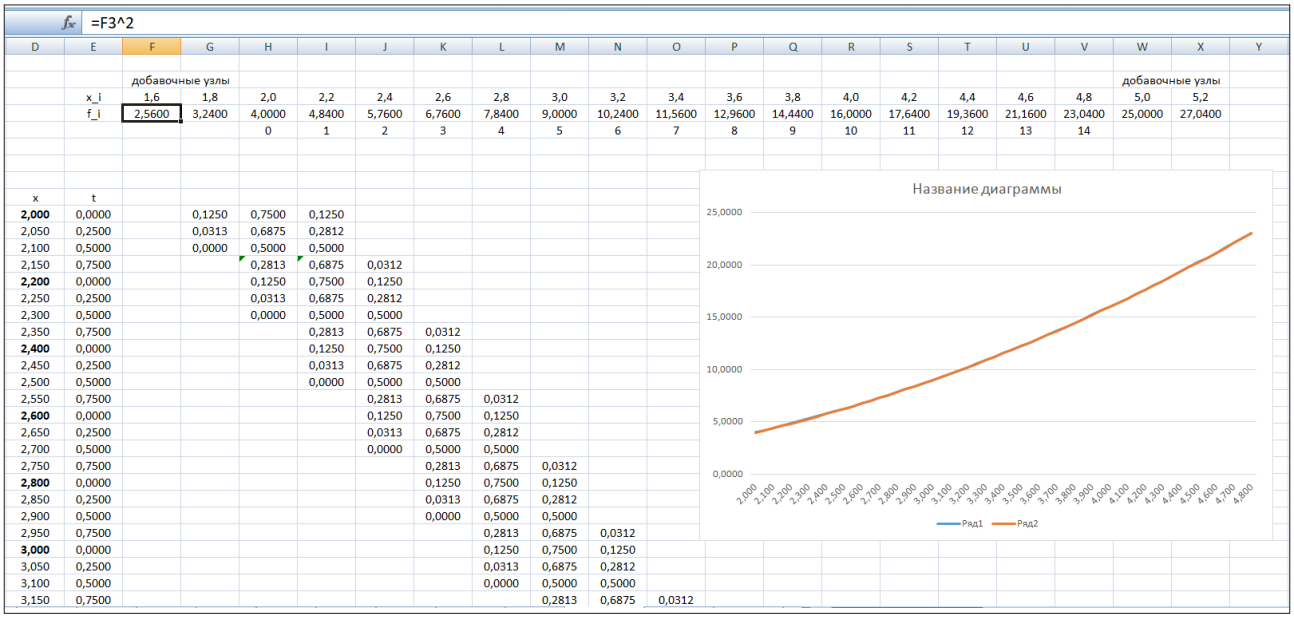


Рис. 2. Сплайн интерполяция функции $y = x^2$

При использовании параболических сплайнов важно учитывать их локальные свойства, что позволяет добиваться высокой точности интерполяции и сглаживания в заданных диапазонах, а также строить сложные формы кривых через множество узлов. При необходимости создания более сложных форм, можно разместить узлы в соответствии с кривизной аппроксимируемой функции, что обеспечит более точное представление. Кроме того, можно изме-

нять местоположение узлов в зависимости от поведения заданной в условии функции. Это не только повышает качество интерполяции, но и снижает вычислительные затраты, так как количество узлов может быть уменьшено в областях с меньшей сложностью. Таким образом, при построении параболических сплайнов получается управлять насыщением узловых точек, а также есть возможность локализованного управления формой, то есть производить изменения в одном сегменте сплайна, минимально влияя на остальные. Это свойство значительно упрощает задачи редактирования и оптимизации, позволяя дизайнерам и инженерам при моделировании сложных поверхностей и объектов сосредоточиться на конкретных участках модели, без необходимости повторного вычисления всей структуры. Кроме того, локальные параболические сплайны обладают высокой вычислительной эффективностью, что делает их подходящими для применения в области обработки изображений. Это открывает новые горизонты для разработки алгоритмов стилизации и улучшения качества изображений, способствует созданию более естественных визуальных эффектов и повышает уровень детализации. В совокупности, локальные параболические базисные сплайны позволяют сохранить точность в создании и манипуляции сложной геометрией, становясь неотъемлемой частью современного подхода к цифровому дизайну.

Локальные параболические сплайны также находят широкое применение в области моделирования физических процессов, таких как динамика жидкостей и газа. Их возможность эффективно адаптироваться к изменяющимся условиям позволяет точно описывать сложные явления, например, в аэродинамике или гидродинамике. Это значительно облегчает работу инженеров, занимающихся разработкой новых технологий и материалов.

В дополнение к этому, локальные параболические сплайны активно используются в анализе и предсказании поведения физических систем. В таких областях, как геофизика, их применяют для интерполяции данных и визуализации сложных моделей, что позволяет изучать процессы, происходящие в недрах Земли. Это особенно актуально для разработки методов обнаружения и добычи полезных ископаемых.

В медицинской визуализации параболические сплайны применяются для реконструкции и анализа изображений, полученных с помощью таких методов, как компьютерная и магнитно-резонансная томография. Здесь сплайны помогают повышать разрешение изображений и сглаживать шумы, что является очень важным для точной диагностики и планирования медицинских процедур. Возможность сохранять высокую четкость границ органов и тканей делает сплайны ценным инструментом в арсенале специалистов.

Таким образом, локальные параболические базисные сплайны предоставляют гибкий и мощный инструментарий для разнообразных задач, включая обработку сигналов, моделирование физических явлений и компьютерную графику, позволяя достигать высокой степени точности и плавности.

Литература

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функции. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – с. 352.

2. *Шевалдин В. Т.* Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. – Новосибирск, 2005. – Т. 8, № 1. – С. 77–88.

3. *Шевалдин В. Т.* Локальная аппроксимация параболическими сплайнами в среднем при больших интервалах усреднения // Матем. заметки. – 2020. – Т. 108, вып. 5. – С. 771–781.

УДК 519.711

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОНТОЛОГИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ПОТРЕБНОСТЕЙ РАБОТОДАТЕЛЕЙ

В. С. Коровина

Кубанский государственный университет

Аннотация. Онтологии представляют собой важный инструмент, позволяющий организовать знания о структуре ожиданий на этом рынке. Данное исследование направлено на анализ применения онтологий для глубокого понимания и моделирования данной области, а также выявление успешных примеров их использования. Важным аспектом работы является рассмотрение методологий создания онтологий и примеров их практического применения. Исследование также охватывает как формальную, так и неформальную информацию о квалификациях и навыках, что может улучшить процессы управления персоналом. Выводы исследования имеют потенциал для трансформации подходов к подбору персонала и управлению человеческими ресурсами.
Ключевые слова: интеллектуальный рынок труда, онтологии, структура знаний, база знаний, интеллектуальные системы, методологии создания онтологий, структура онтологии, предметная область, естественный язык (NLP), методы обработки естественного языка.

Введение

Интеллектуальный рынок труда становится динамичным и комплексным, что требует новых подходов к его анализу. Онтологии играют важную роль в организации знаний о структуре ожиданий на этом рынке. Данное исследование направлено на анализ применения онтологий для глубокого понимания и моделирования этой сферы. Мы также рассматриваем примеры успешного использования онтологий и определяем потенциальные выгоды от их применения. Изучение неформальной информации о квалификациях работников является ключевым для улучшения управления персоналом. Это исследование вносит вклад в методы подбора персонала и оценки квалификаций, что имеет потенциал для революции в области управления человеческими ресурсами.

1. Понятие онтологии и описание её структуры

Онтология представляет собой явное описание концептуализации, в которой описывается множество объектов и связей между ними. Множество терминов систематизируется на основе таксономии, т. е. классификации. Визуально онтологию можно представить в виде направленного графа, в котором концепты располагаются в узлах, а связи между ними отображаются в виде ребер.

Онтология является формальной спецификацией согласованной концептуализации, включающей в себя концепты (т. е. понятия, классы и экземпляры предметной области), отношения между концептами и аксиомы предметной области [1].

В онтологии концепция играет фундаментальную роль в представлении знаний о мире в структурированном и организованном виде. Концепцию можно рассматривать как абстрактную идею или мысленное представление, которое отражает основные свойства и отношения класса объектов, событий или сущностей в определенной области.

На рис. 1 схематично представлен процесс разработки онтологии структуры ожиданий на интеллектуальном рынке труда.

Идентификация предметной области — определение основных концепций, терминов и отношений, характерных для структуры ожиданий на интеллектуальном рынке труда.

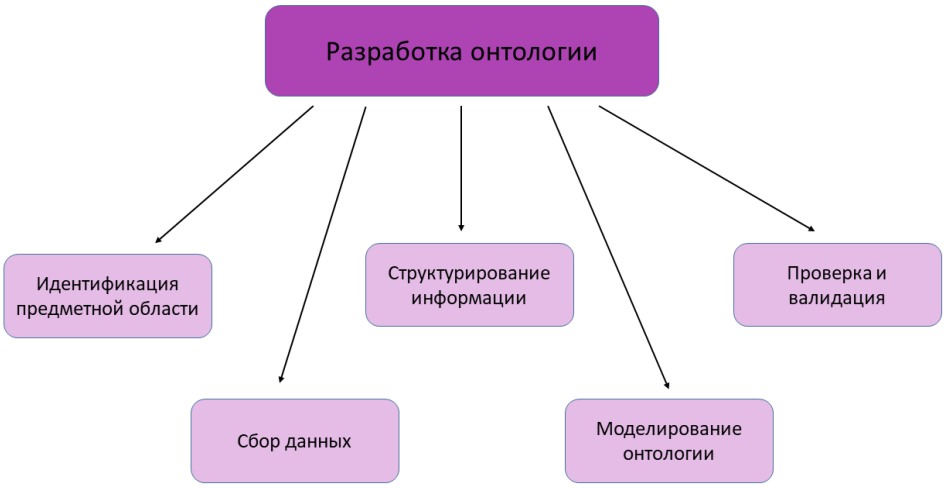


Рис. 1. Схема процесса разработки онтологии

Сбор данных включает в себя анализ существующих источников данных, включая анализ литературы, интервью с экспертами и сбор данных из открытых источников для определения ключевых концепций и отношений в предметной области.

Структурирование информации представляет собой организацию собранных данных в форме, понятной для последующего моделирования. Это может включать создание тезауруса, классификацию понятий и выявление связей между ними.

Моделирование онтологии подразумевает создание формальной спецификации онтологии, которая включает определение основных классов, свойств и отношений среди ключевых концепций структуры ожиданий на интеллектуальном рынке труда.

Проверка и валидация — проверка и тестирование созданной онтологии с помощью экспертов и заинтересованных сторон, чтобы обеспечить её корректность и целостность.

Онтология структуры ожиданий на интеллектуальном рынке труда может быть представлена в виде ориентированного графа, где ключевые концепции предметной области выступают в качестве узлов, а связи между ними выступают в виде ребер. Примерами концепций в данной онтологии могут быть «профессиональные навыки», «квалификация», «опыт работы», «потенциал», «ожидания работодателя», «ожидания работника», «требования к вакансиям» и другие [2].

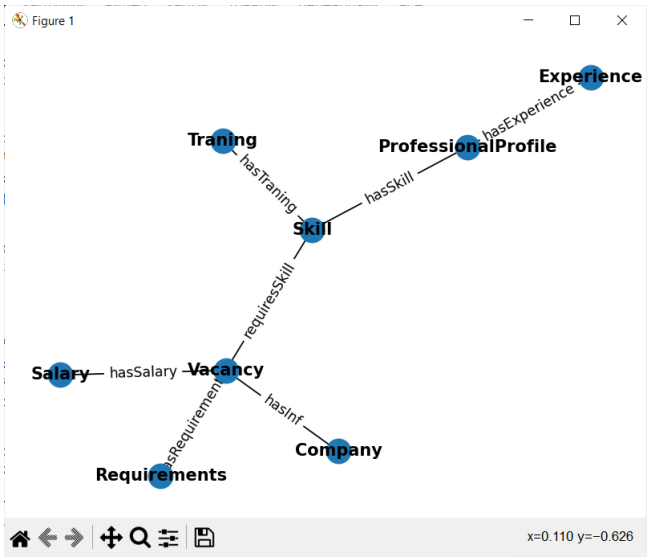


Рис. 2. Фрагмент онтологии для вакансий IT-специалистов

Каждая концепция может иметь свои атрибуты и связи. Например, концепция «профессиональные навыки» может быть связана с концепцией «требования к вакансиям», отражая соответствие навыков требованиям работодателей. Атрибутами могут быть уровень владения навыком, область его применения и другие характеристики.

Элементы онтологии также могут включать аксиомы, ограничения и классификации, которые определяют правила и законы взаимодействия между концепциями.

На рис. 2 представлен фрагмент онтологии для вакансий IT-специалистов.

2. Определение NLP и методы его обработки

Обработка естественного языка (Natural Language Processing, NLP) представляет собой область искусственного интеллекта, посвященную разработке методов и технологий для взаимодействия компьютеров с человеческим языком. В современном информационном обществе огромное количество данных представлено в текстовой форме, и NLP открывает возможности для их обработки, анализа и использования в различных областях, таких как машинный перевод, аналитика данных, автоматизация текстовой обработки, и многое другое.

Одним из ключевых аспектов NLP является обработка текста с целью понимания его смысла, структуры и контекста. Это включает в себя задачи как синтаксического и семантического анализа текста, так и распознавание, и извлечение информации из него. Среди основных методов NLP находятся алгоритмы машинного обучения, статистические модели, искусственные нейронные сети, а также инструменты для обработки текстовых данных, такие как токенизация, лемматизация и частеречная разметка [3].

Методы обработки естественного языка включают в себя различные подходы и техники для анализа и понимания текстовых данных на естественных языках. Один из таких методов в NLP — морфологический анализ, который включает в себя лемматизацию и стемминг.

Морфологический анализ направлен на изучение формы и структуры слов в тексте, включая их грамматические характеристики, части речи, склонения, спряжения и т. д. Морфологический анализ помогает понять особенности слова и его значения в контексте предложения.

Лемматизация является процессом приведения слова к его словарной (нормальной) форме — лемме. Например, для существительного «кошками» леммой будет «кошка», для глагола «бежал» леммой будет «бежать». Лемматизация позволяет сократить вариативность словоформ и упростить дальнейший анализ текста.

Стемминг — процесс обработки слова с целью выделения его основы (стебля). Основной идеей стемминга является обрезка аффиксов (окончаний) слова для получения его основного корня. Например, для слова «бегущий» стеммингом будет «бег», для слова «муха» стеммингом будет «мух». Стемминг позволяет подходить к словам с одинаковой основой как к одному и тому же слову, что упрощает анализ текста и поиск информации [4].

Использование лемматизации и стемминга в методах NLP позволяет улучшить точность и эффективность анализа текстов. Например, при построении поисковых систем, где важно учесть различные формы слова, морфологический анализ поможет объединить все варианты слова в одну лемму или основу, что позволит точнее найти соответствующий запрос.

3. Результаты разрабатываемых решений

На рис. 3–4 представлены навыки frontend разработчиков, python разработчиков и частота их встречаемости. Например, частота встречаемости JavaScript в frontend-разработке равна 0.5112, а в python-разработке — 0.19. В дальнейшем данный анализ поможет нам для связи классов, атрибутов, понятий IT-вакансий.

Далее нам необходимо найти семантическое сходство между концептами с использованием NLP методов.

На рис. 5 представлен вывод числового значения, которое представляет семантическое сходство между различными концептами.

Таким образом, путем дополнения онтологии и графа отношений мы можем корректно представить новые требования к вакансиям IT-специалистов и их соответствующие классы, подклассы.

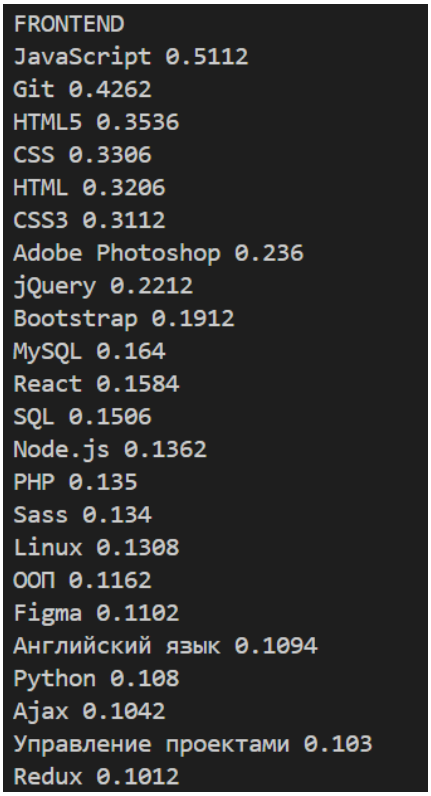


Рис. 3. Навыки frontend разработчиков и их частота встречаемости

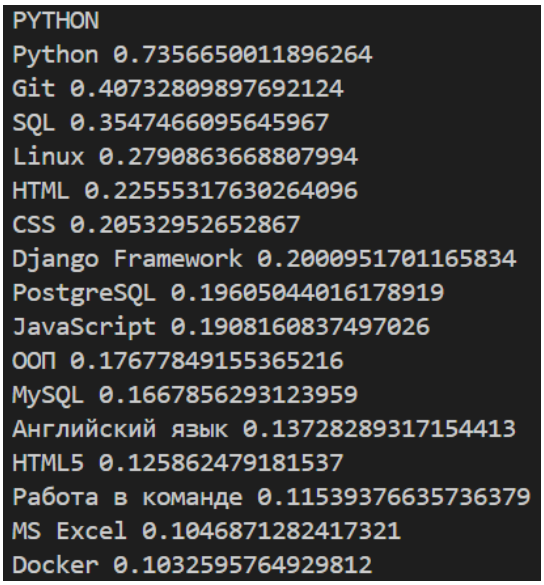


Рис. 4. Навыки python разработчиков и их частота встречаемости

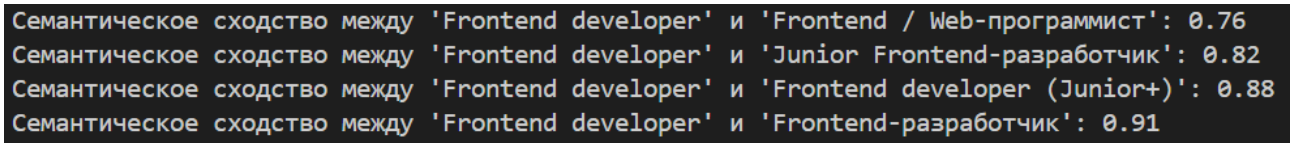


Рис. 5. Вывод семантического сходства между концептами

Заключение

В работе была создана онтология, которая описывает структуру ожиданий работодателей, навыков и квалификации кандидатов на данный рынок. Такой подход позволяет создавать более точные и детальные онтологии, являющиеся важным инструментом для улучшения процессов подбора персонала, анализа потребностей на рынке труда и принятия управленческих решений. Установление связей между объектами и применение современных технологий NLP позволяют создавать эффективные и инновационные системы для работы с текстовыми данными, повышая их ценность, полезность и точность анализа. Благодаря развитию дисциплин NLP и онтологий, мы можем создавать интеллектуальные системы, способные понимать и обрабатывать текстовую информацию, адаптироваться к разным задачам и принимать информированные решения на основе анализа текста.

Литература

1. *Суханов В. И.* Онтологии в представлении знаний: учебное пособие / В. И. Суханов. – Екатеринбург : Изд-во УрФУ, 2020. – 97 с.

2. Хорошевский В. Ф. Проектирование систем программного обеспечения под управлением онтологий: модели, методы, реализации / В. Ф. Хорошевский. – Самара : Изд-во ООО Новая Техника, 2019 – С. 429–448.

3. Автоматическая обработка текстов на естественном языке и компьютерная лингвистика: учебное пособие / Е. И. Большакова, Э. С. Клышинский, Д. В. Ландэ [и др]. – М. : МИЭМ, 2011. – 272 с.

4. *Гольдберг Й.* Методы в обработке естественного языка / пер. с анг. А. А. Слинкина. – М. : ДМК Пресс, 2019. – 282 с.

УДК 004.891

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОЛЛЕКТИВНОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ИНТЕРАКТИВНЫХ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМАХ

В. С. Котенко

Воронежский государственный университет

Аннотация. «Коллективный интеллект (КИ) — это мощный инструмент решения задач, который используется в многоагентных системах. Технология многоагентных систем (МАС) на данный момент активно развивается благодыаря своим основным преимуществам: гибкости, масштабируемости и эмерджентности.» Интерактивные генетические алгоритмы (ИГА) применяются для решения задач в тех областях, где поиск решения требует постоянной качественной оценки от человека. Эмоциональное мнение пользователя внедряется в эволюционный процесс как мера приспособленности особи. Данная статья изучает метод решения проблемы утомления пользователей при долгой работе с ИГА. Работа метода заключается в том, что множество пользователей одновременно работают с идентичной задачей с помощью ИГА, предоставляя в общий доступ свои суждения об особях и самих особей, что позволяет собрать их как коллективный интеллект. После этого создаётся стратегия использования КИ для ускорения поиска решений для конкретного пользователя в общей для пользователей системе ИГА.
Ключевые слова: коллективный интеллект, многоагентные системы, генетические алгоритмы, интерактивные генетические алгоритмы, групповое принятие решений.

Введение

Генетические алгоритмы (ГА) — это алгоритмы поиска и оптимизации, основанные на принципах естественного отбора, эволюции. Как известно, задачи оптимизации заключаются в нахождении минимума или максимума заданной, целевой функции.

При работе генетического алгоритма создается ряд решений, популяция, соответствующая рассматриваемой задачи, после чего наиболее хорошие решения порождают потомков путём рекомбинации и, иногда, мутации своих генов, из-за чего алгоритмы и называются эволюционными [1].

Процесс продолжается на протяжении многих поколений. Решение — это значение пригодности для каждой особи популяции, которое зависит от целевой функции. Каждое из возможных решений называется «хромосомой». Члены популяции оцениваются по функции приспособленности и получают баллы в зависимости от степени приспособленности.

В процессе отбора ряд хромосом с наивысшими баллами отбираются в качестве родителей для генерации следующего поколения, и посредством операции скрещивания между этими хромосомами генерируется новая популяция. Операция скрещивания — это процесс, при котором комбинация двух родительских хромосом генерирует новые решения, каждое из которых наследует некоторые черты от первого родителя и некоторые от второго. Особи из наилучшей популяции имею больше шансов дать потомство, а часть потомства унаследует лучшие гены родителей. Это соответствует дарвиновской теории выживания наиболее приспособленных. Таким образом, каждое новое поколение будет улучшать гены особей пока не выполнится заданный критерий остановки [1–3].

Интерактивные генетические алгоритмы выделяются своей возможностью включать человеческую интуицию и оценку в процесс оптимизации. В ИГА функция приспособленности не определена явно, она задаётся человеком, который оценивает качество каждого решения. Это позволяет ИГА решать задачи, которые трудно формализовать. В таких задачах чаще всего

гены хромосом кодируют информацию о визуальных качествах особи: цвете, форме, точном расположении мелкой детализации [4].

Одним из основных ограничений ИГА является проблема усталости пользователя, которая возникает, когда одному пользователю требуется оценивать решения в течение длительного периода [5].

1. Интерактивные генетические алгоритмы

На текущий момент существует несколько методов для ускорения работы ИГА.

В 2017 году был рассмотрен подход с автоматической оценкой неблагоприятных особей [6]. В статье рассматривалось применение ИГА для создания дизайна продукции, который окажется наиболее предпочтительным для пользователя. Сам алгоритм исключения кандидатов — это алгоритм обучения, который предсказывает принадлежность особи к набору путем итеративного уточнения двух границ, верхней границы (G) и нижней границы (S). Изначально G устанавливается как наиболее общий и принимает все образцы, в то время как S устанавливается как наиболее конкретный и не принимает ни одного образца. Затем алгоритм выполняет итерацию по обучающим образцам, обобщая или сужая границы по мере необходимости, чтобы принять или отклонить каждый образец.

Преимущество алгоритма заключается в том, что пользователь сначала работает со стандартным ИГА, но оценки пользователя формируют обучающую выборку, которую использует алгоритм для удаления результатов, которые скорее всего будут забракованы пользователем.

Подобные исследования ограничиваются ИГА с одним пользователем. Это несёт ряд недостатков: оценка отдельного человека часто страдает от субъективности или недостатка знаний, эволюционный поиск может быть направлен в ошибочное направление, и процесс будет излишне долог. Напротив, если новому пользователю предоставляется информация о проблеме, полученная от других пользователей, то его предпочтения могут быстрее стать осмысленными, и, таким образом, эволюционный процесс может ускориться, что значительно снизит утомляемость [7].

Предлагаемый подход можно сравнить с совместной коэволюцией [8]. При использовании совместного коэволюцинного алгоритма сложная задача оптимизации разбивается на несколько подзадач, и каждая подзадача решается с помощью отдельной подгруппы, разработанной отдельным эволюционным алгоритмом. Сотрудничество заключается в том, что популяции используют информацию, полученную от других популяций в ходе эволюционного процесса и сами делятся её.

В данном же методе сотрудничество заключается в поиске пользователей с похожими предпочтениями и использовании результатов найденных пользователей для ускорения эволюционного процесса текущего пользователя.

Определим задачу оптимизации следующим образом:

$$\max f(x)$$
$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S$$
$$S \subset R^n$$

где $f(x)$ — функция приспособленности, которую невозможно задать в явном виде, поэтому её значение зависит от предпочтения пользователя, x — n-мерная переменная, которая представляет собой особь, S — доступное пространство решений.

Так же, вместо использования чёткого значения функции приспособленности можно использовать нечёткую логику и задавать приспособленность особи через интервал. Такой подход позволяет пользователям быть менее строгими в своих предпочтениях [9].

2. Метод коллективного интеллекта

Первой задачей является выявление схожих между собой пользователей. Разумно предположить, если предпочтения одного пользователя схожи с предпочтениями другого, то их качественные оценки одних и тех же вещей будут схожими. Пусть все особи, которых оценили пользователи, находятся в общем хранилище. Тогда, используя метод кластеризации, особи группируются в кластеры. Пользователи, чьи оценки особей в кластере оказались наиболее схожи, определяются как пользователи со схожими предпочтениями.

Для кластеризации разумно использовать метод k-средних, а схожесть набора можно выразить следующим образом:

$$D_{S^i} = \sqrt{\frac{1}{L_i - 1}\sum_{j=1}^{Li} | x_j - \overline{x} |^2}$$

где $S^i = \{x_1^i, x_2^i, ..., x_{L_i}^i\}$ — i-й класс кластеризации, L_i — число схожих особей в i-м наборе, $\overline{x} = \frac{1}{L_i}\sum_{j=1}^{L_i} x_j$.

В таком случае, кластер в котором D_{S^i} принимает наибольшее значение обладает самым большим разнообразием в генотипе особей, и наоборот. Все рассматриваемые особи были отправлены в хранилище, то есть оказались самими предпочтительными для пользователя. Тогда в кластере с наименьшим разнообразием оказались особи, соответствующие чёткому вкусу пользователей, в то время как в кластере с наибольшим разнообразием находятся особи, которые не могут м такой же большой гарантией оказаться в предпочтении схожего пользователя, но имеют больший шанс понравиться новому пользователю, о предпочтениях которого ещё нет информации.

Таким образом, пользователи со схожими предпочтениями сформированы в общие группы. Это позволяет провести групповое принятие решений о том, какая именно особь из кластера является самой предпочтительной. Благодаря формированию групп мы избежали ситуации, в которой член экспертной группы на эмоциональном уровне испытывает неприязнь к данным особям или не вовлечён в особенности их фенотипа. Каждый участник группы высоко оценил приспособленность этих особей, а использование одного из методов принятия групповых решений, например аддитивной агрегации, позволит выбрать самый оптимальный вариант [10].

3. Применение коллективного интеллекта в интерактивном генетическом алгоритме

Основная задача применения коллективного интеллекта к однопользовательскому ИГА заключается в том, чтобы снизить утомляемость пользователя, ускорив его изучение текущей проблемы оптимизации, путем помощи в формировании предпочтений на начальных этапах ИГА, а также сохранения его предпочтения неизменными в последующих итерациях алгоритма.

Когда новый пользователь начинает выполнять ИГА, его предпочтения обычно нечеткие и неопределенные из-за отсутствия формализованных правил для функции приспособленности. Потребуется больше взаимодействий, чтобы получить достаточно знаний для определения предпочтений. Таким образом, задача состоит в том, чтобы помочь пользователю быстро подтвердить его предпочтения с помощью коллективного интеллекта.

На старте алгоритма вместо инициализации начальной популяции случайными значениями, пользователь получает особей из хранилища, принадлежащих самому разнообразному кластеру. Подобный подход позволяет не тратить время пользователя на оценку особей, которые единогласно признаются плохими, выбор предоставляется из уже оптимальных, в некото-

рой степени, вариантов. Так же при оценке особей происходит обратная связь, алгоритм коллективного интеллекта может оценить к какой группе со схожими предпочтениями отнести нового пользователя. После нахождения других наиболее похожих пользователей количество непригодных особей в каждой популяции станет ещё меньше.

В процессе эволюционного отбора у пользователя могут быть стабильные или нестабильные предпочтения. Предпочтения считаются нестабильными до тех пор, пока в течение заданного количества смен популяций больше половины генов в самых предпочтительных особей будут различны. После стабилизации предпочтений пользователю будут предлагаться особи в окрестностях от предпочтительной, что ещё больше ускорит поиск оптимального решения.

Заключение

Предложенный метод улучшения интерактивных генетических алгоритмов с помощью коллективного интеллекта позволяет минимизировать один из главных недостатков ИГА в виде утомления пользователя. Так же алгоритм формирует экспертные группы, чьи предпочтения являются схожими, благодаря чему, применяя методы группового принятия решений, становится возможным выбирать оптимальный результат качественной оценки, не опасаясь того, что излишняя неприязнь или фаворитизм повлияют на групповое суждение.

Литература

1. *Курейчик В. В.* Теория эволюционных вычислений / В. В. Курейчик, В. М. Курейчик, С. И. Родзин. – Москва : Физматлит, 2012. – 260 с.

2. *Moraglio A.* Geometric crossover for the permutation representation / A. Moraglio, R. Poli // Intelligenza Artificiale. – 2011. – Т. 5. – С. 49–63.

3. Mitchell, M. Genetic Algorithms and Artificial Life / M. Mitchell, S. Forrest // Artificial Life. – 1994. – Т. 1. – С. 297–289.

4. *Takagi H.* Interactive evolutionary computation: Fusion of the capabilities of EC optimization and human evaluation / H. Takagi // Proceedings of the IEEE. – 2001. – Т. 89, № 9. – С. 1275–1296.

5. *Yan J.* User Fatigue in Interactive Evolutionary Computation / J. Yan, M. Yong // Applied Mechanics and Materials. – 2011. – Т. 48–49. – С. 1333–1336.

6. *Sheikhi D.* Improving the interactive genetic algorithm for customer-centric product design by automatically scoring the unfavorable designs / D. Sheikhi, M. Kaedi // Hum. Cent. Comput. Inf. Sci. – 2017. – Т. 7, № 38. – С. 1–18.

7. *Gong D.* Cooperative interactive genetic algorithm based on user's preference / D. Gong, Z. Yong, T. Li // International Journal of Information Technology. – 2005. – Т. 11, № 10. – С. 1–10.

8. *Xialong M.* A Survey on Cooperative Co-Evolutionary Algorithms / M. Xialong, L. Xiadong, Z. Qingfu // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 421–441.

9. *Gong D.* Interactive genetic algorithms with individuals uncertain fitness / D. Gong, X. Sun, J. Yuan // Evolutionary Computation. – 2009. – С. 21–44.

10. *Sun. X.* Interactive genetic algorithm assisted with collective intelligence from group decision making / X. Sun, L. Yang, D. Gong, M. Li // IEEE Congress on Evolutionary Computation. – 2012. – С. 1–8.

УДК 004.942

ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ РАБОТЫ РАЗЛИЧНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НОНОГРАММ

А. Г. Кудаев, М. К. Чернышов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается задача расшифровки японских кроссвордов (нонограмм), для решения которой в данный момент не существует универсального алгоритма. При этом предлагаются собственные варианты решения данной задачи, обсуждаются вопросы сравнения рассматриваемых подходов между собой.
Ключевые слова: нонограмма, кроссворд, алгоритм.

Введение

Нонограмма — логическая головоломка, в которой, в отличие от обычных кроссвордов, закодированы не слова, а изображение. Этот тип головоломки представляет собой сетку, в которой каждая ячейка должна быть заполнена или оставлена пустой для того, чтобы получить загаданное изображение. Условия по краям сетки указывают длину и последовательность заполненных ячеек в той или иной строке или столбце.

В данной статье описаны два алгоритма решения задачи — алгоритм с возвратом и алгоритм итерационного прохода, приводится их сравнительный анализ, рассчитывается их алгоритмическая сложность.

1. Анализ алгоритма с возвратом

Данный алгоритм имеет второе название — метод проб и ошибок, которое прекрасно характеризует основную концепцию метода, заключающуюся в переборе всех ветвей дерева возможных решений. Тем не менее, если перебирать каждое возможное решение, то алгоритм становится не эффективным, поэтому будет использоваться его модификация, позволяющая анализировать текущий прогресс решения и отсекать варианты, которые не удовлетворяют заданному условию ещё на промежуточных вершинах.

Для формализации алгоритма необходимо закрепить правила, на которые будет опираться последующее изложение:

- N — количество строк нонограммы;
- M — количество ее столбцов;
- Каждая клетка поля может быть закрашена 2 цветами: белый или чёрный. В связи с этим, клетка имеет 3 состояния: закрашена белым, закрашена чёрным, не закрашена.

Таким образом, алгоритм решения задачи будет иметь следующий вид:

1) Ввести новую переменную $i = 1$, отвечающую за номер текущей клетки поля. Присвоить каждой клетке поля, следуя некоторой стратегии, индивидуальный номер в диапазоне $[1; N * M]$.

2) Закрасить клетку с индексом i белым цветом.

3) Проверить на соответствие условию. Если противоречий с условием не обнаружено, то при условии $i = N * M$, завершить работу алгоритма, иначе $i = i + 1$, перейти к шагу 2.

4) (Обнаружено противоречие с условием). Если клетка с индексом i закрашена белым цветом, то изменить цвет на чёрный, перейти к шагу 3.

5) Если клетка с индексом i закрашена чёрным цветом, то вернуть клетку в не закрашенное состояние, $i = i - 1$, перейти к шагу 4.

Поскольку клетка может быть закрашена только одним из двух цветов, а также каждый возможный вариант закраски клетки необходимо проверить на соответствие поставленному условию, сложность данного алгоритма оценивается по формуле: $O(2^{N*M} * \mu(N,M))$, где $\mu(N,M)$ — оценка сложности работы методов проверки на соответствие условию.

Плюсы:

• Если решение задачи существует, то в ходе выполнения данного алгоритма оно будет получено.

• Возможна модификация алгоритма путем улучшения качества поиска противоречий с условием задачи. При добавлении новых методов проверки на соответствие условию будет возрастать $\mu(N,M)$, однако важнее то, что при улучшенной работе данных методов ветки возможных решений, противоречащих условию, будут отбрасываться раньше, что сильно сократит количество рассматриваемых вершин в дереве и ускорит работу алгоритма.

• Возможна модификация алгоритма, связанная с выбором подходящей стратегии для присвоения индексов клеткам нонограммы. Очевидно, что клетки, находящиеся на границе изображения, намного проще анализировать на соответствие с условием, чем центральные клетки. В связи с этим можно попытаться подобрать стратегию, в которой анализ клеток начинается с тех, которые находятся на границе.

Минусы:

• Экспоненциальная сложность алгоритма.

• Алгоритм не является интуитивно понятным.

В целом, данный подход можно и нужно использовать в тех случаях, когда получение конечного результата является первостепенной задачей.

2. Анализ алгоритма итерационного прохода

Данный алгоритм интуитивно используется каждым игроком, желающим разгадать нонограмму. Его суть заключается в том, чтобы рассматривать поле не как набор клеток, а как набор линий и столбцов, и применять к ним некоторые методы, которые однозначно определяют, каким цветом закрашивать клетки. В первом приближении алгоритм заключается в поочерёдном применении определённого метода из существующего набора к каждой строке и каждому столбцу. Продолжать данный цикл следует до того момента, пока или не будет закончен анализ изображения, или не будет выявлено, что заданный набор методов не в состоянии разрешить текущую нонограмму. Для формализации алгоритма используются те же правила и обозначения, что и для алгоритма с возвратом.

Инструкция по работе алгоритма:

1) Определить методы, которые будут использованы для решения нонограммы, и их количество — *Count*. Пронумеровать все методы, используя некоторую стратегию.

2) Ввести переменную $i = 1$, отвечающую за индекс текущего метода.

Ввести переменную $countOfFinishedLines = 0$, отвечающую за подсчёт законченных линий (строк и столбцов).

3) Если $countOfFinishedLines = N + M$, то завершить алгоритм.

4) Выполнить метод под номером i для каждой строки и столбца. Если в процессе работы метода, линия полностью закрашивается, то $countOfFinishedLines = countOfFinishedLines + 1$.

5) Если $i = Count$, то $i = 1$ и перейти к шагу 3, иначе $i = i + 1$ и перейти к шагу 4.

Данная версия алгоритма работоспособна только в том случае, если набор предложенных методов способен решить нонограмму, что не всегда верно. В общем случае необходимо модифицировать данный алгоритм, который в конечном итоге будет выглядеть следующим образом:

1) Определить методы, которые будут использованы для решения нонограммы, и их количество — *Count*. Пронумеровать все методы, используя некоторую стратегию.

2) Ввести переменную $i = 1$, отвечающую за индекс текущего метода. Ввести переменную $countOfFinishedLines = 0$, отвечающую за подсчёт законченных линий (строк и столбцов). Ввести переменную *savePicture*, запоминающую текущее состояние изображения.

3) Если $countOfFinishedLines = N + M$, то завершить алгоритм.

4) Выполнить метод под номером i для каждой строки и столбца. Если в процессе работы метода, линия полностью закрашивается, то $countOfFinishedLines = countOfFinishedLines + 1$.

5) Если $i \neq Count$, то $i = i + 1$ и перейти к шагу 4.

6) ($i = Count$). Сравнить текущее изображение с тем, которое зафиксировано в *savePicture*. Если изображения не содержат отличий, то завершить алгоритм с выводом, что текущий набор методов не способен решить данную нонограмму. Если различия присутствуют, то зафиксировать в *savePicture* текущее изображение, $i = 1$, перейти к шагу 3.

Для подсчёта оценки сложности данного алгоритма необходимо понять, что алгоритм является удобной оболочкой, позволяющей работать с методами, которые на самом деле и решают нонограмму. Таким образом, предварительная оценка сложности данного алгоритма будет следующей:

$$\mathrm{O}\left(\left(\sum_{i=1}^{Count} v_i\right) * countCicle\right), \tag{1}$$

где v_i — скорость работы i-го метода, *countCicle* — количество циклов, которое потребовалось для завершения алгоритма.

Данный результат можно уточнить и улучшить, изучив принципы работы методов, решающих нонограммы. Любой из данных методов анализирует условие, соответствующее рассматриваемой линии, и на его основе, а также позиции закрашенных клеток делает определённые выводы. Условия, соответствующие каждой линии, представляют из себя последовательность чисел, указывающих на то, сколько клеток подряд должно быть закрашено в текущей строке. Учитывая данную информацию, становится ясно, что любому методу для анализа строки необходимо проходить по всем числам из условия, соответствующего данной линии. Таким образом, оценка сложности алгоритма будет линейной: O(*countNumber*), где *countNumber* — количество чисел в условии текущей строки.

При попытке уточнить данный результат необходимо понять, какое максимальное количество чисел может содержать строка длиной в X клеток. При максимально плотной расстановке максимально маленьких чисел (единиц), выявляется чёткая верхняя граница — $\left[\frac{\mathrm{X}}{2}\right] + 1$. Пример представлен на рис. 1.

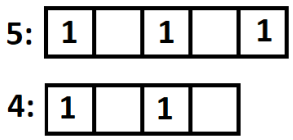


Рис. 1. Демонстрация максимально плотной расстановки чисел в строках размером 5 и 4 клетки

Таким образом, оценка скорости работы методов выглядит следующим образом: $\mathrm{O}\left(\left[\frac{\mathrm{X}}{2}\right] + 1\right)$, где X — количество клеток в текущей линии. Используя данный результат, можно уточнить оценку, полученную в формуле (1):

$$\begin{aligned} &\mathrm{O}(Count * (N * (\frac{M}{2} + 1) + M * (\frac{N}{2} + 1)) * countCicle) = \\ &= \mathrm{O}(Count * (NM + N + M) * countCicle). \end{aligned} \tag{2}$$

В данной формуле фигурирует неизвестная переменная *countCicle*, отвечающая за количество прогонов всех методов. К сожалению, оценить её не представляется возможным, поскольку она зависит от многих факторов, таких как эффективность методов, их количество, порядок, в котором они вызываются.

Плюсы:

• Алгоритм имитирует человеческий подход к решению нонограмм, что делает его более понятным и простым в реализации.

• Достигается высокая скорость работы, благодаря однозначному закрашиванию клеток.

• Алгоритм можно бесконечно совершенствовать, добавляя в него использование новых методов закрашивания в общий список.

• Возможна модификация алгоритма, связанная с выбором подходящей стратегии для последовательности вызовов методов. Если метод закрашивает большое количество клеток и имеет хорошую эффективность, его можно вызывать несколько раз за один цикл.

• Возможна модификация алгоритма, подразумевающая обработку только тех линий, которые ещё не завершены.

Минусы:

• Ответ не всегда может быть получен, и определить это, к сожалению, до прогонки всех методов закрашивания, невозможно.

• После добавления новых методов решения в список необходимо анализировать все существующие методы. Это важно, так как новые алгоритмы могут включать в себя более хорошую логику работы старых алгоритмов, что делает наличие последних бесполезными и замедляющими ход решения.

Таким образом, алгоритм итерационного прохода является гибким и универсальным подходом к решению нонограмм, благодаря возможности добавления новых методов. Главным недостатком является то, что его нельзя назвать универсальным из-за вероятности возникновения ситуаций, в которых решение исходной задачи не будет получено.

Заключение

В результате проведённой работы изучены главные особенности нонограмм, предложены алгоритмы их раскодирования, получены приблизительные оценки сложности работы каждого из алгоритмов решения данной задачи, а также сформулированы основные достоинства и недостатки рассмотренных подходов.

Литература

1. Методы решения японских кроссвордов. – URL: https://www.nonograms.ru/methods (дата обращения: 10.11.2024).

2. Общая информация об истории создания нонограмм. – URL: https://www.puzzlemuseum.com/griddler/gridhist.htm (дата обращения: 10.11.2024).

3. Дополнительные методы решения нонограмм. – URL: https://www.puzzlemuseum.com/griddler/gridins.htm (дата обращения: 10.11.2024).

УДК 519.63:004.032.26

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕН БАРЬЕРНЫХ ОПЦИОНОВ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОСЕТЕЙ

О. Е. Кудрявцев, Д. В. Постолова

ООО НПФ «ИнВайз Системс»,
Южный федеральный университет

Аннотация. В данной статье рассматривается применение искусственных нейронных сетей (ANN) для вычисления цен барьерных опционов. Основное внимание уделяется разработке метода для аппроксимации функций выплат барьерных опционов, где разрывная функция выплат заменяется на непрерывную аппроксимацию с использованием нейронных сетей. Данный подход обеспечивает улучшенную сходимость и стабильность вычислений. Нейросетевые модели позволяют эффективно и гибко оценивать цены опционов, обеспечивая высокую точность по сравнению с традиционными методами.
Ключевые слова: искусственные нейронные сети, вычислительная финансовая математика, барьерные опционы, модель Блэка — Шоулза.

Введение

В последние годы модели для оценки цен опционов с учетом как постоянной, так и стохастической волатильности становятся все более актуальными в финансовой математике. Эти модели позволяют более точно отражать динамику цен на активы и оптимизировать стратегии хеджирования. В данной статье мы рассматриваем общий подход к вычислению цен опционов, сосредоточившись на методах, основанных на нейронных сетях, таких как искусственные нейронные сети (ANN).

В работах Цыбенко и Хорника [1–2] доказаны теоремы, подтверждающие возможность использования нейронных сетей различных архитектур для аппроксимации непрерывных функций многих переменных. Эти результаты получили название теорем универсальной аппроксимации. В отличие от традиционных методов, нейронные сети способны выявлять скрытые закономерности и обеспечивать высокую точность при решении задач с большой размерностью. Кроме того, нейронные сети могут быть частью гибридных численных методов, выполняя рутинные и повторяющиеся задачи [3].

Стоит отметить несколько исследований, рассматривающих разные аспекты применения нейросетей в финансовой математике. В исследовании [4] рассматривается применение нейросетей в корпоративных финансах, акцентируя внимание на прогнозировании банкротства компаний с помощью однослойных нейронных сетей. Этот подход помогает выявить связь между структурой капитала и корпоративной производительностью, а также улучшает результаты прогнозирования.

Другой подход, представленный в исследовании [5], предлагает два альтернативных метода для аппроксимации функций в финансовых приложениях: generalized stochastic sampling (gSS) и functional tensor train (fTT). Эти методы являются эффективными альтернативами глубоким нейронным сетям и часто превосходят их в типичных финансовых задачах. Важное преимущество этих методов — удовлетворение строгих требований финансовых приложений, таких как предсказуемость и объяснимость.

В работе [6] разработан гибридный численный метод «deep parametric PDE», который объединяет эффективность глубокого обучения для высокоразмерных задач с традиционными методами решения уравнений в частных производных. Этот метод показал высокую производительность в задачах оценки кредитного риска контрагентов и обладает свойством размер-

но-независимой сходимости, используя гиперболический тангенс в качестве функции активации в глубоких нейронных сетях.

В исследовании [7] рассматривается применение нейронных сетей с долгой краткосрочной памятью (LSTM) для прогнозирования финансовых временных рядов. Модель LSTM эффективно решает проблемы нелинейности и нестационарности данных, что делает ее подходящей как для краткосрочного, так и для долгосрочного прогнозирования в финансовой сфере. Результаты исследования показали, что LSTM превосходит другие методы при многократном прогнозировании, что делает ее полезной для анализа временных рядов на финансовых рынках.

Статья [8] посвящена использованию нейронных сетей для решения задачи хеджирования многокомпонентных выплат с помощью ванильных опционов на корзину активов. В частности, предлагается использовать однослойные нейронные сети прямого распространения с функцией активации ReLU для аппроксимации таких выплат. Исследование показало, что предлагаемый метод обеспечивает более точные результаты хеджирования по сравнению с традиционными методами, основанными на опционах на один актив, что делает этот подход перспективным для финансового рынка.

Работа [9] анализирует влияние вычислительной математики на современные финансовые рынки и подчеркивает роль нейронных сетей и других методов машинного обучения в улучшении прогнозов и оптимизации управления рисками. В статье рассматриваются возможности использования этих технологий для оценки деривативов и повышения эффективности финансовых операций.

В исследовании [10] фокусируется внимание на применении искусственных нейронных сетей для моделирования процессов Леви при построении методов Монте-Карло. Нейронные сети используются для аппроксимации функций распределений процесса Леви и его экстремумов. Кроме того, в исследовании были доказаны вероятностные аналоги теорем универсальной аппроксимации.

1. Модели ценообразования опционов при постоянной и стохастической волатильности

Цены опционов зависят от различных факторов, среди которых важное место занимают волатильность и ее динамика. В финансовой теории различают две основные категории моделей: модели с постоянной волатильностью и модели со стохастической волатильностью. Каждая из этих категорий имеет свои особенности, преимущества и недостатки.

Модели с постоянной волатильностью предполагают, что волатильность актива остается неизменной на протяжении всего срока действия опциона. Наиболее известной моделью данного типа является модель Блэка — Шоулза [11]. Модели со стохастической волатильностью позволяют волатильности изменяться со временем, учитывая различные рыночные условия.

При сравнении моделей с постоянной и стохастической волатильностью важно учитывать не только точность предсказаний, но и их практическое применение. Модели с постоянной волатильностью более доступны и быстрее в вычислении, что делает их удобными для трейдеров и аналитиков. В то же время, стохастические модели обеспечивают более реалистичные оценки, что может быть решающим фактором при принятии инвестиционных решений.

Выбор модели зависит от конкретных условий и целей анализа. Для коротких временных промежутков и менее сложных ситуаций модели с постоянной волатильностью могут быть вполне приемлемыми. Однако для долгосрочных прогнозов и более сложных финансовых инструментов использование стохастических моделей является более оправданным.

Для точного моделирования и численного анализа уравнения Блэка — Шоулза требуется генерация начальных условий, охватывающих возможные сценарии поведения цен на активы и опционные выплаты в начальный момент времени. Начальные условия формируются на основе распределения цен, охватывающего диапазон возможных значений переменных, та-

ких как цена актива и параметры опциона, что помогает модели учесть возможные состояния базового актива. Также важна подготовка выборок значений для промежуточных состояний, которые характеризуют взаимодействие цены актива и времени, что повышает полноту данных для обучения модели.

Для создания данных, описывающих уравнение, используются случайные выборки значений переменных в пределах их допустимых диапазонов. Такой метод помогает улучшить обучаемость модели, так как модель получает возможность охватить всю область потенциальных состояний актива и опциона. Данный подход позволяет создать репрезентативную выборку для моделирования различных сценариев и повышения точности прогнозов.

Оптимизация решения уравнения Блэка — Шоулза осуществляется посредством минимизации невязки между предсказанными моделью и теоретически ожидаемыми значениями цен на опционы. Функция потерь учитывает производные по переменным времени и пространству и позволяет вычислить их значения в явном виде, что необходимо для численного решения дифференциальных уравнений.

Для минимизации ошибки предсказания цены опциона функция потерь включает несколько компонентов. Во-первых, ошибка рассчитывается на основе изменений цены актива с учетом волатильности, влияния ставки доходности и производных второго порядка. Во-вторых, учитываются отклонения по граничным данным, что важно для соблюдения условий на границах решения. Этот комбинированный подход позволяет модели обучаться на более точных данных и лучше аппроксимировать решение уравнения в динамических условиях.

Барьерные опционы, в отличие от стандартных, активируются или аннулируются, когда цена базового актива достигает заранее определенного уровня. Уравнение Блэка — Шоулза для барьерного опциона остается фундаментальным для вычисления его цены, однако требует учета дополнительных граничных условий. В данном случае барьерный колл-опцион рассматривается в условиях, когда цена актива S_t движется в пределах $(0, H)$, где H — верхний барьер.

Для барьерного *call* опциона с верхним барьером h, который аннулируется, если цена актива достигает уровня h, значение опциона $V_{barrier}(S,t)$ может быть определено по формуле (1).

$$V_{barrier}(S,t) = \begin{cases} 0\ , & S \geq H \\ V_{BS}(S,K,r,\sigma,T-t) - \text{ коррекция}, & S \leq H \end{cases}, \tag{1}$$

где $V_{BS}(S,K,r,\sigma,T-t)$ — стандартная формула Блэка — Шоулза для европейского опциона *call*,

коррекция — корректирующий элемент, учитывающий вероятность достижения барьера до момента экспирации.

Для обеспечения непрерывности функции выплат вблизи барьера, на отрезке $[h-0.01, h]$, применяется корректирующая функция, которая удовлетворяет уравнению Блэка — Шоулза (2).

$$y(x,t) = \frac{(e^{h-0.01}-1)}{(e^{h-0.01}-e^{h})} e^{x} + \frac{(e^{h-0.01}-1)}{1-e^{-0.01}} e^{r(t-T)}, \tag{2}$$

где $x \in [h-0.01, h]$ и $t = T$.

В точке $x = h-0.01$ функция $y(x,t)$ совпадает с функцией выплат $\max(Se^{x}-K, 0)$, а в точке $x = h$ равна нулю, что обеспечивает непрерывность функции. Это позволяет устранить разрывы и сделать функцию выплат непрерывной, что способствует более эффективному обучению модели и лучшему соответствию аналитическому решению, согласно теореме Цыбенко.

2. Архитектура модели ANN для вычисления цен опционов на примере модели Блэка — Шоулза

Искусственная нейронная сеть (ANN) является классической моделью, широко используемой для решения задач регрессии и классификации. В данном случае мы используем ANN для

моделирования цен на опционы с использованием простой архитектуры, которая состоит из входного слоя, одного или нескольких скрытых слоев и выходного слоя.

Входной слой принимает два основных параметра — значение переменной x, которая отражает логарифмическое отношение цены базового актива к цене страйка, и время t, оставшееся до экспирации опциона. Эти параметры определяют текущие рыночные условия и позволяют модели адаптировать предсказания в зависимости от изменения рынка.

Основная часть обработки данных происходит в скрытых слоях. В ANN скрытые слои используются для нелинейного преобразования входных данных, что позволяет модели выявлять сложные зависимости между переменными. Мы используем активационные функции, такие как сигмоида, для обработки данных, что способствует более плавной интерполяции значений и предотвращает скачкообразные изменения в выходных данных.

Выход модели представляет собой предсказанное значение цены опциона, которое приближается к аналитическому решению уравнения Блэка — Шоулза. Наша цель — минимизировать отклонение между предсказанными значениями и теоретически вычисленными ценами на основе функции потерь, которая учитывает ошибки по начальному и граничным условиям.

В логарифмической шкале уравнение Блэка — Шоулза принимает вид (3).

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-rV=0, \tag{3}$$

где $x=\ln\left(\frac{S}{K}\right)$ — логарифмическая цена актива относительно страйка,

r — безрисковая ставка,

σ — волатильность актива.

При экспирации опциона (в момент времени $t=T$), начальное условие определяется выплатой по опциону *call* (4).

$$V(x,T)=\max(K\cdot(e^x-1),0), \tag{4}$$

где $\max(K\cdot(e^x-1),0)$ соответствует выплате по опциону *call*, если $S>K$.

Для минимизации невязки и корректной аппроксимации цены барьерного опциона используется функция ошибок, которая включает два основных компонента: невязку для решения уравнения и отклонения на границе.

Основная часть ошибки рассчитывается по невязке уравнения Блэка — Шоулза. Для каждой точки внутри области определения модели (значения x и t) вычисляется ошибка между производными модели и значением, заданным уравнением (5).

$$loss_{BS}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial t}=\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-rV\right)^2, \tag{5}$$

где N — количество точек в выборке уравнения.

Для удовлетворения условия $V(h,t)=0$ рассчитывается дополнительный компонент ошибки на границе, измеряющий отклонение предсказания модели от граничного значения (6), (7).

$$loss_{boundary}=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}(V(h,t_j)-0)^2, \tag{6}$$

где M — количество точек на границе $x=h$.

$$loss_{initial}=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}(V(x_l,T)-(e^{x_l}-K)_+)^2, \tag{7}$$

где $x_l<h$.

Таким образом, итоговая функция ошибок принимает вид (8):

$$Loss=loss_{BS}+loss_{boundary}+loss_{initial}. \tag{8}$$

Искусственные нейронные сети показали себя эффективными для случаев с устойчивыми рыночными условиями, где волатильность остается постоянной. Однако в условиях высокой волатильности и неожиданных изменений, ANN может недостаточно хорошо учитывать внезапные рыночные колебания, что требует более адаптивного подхода. В построенной модели искусственной нейронной сети (ANN) для вычисления цен барьерных опционов использовалась архитектура с одним скрытым слоем. Модель состоит из двух полносвязных слоев: первый слой преобразует входное пространство в скрытое пространство, а второй слой преобразует скрытое пространство в выходное пространство. В качестве функции активации используется ReLU, что придает модели необходимую нелинейность. После 10000 эпох обучения удалось добиться ошибки на уровне 1.7167×10^{-6}, что подтверждает высокую точность аппроксимации предложенной модели.

Заключение

ANN показала высокую точность на стабильных данных с постоянной волатильностью. Аналогичные подходы с помощью ANN могут быть использованы для моделей со стохастической волатильностью. В этом случае модель будет зависеть от трех переменных x, t, v, где v — волатильность. Спайковые нейронные сети могут использоваться более эффективно при вычислении вероятности пересечения барьера, который является частью цены барьерного опциона. В аппроксимации непрерывных функций SNN, скорее, проигрывают ANN, но, учитывая их вероятностную природу, могут помогать вычислять отдельные параметры.

Таким образом, использование ANN и SNN может быть перспективным подходом, позволяющим использовать сильные стороны каждой архитектуры в зависимости от текущих рыночных условий и задач прогнозирования.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00474, https://rscf.ru/project/23-21-00474/).

Литература

1. *Cybenko G.* Approximation by superpositions of a sigmoidal function // Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS). – 1989. – Т. 2, № 4. С. 303–314.

2. *Hornik K., Stinchcombe M., White H.* Multilayer feedforward networks are universal approximators // Neural networks. – 1989. – Т. 2, № 5. – С. 359–366.

3. *Kudryavtsev O., Grechko A., Mamedov I.* Monte Carlo method for pricing lookback options in Lévy models // Theory Probab. Appl. – 2024. – Т. 69, № 2. – С. 243–264.

4. *Séverin E.* Neural Networks and their application in the fields of corporate finance // Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne. – 2008. – С. 1–15.

5. *Antonov A., Piterbarg V.* Alternatives to Deep Neural Networks for Function Approximations in Finance // SSRN Electronic Journal. – 2021. – URL: https://ssrn.com/abstract=3958331 (дата обращения: 03.10.2024).

6. *Glau K., Wunderlich L.* Neural network expression rates and applications of the deep parametric PDE method in counterparty credit risk // Annals of Operations Research. – 2023. – Т. 336. – С. 1–27.

7. *Preeti, Bala R., Singh R. P.* Financial and Non-Stationary Time Series Forecasting using LSTM Recurrent Neural Network for Short and Long Horizon // 2019 10th International Conference on Computing, Communication and Networking Technologies (ICCCNT). – 2019. – С. 1–7.

8. *Bossu S., Crépey S., Nguyen H.-D.* Spanning Multi-Asset Payoffs With ReLUs. – 2024. – С. 1–43.
9. *Bao Z.* Research on the Influence of Financial Mathematics on Modern Financial Market // Highlights in Business, Economics and Management. – 2023. – Т. 15. – С. 260–266.
10. *Kudryavtsev O., Danilova N.* Applications of artificial neural networks to simulating Lévy processes // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – Т. 271. – С. 421–433.
11. *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – Т. 81, № 3. – С. 637–654.
12. *Wilson E. B.* Probable inference, the law of succession, and statistical inference // Journal of the American Statistical Association. – 1927. – Т. 158, № 22. – С. 209–212.

УДК 519.6

РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ТРАНСПОРТА ВЗВЕСИ В МЕЛКОВОДНОМ ВОДОЕМЕ

И. Ю. Кузнецова[1], А. Е. Чистяков[2]

[1]Южный федеральный университет
[2]Донской государственный технический университет

Аннотация. В работе приведено описание трехмерной гидродинамической модели движения водной среды, включающей в себя уравнения движения Навье — Стокса, уравнение неразрывности, регуляризированное по Б. Н. Четверушкину и учитывающее влияние примеси на плотность водной среды. Данная модель дополнена моделью транспорта взвеси, учитывающей гранулометрический состав, скорость течения водного потока, сложную геометрию береговой линии и дна, сгонно-нагонные явления, ветровые течения и трение о дно, турбулентный обмен и др. Проведены численные эксперименты по исследованию процесса транспорта многокомпонентной взвеси в мелководном водоеме на основе предложенной трехмерной модели.
Ключевые слова: модель гидродинамики, регуляризация по Б. Н. Четверушкину, транспорт взвеси, схемы расщепления.

Введение

При прогнозировании масштабов стихийных бедствий, а также при планировании реализации крупных инженерных проектов необходимо моделировать возможные сценарии влияния прогнозируемых процессов или проводимых работ на экологическое состояние акватории [1, 2]. В случае чрезвычайных ситуаций требуется получение не только оперативных, но и как можно более точных прогнозов. Для повышения точности описания процессов, происходящих в акватории, требуется построение математических моделей, наиболее точно описывающих происходящие процессы, а также разработка методов и алгоритмов для их численной реализации.

В рамках статьи предлагается рассмотреть комплексную модель гидродинамики и транспорта взвеси. При этом при построении модели гидродинамики рассматривается модель, учитывающая относительно малый временной множитель-гиперболизатор (регуляризация по Б. Н. Четверушкину) [3, 4]. Применение такого подхода приводит к снижению вычислительных затрат при решении самого трудоемкого этапа решения системы, описывающий гидродинамические процессы, — уравнения для расчета давления. Также для повышения точности моделирования процесса транспорта и осаждения взвеси предлагается применять схемы расщепления и вихреразрешающие разностных схем, устойчивые в случае больших сеточных чисел Пекле [5].

1. Постановка задачи

Для моделирования движения водной среды в мелководном водоеме рассмотрим математическую модель гидродинамики с уравнением неразрывности, регуляризованным по Б. Н. Четверушкину [6]:

$$\mathbf{V}_t' + \left(\mathbf{V}\nabla\right)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla\mathbf{P} + \boldsymbol{\mu}\Delta\mathbf{V}, \tag{1}$$

$$\rho_t' + \tau^*\rho_{tt}'' + \nabla\left(\rho\mathbf{V}\right) = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{V} = \{u,\ v,\ w\}$ — компоненты вектора скорости [м/с]; P — давление [Па], ρ — плотность [кг/м^3], $\boldsymbol{\mu} = \{\mu,\ \nu\}$ — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена [м^2/с], $\tau^* \sim h/c$ — параметр регуляризации или характерное время между столкновениями молекул, h — шаг расчетной сетки, c — скорость звука.

Система уравнений (1)–(2) рассматривается при следующих граничных условиях:

– на входе $u = u_0,\ v = v_0,\ \mathbf{P}'_{\mathbf{n}} = 0,\ \mathbf{V}'_{\mathbf{n}} = 0$;

– боковая граница (берег и дно) $\rho\mu u'_{\mathbf{n}} = -\tau_x,\ \rho\mu v'_{\mathbf{n}} = -\tau_y,\ V_{\mathbf{n}} = 0,\ \mathbf{P}'_{\mathbf{n}} = 0$;

– верхняя граница $\rho\mu u'_{\mathbf{n}} = -\tau_x,\ \rho\mu v'_{\mathbf{n}} = -\tau_y,\ w = -\omega - P'_t/\rho g,\ \mathbf{P}'_{\mathbf{n}} = 0$,

где $\mathbf{V}_{\mathbf{n}}$ — нормальная составляющая вектора скорости, $\mathbf{n}$ — вектор нормали, направленный внутрь расчетной области, ω — интенсивность испарения жидкости, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_x,\ \tau_y\}$ — тангенциальное напряжение [6], g — ускорение свободного падения [м/с^2].

Дополним рассмотренную модель гидродинамики моделью транспорта многокомпонентной взвеси на основе уравнения диффузии-конвекции:

$$\left(c_r\right)'_t + \left(uc_r\right)'_x + \left(vc_r\right)'_y + \left(\left(w + w_{s,r}\right)c_r\right)'_z = \left(\mu\left(c_r\right)'_x\right)'_x + \left(\mu\left(c_r\right)'_y\right)'_y + \left(\nu\left(c_r\right)'_z\right)'_z + F_r, \qquad (3)$$

где c_r — концентрация r-й фракции взвеси [мг/л]; $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости течения водного потока [м/с]; $w_{s,r}$ — скорость осаждения r-й фракции взвеси [м/с]; μ, ν — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена, соответственно [м^2/с]; F_r — функция, описывающая интенсивность распределения источников r-й фракции взвеси [мг/(л·с)].

Система уравнений (3) рассматривается при следующих граничных условиях:

– на свободной поверхности: $\left(c_r\right)'_z = 0$;

– вблизи поверхности дна: $\nu\left(c_r\right)'_z = -w_{s,r}c_r$;

– на боковой поверхности: $\left(c_r\right)'_{\mathbf{n}} = 0$, если $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) \le 0$, и $\mu\left(c_r\right)'_{\mathbf{n}} = -(\mathbf{V}, \mathbf{n})c_r$, если $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) > 0$, где $\mathbf{V}_{\mathbf{n}}$ — нормальная составляющая вектора скорости, $\mathbf{n}$ — внешний вектор нормали (вектор нормали, направленный вне расчетной области).

Система уравнений (1)–(3) позволяет моделировать процесс транспорта примесей с учетом гранулометрического состава взвеси, скорости течения водного потока, ветровых течений и трения о дно, турбулентного обмена и др. Для повышения точности моделирования в условиях сложной геометрии береговой линии и дна можно воспользоваться функцией частичной заполненности [5].

2. Метод решения

Дискретизацию непрерывной модели (1)–(3) выполним на равномерной пространственно-временной расчетной сетке.

Аппроксимацию модели гидродинамики (1)–(2) выполним с применением метода поправки к давлению [7], которое сводит решение поставленной задачи к решению трех подзадач: расчет вектора скорости без учета давления на промежуточном временном слое, решение уравнения для расчета давления и расчет вектора скорости водного потока на следующем временном слое по явной схеме. Стоит отметить, что с вычислительной точки зрения самым трудоемким этапом является расчет поля давления. В работе [6] показано, что применение регуляризатора Б. Н. Четверушкина в уравнении неразрывности влечет за собой изменение способа расчета поля давления и показано, что рассмотренный подход менее вычислительно трудоемок. В работе [8] представлено исследование устойчивости разностной схемы уравнения для расчета давления и оценена погрешность аппроксимации данного уравнения.

Аппроксимацию уравнения (3) проведем на основе явно-неявной схемы расщепления [9, 10], которая сводит решение трехмерной задачи к моделированию на основе явной схемы в

горизонтальных направлениях, и симметричной схемы с весами — по вертикальному направлению (по глубине). Дальнейшая аппроксимация уравнений в горизонтальных направлениях выполнена с применением модифицированной схемы «кабаре» [5], а решение уравнения по вертикальному направлению получено методом прогонки [11].

3. Результаты численных экспериментов

Реализации дискретных аналогов уравнений модели (1)–(3) разработан программный комплекс на языке C++ [12]. В качестве примера работы данного комплекса рассмотрим результаты моделирования процесса транспорта двухкомпонентной взвеси в тестовой области.

Расчетная область представляет собой параллелепипед 1 км × 720 м × 10 м. Пространственная расчетная сетка имеет следующее количество ячеек: 100 × 72 × 10, количество временных слоев — 3 600 и 7 200, то есть 1 ч. и 2 ч. после сброса взвеси, соответственно.

Функция источника взвеси задавалась в области 200–250 м × 300–400 м × 5,5 м. В табл. 1 представлены параметры двух фракций взвеси.

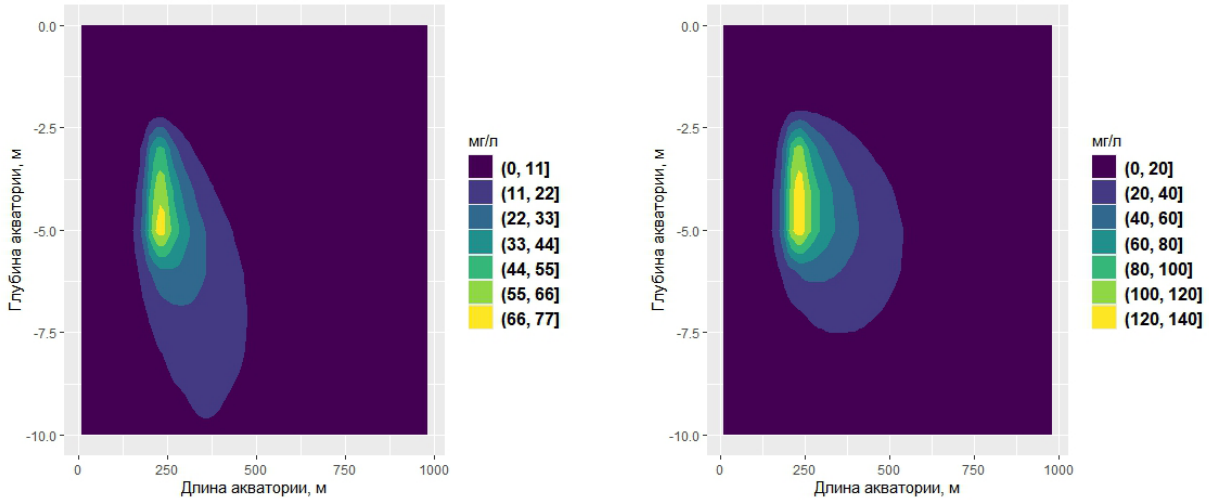
Таблица 1

Параметры фракций взвеси

Параметр	Фракция 1	Фракция 2
Плотность, кг/м^3	2700	2700
Диаметр частиц фракции, мм	0,05	0,03
Коэффициент формы частиц фракций	0,222 (шарообразная форма)	
Скорость осаждения, мм/с	2,31	0,83
Содержание, %	35	65

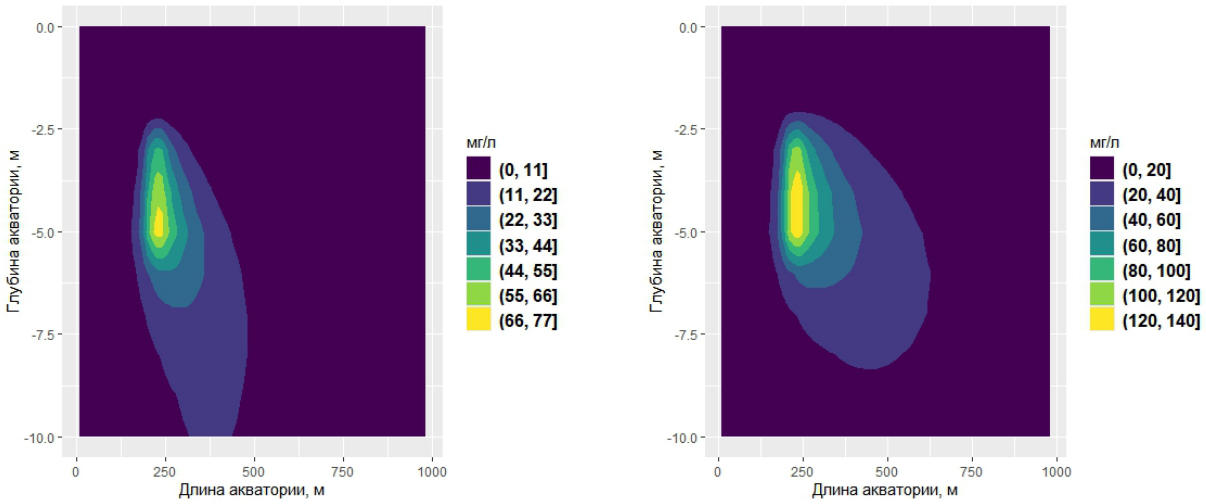
На рис. 1–2 представлены результаты работы программного комплекса по моделированию распространения взвеси в водной среде через 1 ч. и 2 ч. после сброса взвеси. Трехмерная расчетная область представлена в срезе плоскостью вдоль оси Oy (по ширине водоема) в зоне с наибольшей концентрацией взвеси, то есть по середине рассматриваемой акватории.

На рис. 3–4 представлены результаты работы программного комплекса по моделированию зон осаждения взвеси на дно в срезе по ширине водоема. Срез брался в областях с наибольшей высотой осажденного материала.



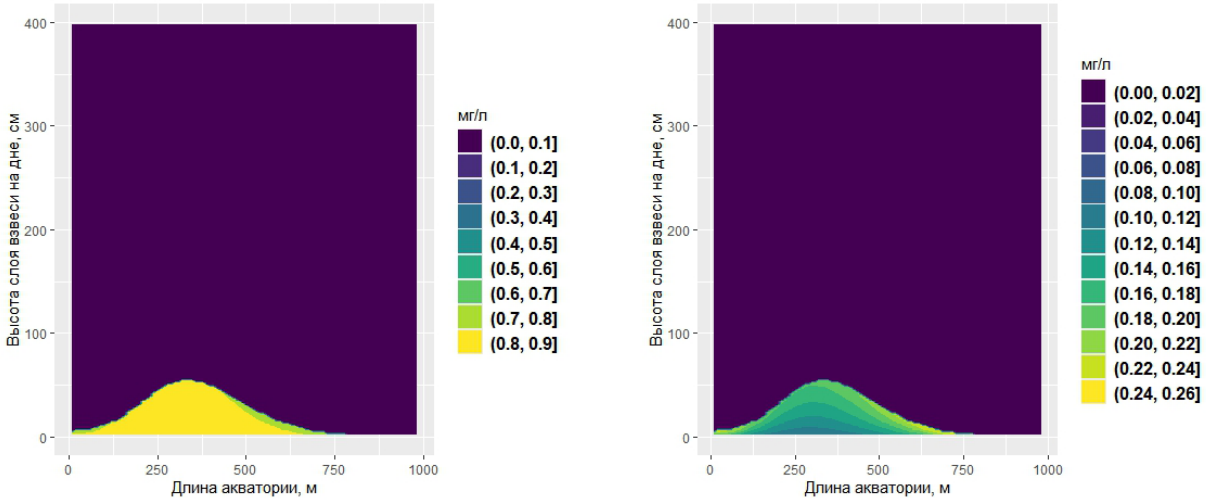
а) фракция 1 *б) фракция 2*

Рис. 1. Концентрация взвеси в толщи воды спустя 1 час после выгрузки



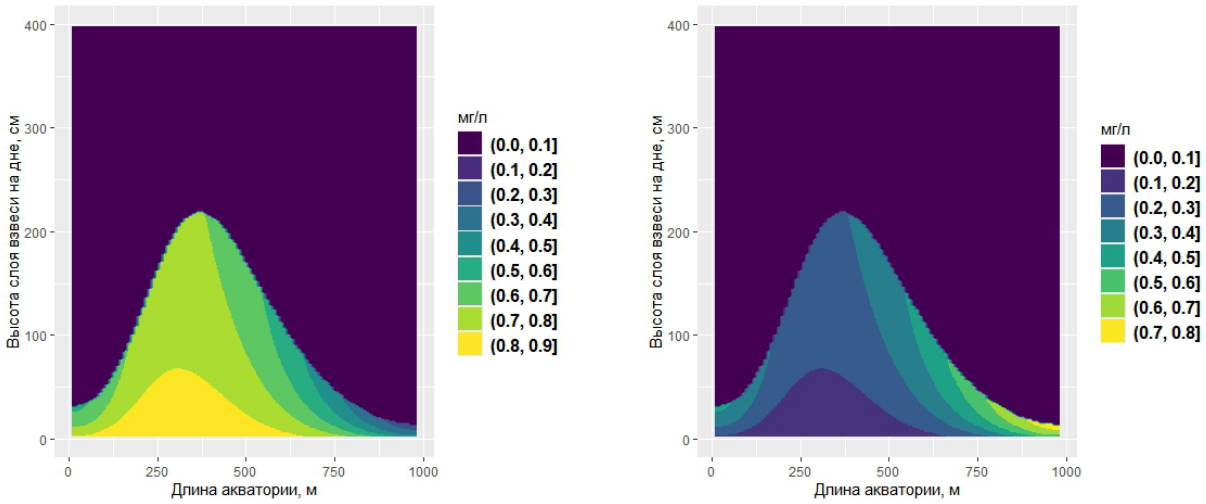
а) фракция 1 *б) фракция 2*

Рис. 2. Концентрация взвеси в толщи воды спустя 2 часа после выгрузки



а) фракция 1 *б) фракция 2*

Рис. 3. Результаты осаждения взвеси на дно акватории через 1 час после выгрузки грунта



а) фракция 1 *б) фракция 2*

Рис. 4. Результаты осаждения взвеси на дно акватории через 2 часа после выгрузки грунта

Заключение

В работе представлена трехмерная гидродинамическая модель движения водной среды, включающая в себя уравнения движения Навье — Стокса, уравнение неразрывности, регуляризированное по Б. Н. Четверушкину и учитывающее влияние примеси на плотность водной среды. Данная модель дополнена моделью транспорта взвеси, учитывающей гранулометрический состав, скорость течения водного потока, сложную геометрию береговой линии и дна, сгонно-нагонные явления, ветровые течения и трение о дно, турбулентный обмен и др.

Выполнена аппроксимация рассмотренных на равномерной пространственно-временной расчетной сетке. Применение регуляризатора Б. Н. Четверушкина в уравнении неразрывности в случае переменной плотности в трехмерной модели гидродинамики позволило существенно сократить время расчета поля давления, а, следовательно, и поля скорости движения водной среды. С учетом того, что перерасчет поля скорости водной среды выполнялся на каждой временной итерации моделирования процесса транспорта и осаждения взвеси, то это существенно сократило время получения прогноза о областях распространения и осаждения взвеси [13].

Для численного решения рассмотренных моделей с использованием разработанного программного комплекса был проведен вычислительный эксперимент по моделированию процесса распространения двухфракционной взвеси с течением времени. В качестве результатов представлены поля концентраций двух фракций взвеси через 1 и 2 часа после сброса грунта. Разработанный программный комплекс позволяет оценивать зоны подверженные наибольшему загрязнению, что является необходимым при прогнозировании и оценки влияния распределения взвеси на экосистему водоема [2].

Благодарности

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта 22–71–10102, https://www.rscf.ru/project/22-71-10102/

Литература

1. *Чистяков А. Е.* Оценка экологических рисков мелководного водоема при проведении дноуглубительных работ / А. Е. Чистяков, И. Ю. Кузнецова // Безопасность техногенных и природных систем. – 2024. – Т. 8, № 2. – С. 37–46.

2. Аналитическое и численное исследование задачи динамики планктонных популяций при наличии микропластика / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Ю. В. Белова, И. Ю. Кузнецова // Математическое моделирование. – 2024. – Т. 36, № 3. – С. 95–114.

3. *Четверушкин Б. Н.* Кинетические модели для решения задач механики сплошной среды на суперкомпьютерах / Б. Н. Четверушкин // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27, № 5. – С. 65–79.

4. *Четверушкин Б. Н.* Пределы детализации и формулировка моделей уравнения сплошных сред // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 11. – С. 33–52.

5. Исследование точности и применимости разностной схемы для решения задачи диффузии-конвекции при больших сеточных числах Пекле / А. И. Сухинов, И. Ю. Кузнецова, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко, Ю. В. Белова // Вычислительная механика сплошных сред. – 2020. – Т. 13, № 4. – С. 437–448.

6. Регуляризованная разностная схема для решения задач гидродинамики / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, И. Ю. Кузнецова, А. М. Атаян, А. В. Никитина // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34, № 2. – С 85–100.

7. *Белоцерковский О. М.* Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. М. Белоцерковский, В. А. Гущин, В. В. Щенников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – Т. 15, № 1. – С. 197–207.

8. Investigation of the Approximation Error of the Difference Scheme for the Mathematical Model of Hydrodynamics / A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, I. Y. Kuznetsova, E. O. Rakhimbaeva, M. V. Porksheyan // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, No. 5. – P. 1839–1846.

9. *Самарский А. А.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва: URSS, 2009. – 248 с.

10. *Вабищевич П. Н.* Явно-неявные схемы для задач конвекции-диффузии-реакции / П. Н. Вабищевич, М. В. Васильева // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 359–369.

11. *Самарский А. А.* Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – Москва: Наука, 1978. – 592 с.

12. Математическое моделирование гидродинамических процессов Азовского моря на многопроцессорной вычислительной системе / В. Н. Литвинов, А. Е. Чистяков, А. В. Никитина, А. М. Атаян, И. Ю. Кузнецова // Компьютерные исследования и моделирование. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 647–672.

13. Использование параллельных вычислений для оценки процесса переноса загрязняющих веществ в мелководных водоемах / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, В. В. Сидорякина, И. Ю. Кузнецова, А. М. Атаян // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 2. – С. 298–315.

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ 2D-ГОЛОГРАММ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИСТОЧНИКА НА ВЕКТОРНО-СКАЛЯРНЫХ КАНАЛАХ ПРИЕМНИКА

В. М. Кузькин[1], С. А. Переселков[2], И. М. Косенко[2], А. С. Переселков[2]

[1]Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук
[2]Воронежский государственный университет

Аннотация. Описана модель 2D-голограммы высокочастотного источника на векторно-скалярных каналах приемника в мелководной акватории. Представлены результаты теоретического анализа и численного моделирования. Проанализированы 2D-интерферограммы и 2D-голограммы для различных компонент колебательной скорости и звукового давления. В рамках численного эксперимента показано, что голографическая обработка шумовых сигналов с применением векторно-скалярного приемника позволяет обнаруживать источник, оценивать пеленг.
Ключевые слова: мелкое море, шумовой источник, звуковое поле, лучевое описание, интерференция, интерферограмма, голограмма, обнаружение, пеленг.

Введение

Интерферометрическая обработка сигналов (ИОС) [1–6] является одной из ключевых технологий в подводной акустике, предлагая альтернативу методам согласованной обработки сигналов [7–10]. ИОС базируется на формировании в океанических волноводах устойчивых интерференционных структур, создаваемых широкополосным звуковым полем [1, 2]. Интерференция нормальных мод звукового поля приводит к специфическим пространственно-временным и частотным распределениям интенсивности, которые образуют характерные паттерны. Основы математической теории интерференции звукового поля были заложены в работе С. Д. Чупрова [1], где впервые введено понятие волноводного инварианта — ключевого параметра для анализа интерференционных структур. Развитие методов ИОС продолжено в исследованиях [3–5], а также на конференциях, посвящённых подводной акустике [6]. Сегодня ИОС используется для решения широкого спектра задач подводной акустики.

Одним из наиболее динамично развивающихся направлений ИОС является голографическая обработка широкополосных гидроакустических сигналов (ГОС) [7–35]. Теоретические и математические основы ГОС для океанических волноводов изложены в работах [7–11]. В исследовании [9] метод ГОС был адаптирован для шумовых источников, а в [10, 11] анализировалось его применение в низкочастотных волноводах. Работы [12, 13] изучили возможности разрешения нескольких источников при использовании ГОС, а в [14–21] исследована устойчивость метода в присутствии внутренних волн. Адаптивные алгоритмы ГОС описаны в [22–24], а их применение к антенной обработке сигналов обсуждается в [24–26]. Модовая селекция в мелководных волноводах на основе ГОС была проанализирована в исследованиях [28–30]. Большинство работ [7–29] концентрировались на методах ГОС для скалярной компоненты звукового давления в низкочастотном диапазоне. Однако в ряде задач подводной акустики требуется регистрация сигналов с помощью векторно-скалярного приёмника (ВСП) в высокочастотном диапазоне [30–34]. Это предоставляет дополнительные возможности для решения задач подводной акустики. Во-первых, высокочастотный диапазон позволяет аккумулировать больше спектральной плотности в области голограммы. Во-вторых, ВСП регистрирует гидроакустические сигналы сразу на четырёх каналах: звуковое давление $P(t)$, три компоненты колебательной скорости частиц среды $V_X(t)$, $V_Y(t)$, $V_Z(t)$. Таким образом, разработка ГОС для

гидроакустических высокочастотных сигналов с применением ВСП является актуальной задачей. Цель данной статьи — представить результаты теоретического анализа и численного моделирования ГОС для ВСП в высокочастотном диапазоне. Предлагаемый метод ГОС основан на формировании интерферограмм и голограммы источника шума для различных 4-х каналов ВСП. Он позволяет обнаруживать источник и оценивать его пеленг. Представлены результаты верификации ГОС рамках численного моделирования.

1. Модель 2D-голограммы высокочастотного источника на векторно-скалярных каналах приемника

Рассмотрим высокочастотное звуковое поле в следующей модели мелководного волновода. Волновод в координатах (X,Y,Z) представляет собой водный слой воды со скоростью звука $c(\vec{r},z)$. Здесь, $\vec{r}=(x,y)$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости. Водный слой ограничен на глубине свободной поверхностью $(z=0)$ и дном $(z=H)$. ВСП находится в точке $Q(\vec{r}_r(x_r,y_r,z_r)$. Высокочастотный звуковой источник — $S(\vec{r}_s(x_s(t),y_s(t),z_s(t))$. Здесь, $\vec{r}_s(t)=\vec{r}_0+\vec{v}t$, где $\vec{v}$ — скорость источника. Спектр сигнала обозначен $s(\omega)$, где $\omega=2\pi f$ — циклическая частота звука. W — коэффициент отражения границы вода-дно.

Рассмотрим звуковое поле с использованием метода изображений источников [35]. Звуковое поле многократно отражается между двумя границами. Каждое отражение звукового луча от границы волновода формирует изображение источника. На (рис. 1) показано схематическое представление вкладов от источника на глубине z_s и его изображений.

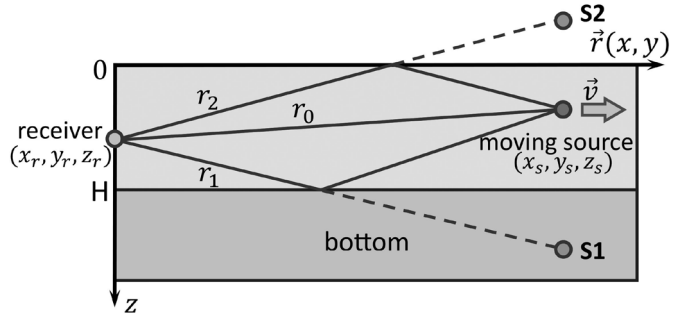


Рис. 1. Модель мелководного волновода. Вертикальная плоскость $(\vec{r},z)$

Далее будем использовать следующие обозначения: звуковое давление поля — $P(f,t)$ и горизонтальные компонент скорости вибрации — $V_X(f,t)$, $V_Y(f,t)$, $V_Z(f,t)$.

Для интерферограмм в частотно-временных области (f,t) используем обозначения:

$$\begin{aligned} I_P(f,t) &= P(f,t)P^*(f,t),\\ I_X(f,t) &= V_X(f,t)V_R{}^*(f,t),\\ I_Y(f,t) &= V_Y(f,t)V_R{}^*(f,t),\\ I_R(f,t) &= V_R(f,t)V_R{}^*(f,t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь, $I_P(f,t)$ — интерферограмма звукового давления, $I_X(f,t)$, $I_Y(f,t)$ и $I_Z(f,t)$ — интерферограммы горизонтальных компонент колебательной скорости.

ГОС реализует квазикогерентное накопление спектральной плотности, которое выполняется в частотно-временной области за счет двумерного преобразования Фурье (2D-FT). Результат 2D-FT интерферограммы $I(f,t)$ называется Фурье-голограммой (голограмма) $F(\tau,v)$. Голограмма $F(\tau,v)$ концентрирует спектральную плотность $I(f,t)$ в двух узких областях в форме фокальных пятен благодаря квазипериодической структуре интерферограмм. Голограммы звукового давления и горизонтальных компонент колебательных скоростей $F_P(\tau,v)$,

$F_X(\tau,\nu)$, $F_Y(\tau,\nu)$ и $F_R(\tau,\nu)$ определяются из интерферограмм $I_P(f,t)$, $I_X(f,t)$, $I_Y(f,t)$ и $I_Z(f,t)$ соответственно при помощи двумерного преобразования Фурье:

$$F(\tau,\nu)=\int_0^{\Delta t}\int_{f_1}^{f_2} I(f,t)\exp[i2\pi(\nu t - f\tau)]dtdf, \tag{2}$$

Здесь, ν и τ — частота и время в области голограммы. Области локализации расположены зеркально отноысительно начала координат [10, 11]. Фокальные пятна находятся в первой и третьей четвертях, когда источник движется к приёмнику $(\nu<0)$. Фокальные точки находятся во второй и четвёртой четвертях, когда источник движется от приёмника $(\nu>0)$. Спектральная плотность голограммы $F(\tau,\nu)$ концентрируется главным образом в полосе, ограниченной прямыми линиями [10, 11]:

$$\nu=\tilde{\varepsilon}\tau+\delta\nu,\ \ \nu=\tilde{\varepsilon}\tau-\delta\nu, \tag{3}$$

где $\delta\nu=1/\Delta t$ — полуширина фокальных точек в направлении оси ν, $\tilde{\varepsilon}$ — угловой коэффициент линии, на которой расположены координаты максимумов фокальных пятен. В направлении оси времени полуширина фокальных точек равна $\delta\tau=1/\Delta f$. За пределами этой полосы спектральная плотность голограммы пренебрежимо мала. Угловой коэффициент $\tilde{\varepsilon}$ определяется выражением:

$$\tilde{\varepsilon}=-\frac{\delta f}{\delta t}, \tag{4}$$

где δf — величина частотного смещения интерференционного максмимума за время δt.

Угловые распределения спектральной плотности голограмм $G_P(\chi)$, $G_X(\chi)$, $G_Y(\chi)$ и $G_R(\chi)$ вычисляются соответственно из $F_P(\tau,\nu)$, $F_X(\tau,\nu)$, $F_Y(\tau,\nu)$ и $F_R(\tau,\nu)$ следующим способом:

$$G(\chi)=\int_0^{\Delta\tau}\left|F(\tau,\chi\tau)\right|d\tau, \tag{5}$$

Здесь, $\Delta\tau$ — линейный размер фокального пятня вдоль оси τ; χ — угловой коэффициент прямых линий $\nu=\chi\tau$. В отсутствие помехи функция $G(\chi)$ имеет максимальное значение при $\chi=\tilde{\varepsilon}$.

В качестве критерия обнаружения источника принимается условие

$$G(\tilde{\varepsilon})\geq 2G(\chi), \tag{6}$$

согласно которому значение $G(\tilde{\varepsilon})$ в два или более раз выше значений в других направлениях $\chi\neq\tilde{\varepsilon}$. Для обнаружения источника информация о передаточной функции среды не требуется. Если критерий (19) выполняется, оценки параметров движущегося источника (направление движения, радиальная скорость, дальность, глубина) близки к истинным значениям [7].

Голограммы F_X и F_Y с точностью до множителей $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ воспроизводят голограмму F_R, так что

$$\left|\tan\varphi\right|=\frac{G_Y(\tilde{\varepsilon})}{G_X(\tilde{\varepsilon})}. \tag{7}$$

Здесь φ — пеленг источника, т. е. угол в горизонтальной плоскости между осью X ВСП и направлением на источник. Оценка (20) для пеленга источника неоднозначна: направления $\pm\varphi$ и $\pi\pm\varphi$ неразличимы. Неоднозначность направления устраняется определением знака соотношения интерферограмм:

$$\frac{I_X(f,t)}{I_R(f,t)}=\gamma_X,\quad \frac{I_Y(f,t)}{I_R(f,t)}=\gamma_Y. \tag{8}$$

Критерий для однозначной оценки направления на источник следующий: если $\gamma_X>0$, $\gamma_Y>0$, то источник находится в первой четверти ВСП; если $\gamma_X<0$, $\gamma_Y>0$, то источник находится во второй четверти ВСП; если $\gamma_X<0$, $\gamma_Y<0$, то источник находится в третьей четверти ВСП; если $\gamma_X>0$, $\gamma_Y<0$, то источник находится в четвёртой четверти ВСП.

2. Численное моделирование 2D-голограмм

Для численного эксперимента выбрана следующая модель мелководного волновода. Вертикальная плоскость волновода показана на рис. 2. Глубина волновода $H = 15$ *м*. Профиль скорости звука в водном слое постоянен: $c_w(z) = 1400$ *м/с*. Параметры дна — скорость звука $c_b = 1780$ *м/с*, плотность $\rho_b = 2.0$ *г/см*^{3}. Источник на глубине $z_s = 5$ *м* перемещается по траектории, показанной на рис. 3. Скорость источника $v = 1.5$ *м/с*. Диапазон частот $\Delta f = 2.5 - 11.5$ *кГц*. Приёмник находится на глубине $z_q = 15$ *м* ($x_r = 0$ *м*, $x_y = 0$ *м*, $z_r = 15$ *м*). Время движения $\Delta t = 0 - 15$ *мин*. Параметры траектории источника: старт — A ($x_s = 150$ *м*, $y_s = -675$ *м*, $z_s = 5$ *м*), $r_1 = 691.5$ *м*; траверз — B ($x_s = 150$ *м*, $y_s = 0$ *м*, $z_s = 5$ *м*), $r_2 = 150$ *м*; финиш — C ($x_s = 150$ *м*, $y_s = 675$ *м*, $z_s = 5$ *м*), $r_3 = 691.5$ *м*.

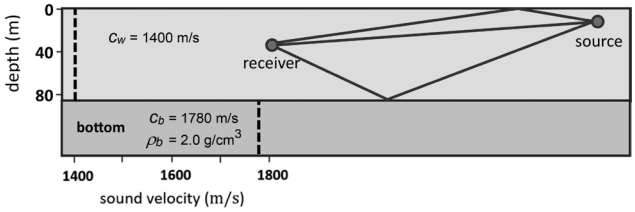


Рис. 2. Параметры модельного эксперимента

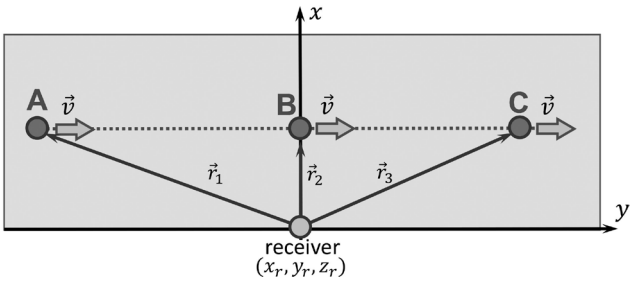


Рис. 3. Траектория источника в горизонтальной плоскости

Результаты численного моделирования представлены на рис. 4–7. На рис. 4 показана интерферограмма звукового давления $I_P(f,t)$ для времени движения $\Delta t = 0 - 15$ *мин* в полосе частот $\Delta f = 2.5 - 11.5$ *кГц*. Как видно из рисунка, интерферограмма звукового давления имеет квази-периодическую структуру.

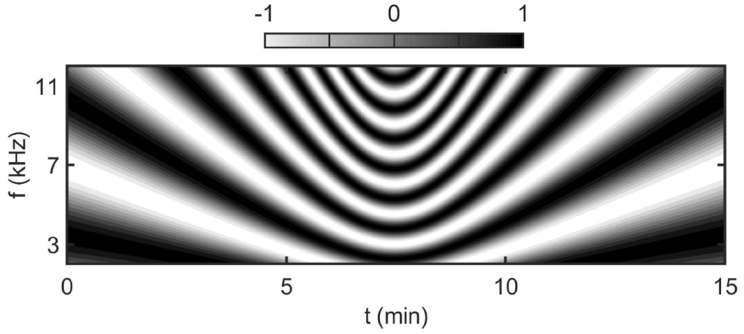


Рис. 4. Интерферограмма $I_P(f,t)$ источника

Интерферограмма $I_P(f,t)$, голограмма $F_P(\tau,v)$ и угловое распределение $G_P(\chi)$ для различных фаз движения источника показаны на рис. 5. Если источник перемещается из точки A в точку B (интервал времени $\Delta t = 2.5 - 4.2$ *мин*), то частотный период интерферограммы уменьшается с $T_f = 9$ *кГц* до $T_f = 1.8$ *кГц*. Наклон интерференционных полос отрицательный: $\delta f / \delta t = -1.5$ *кГц/мин* (рис. 5а). В результате фокальные пятна лежат на прямой $v = \tilde{\varepsilon}\tau$ с угловым коэффициентом $\tilde{\varepsilon} = 40$ *Гц/с* (рис. 5б). Угловое распределение $G_P(\chi)$ имеет экстремальное значение в точке $\chi \approx -0.025$ *с*$^{-2}$ (рис. 5в). Когда источник проходит через зону пересечения траверса ($\Delta t = 6.7 - 8.4$ *мин*), период интерферограммы равен $T_f = 1.8$ *кГц*. Интерференционные полосы параллельны оси t, $\delta f / \delta t = 0$ *кГц/мин*. Фокальные пятна расположены на прямой $v = \tilde{\varepsilon}\tau$ с угловым коэффициентом $\tilde{\varepsilon} = 0$ Гц/с. Угловое распределение имеет экстремальное значение в точке $\chi \approx 0$ *с*$^{-2}$. Этому временному интервалу соответствуют рис. 5 (г–е).

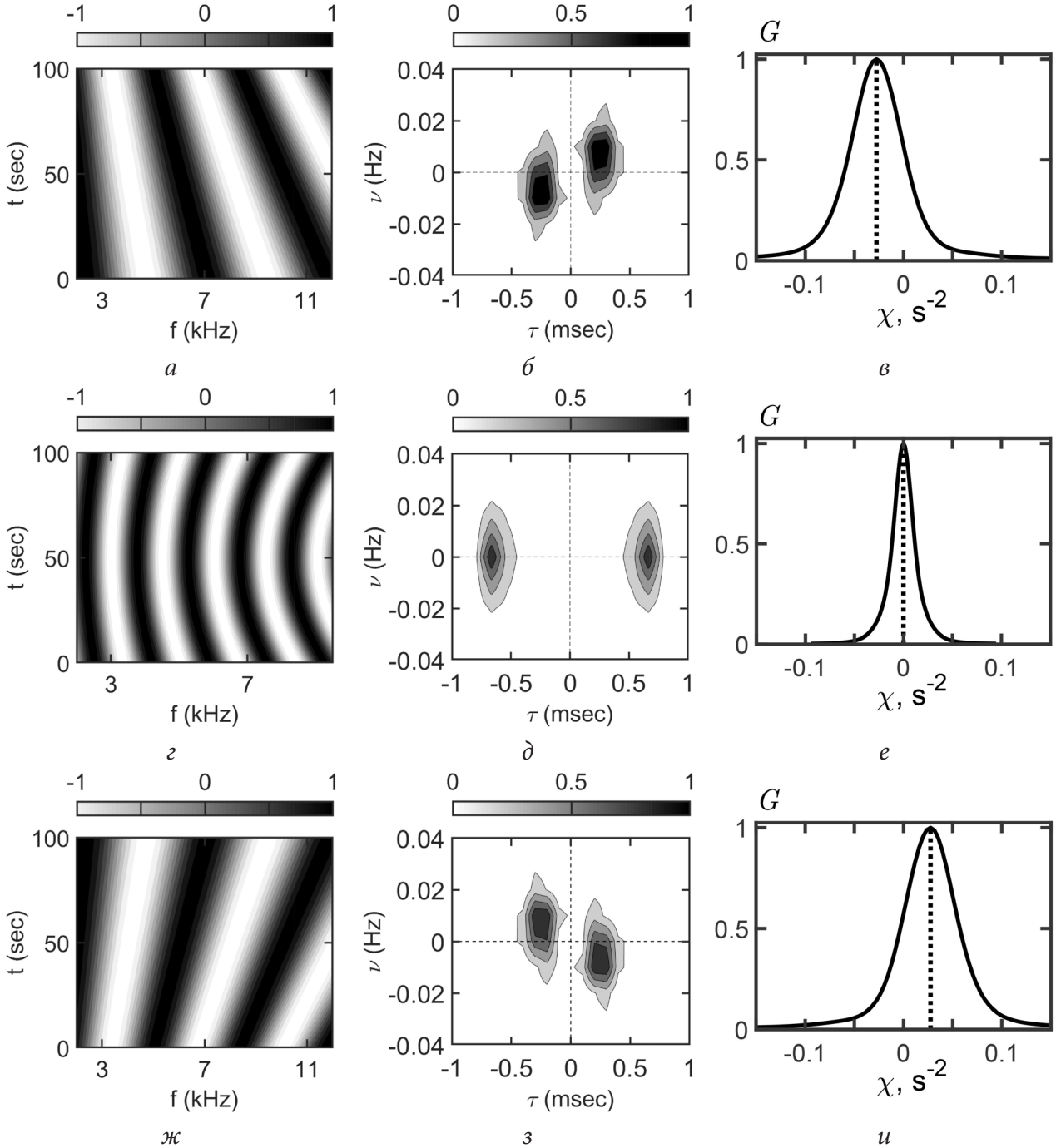
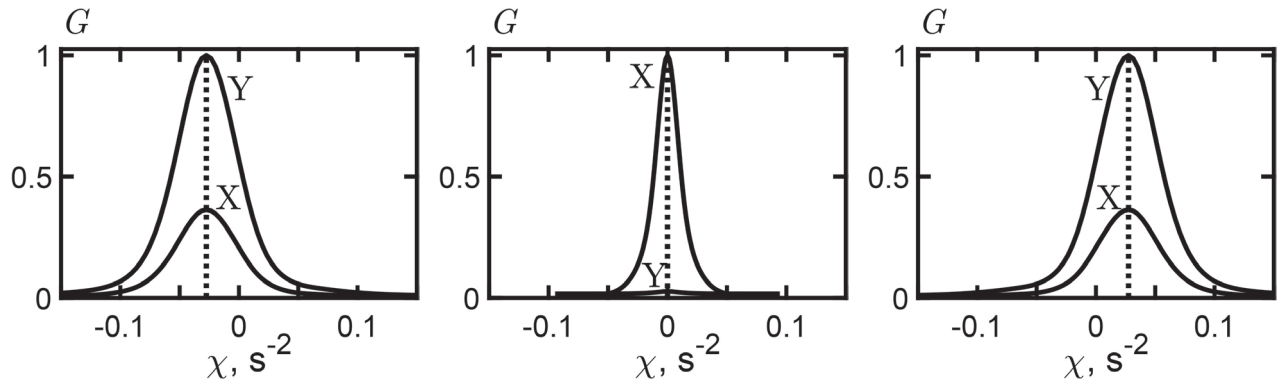


Рис. 5. Нормированные интерферограммы $I_P(f,t)$ (а, г, ж), голограммы $F_P(\tau,\nu)$ (б, д, з) и угловые распределения $G_P(\chi)$ (в, е, и). Временной интервал для (а - в): $\Delta t = 2.5-4.2$ мин. Для (г–е) $\Delta t = 6.7-8.4$ мин. Для (ж–и) $\Delta t = 10.8-12.5$ мин. Полоса частот $\Delta f = 2.5-11.5$ кГц

Наконец, когда источник движется из точки B в точку C в интервале времен, частотный период увеличивается с $T_f = 1.8$ *кГц* до $T_f = 9$ *кГц*. Наклон интерференционных полос положительный: $\delta f / \delta t = 1.5$ *кГц/мин*. Фокальные точки находятся на точках прямой $\nu = \tilde{\varepsilon}\tau$ с угловым коэффициентом $\tilde{\varepsilon} = -40$ *Гц/с* (рис. 5з). Угловое распределение имеет максимум в точке $\chi \approx 0.025$ c^{-2} (рис. 5и). Угловые распределения голограмм G_X и G_Y для трёх случаев движения источника показаны на рис. 6. Формы G_X и G_Y одинаковы, но экстремальные значения различны. Для интервала времени $\Delta t = 2.5-4.2$ *мин* значение $|\tan\varphi|$ соответствует $\varphi \approx -68°$. Для $\Delta t = 6.7-8.4$ *мин* значение $|\tan\varphi|$ соответствует $\varphi \approx 0°$. Для $\Delta t = 10.8-12.5$ *мин* $\varphi \approx 68°$.



а *б* *в*

Рис. 6. Нормированные угловые распределения голограмм $G_X(\chi)$ *и* $G_Y(\chi)$*.*
Временной интервал: (а) $\Delta t = 2.5 - 4.2$ *мин; (б)* $\Delta t = 6.7 - 8.4$ *мин; (в)* $\Delta t = 10.8 - 12.5$ *мин*

Временная зависимость пеленга $\varphi(t)$ для всего интервала времени представлена на рис. 7. Сплошная линия — пеленг источника, соответствующий геометрии траектории. Точки — пеленг источника, восстановленный с помощью голографической обработки сигнала. Как видно, значения пеленга источника, восстановленные в рамках численного моделирования, совпадают с модельными значениями.

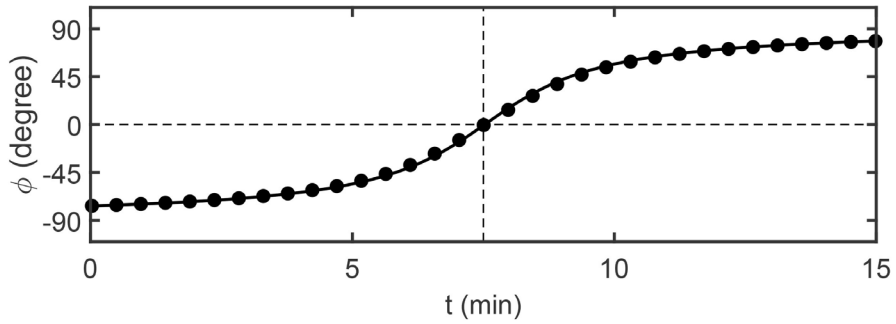


Рис. 7. Временная зависимость пеленга источника $\varphi(t)$

Заключение

В статье описана модель 2D-голограммы высокочастотного источника на векторно-скалярных каналах приемника в мелководной акватории. Изложеные алгоритмы методов ГОС предназначеных для решения следующих задач: формирование интерферограмм $I_P(f,t)$, $I_X(f,t)$, $I_Y(f,t)$ и $I_Z(f,t)$ на каждом из каналов ВСП; формирование голограмм $F_P(\tau,v)$, $F_X(\tau,v)$, $F_Y(\tau,v)$ и $F_R(\tau,v)$; обнаружение движущегося источника с использованием угловых распределений $G_P(\chi)$, $G_X(\chi)$, $G_Y(\chi)$ и $G_R(\chi)$ сформированных голограмм; оценка пеленга движущегося источника по соотношению G_Y / G_X угловых распределений сформированных голограмм. Представлены результаты теоретического анализа и численного моделирования. Проанализированы 2D-интерферограммы и 2D-голограммы для различных компонент колебательной скорости и звукового давления. В рамках численного эксперимента показано, что голографическая обработка шумовых сигналов с применением векторно-скалярного приемника позволяет обнаруживать источник, оценивать пеленг.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/.

Литература

1. *Чупров С. Д.* Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане. Акустика океана. Современное состояние / С. Д. Чупров. – Москва : Наука, 1982. – 71–91 с.

2. *Weston D.* Interference of wide-band sound in shallow water / D. Weston, K. Stevens // J. Sound Vibr. – 1972. – Vol. 21, № 2. – P. 57–64.

3. *Грачев Г.* Теория инвариантов акустического поля в слоистых волноводах / Г. Грачев // Акуст. физ. – 1993. – Т. 39, № 1. – С. 67–71.

4. *Орлов Е. Ф.* Интерференция звуковых волн в океане / Е. Ф. Орлов, Г. А. Шаронов. – Дальнаука, 1998. – 196 с.

5. *Ianniello J.* Recent developments in sonar signal processing / J. Ianniello // IEEE Signal Proc. Mag. – 1998. – Vol. 15, № 1. – P. 27–40.

6. *Kuperman W. A.* Ocean acoustic interference phenomena and signal processing / W. A. Kuperman, G. L. D'Spain // Ocean Acoustic Interference Phenomena and Signal Processing 621. – 2002.

7. *Кузькин В. М.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелководном море / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, Г. Н.Кузнецов // Акустический журнал. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

8. *Кузькин В. М.* Обнаружение источника в диспергирующих средах / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, Ю. В. Матвиенко, С. А. Ткаченко // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344.

9. *Kuz'kin V. M.* Noise source detection in an oceanic waveguide using interferometric processing / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, Y. V. Matvienko, G. A. Lyakhov, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, № 1. – P. 68–74.

10. *Pereselkov S. A.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization / S. Pereselkov, V. Kuz'kin // Acoust. Soc. Am. – 2022, – Vol. 151 – P. 666–676.

11. *Ehrhardt M.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water / M. Ehrhardt, S. A. Pereselkov, V. M. Kuz'kin, I. Kaznacheev, P. Rybyanets / J. Sound Vibr. – 2023, – 544 – C. 117388.

12. *Kuz'kin V. M.* Resolving power of the interferometric method of source localization / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, G. N. Kuznetsov, V. A. Grigor'ev / Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 150–159.

13. *Кузькин В. М.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, В. И. Грачев, П. В. Рыбянец, С. А. Ткаченко // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2024. – Т.16, № 3. – С. 395–406.

14. *Kuz'kin V. M.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, V. G. Zvyagin, Yu. A. Malykhin, D. Yu. Prosovetskiy // Physics of Wave Phenomena. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 160–167.

15. *Badiey M.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II / M. Badiey, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskiy // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, № 4. – P. 313–319.

16. *Kaznacheeva E. S.* Interferometric processing of hydroacoustic information in the presence of intense internal waves / E. S. Kaznacheeva, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov // Physics of Wave Phenomena. – 2021. – Vol. 29, № 3. – P. 278–284.

17. *Kuz'kin V. M.* Robustness of holographic processing of hydroacoustic signals in the presence of intense internal waves / V. M. Kuz'kin, S. A.Pereselkov, M. Badiey, N. V. Ladykin, A. Yu. Malykhin, S. A. Tkachenko // Physics of Wave Phenomen. – 2023. – Vol. 31, № 5. – P. 346–354.

18. Badiey M. Interferometry of hydrodynamics of oceanic shelf caused by intensive internal waves / M. Badiey, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov // Fundam. Appl. Hydrophys. – 2020. – Vol. 1. – P. 45–55.

19. *Кузькин В. М.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, П. В. Рыбянец // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т.14, № 2 – С. 197–204.

20. *Кузькин В. М.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, Н. В. Ладыкин, М. В. Куцов // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2023. – Т.15, № 3 – С. 317–326.

21. *Pereselkov S.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction / S. Pereselkov, V. Kuz'kin, M. Ehrhardt, S. Tkachenko, P. Rybyanets, N. Ladykin // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11 – P. 1922.

22. *Кузькин В. М.* Интерферометрическая обработка с использованием вертикальной линейной антенны / В. М. Кузькин, Ю. В. Матвиенко, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 2 – С. 14–23.

23. *Кузькин В. М.* Реализация адаптивного интерферометрического метода локализации источника звука. II часть / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, С. А. Ткаченко, И. В. Казначеев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 1 – С. 14–23.

24. *Pereselkov S.* Adaptive Algorithms for Interferometric Processing / S. Pereselkov, V. Kuz'kin, G. Lyakhov, S. Tkachenko, E. Kaznacheeva // Phys. Wave Phenom. – 2020. – № 28 – С. 267-273.

25. *Кузькин В. М.* Интерферометрическая обработка акустической информации с использованием протяженных антенн в диспергирующих средах / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, С. А. Ткаченко, И. В. Казначеев // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2020. – Т.12, № 4 – С. 483–494.

26. *Кузькин В. М.* Обнаружение шумового сигнала в океаническом волноводе горизонтальной антенной / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Ю. В. Матвиенко, С. А. Ткаченко, Д. Ю. Просовецкий // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т.14, № 1. – С. 65–72.

27. *Kuz'kin V. M.* Mode selection in oceanic waveguides / V. M. Kuz'kin, Yu. V. Matvienko, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskii, E. S. Kaznacheeva // Physics of Wave Phenomena. – 2022 – Vol. 30, № 2. – P. 111–118.

28. *Kuz'kin V. M.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves / V. M. Kuz'kin, Yu. V.Matvienko, S. A.Pereselkov, E. S. Kaznacheeva, S. A. Tkachenko // Physics of Wave Phenomena. – 2022 – Vol. 30, № 5. – P. 314–320.

29. *Кузькин В. М.* Выделение мод шумового источника в мелком море методом голографической интерферометрии в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И.Грачев, С. А. Ткаченко, П. В. Рыбянец // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 3 – С. 279–286.

30. *Казначеев И. В.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником / И. В. Казначеев, Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2018. – Т.64, № 1 – С. 33–45.

31. *Kuznetsov G. N.* Interferometric method for estimating the velocity of a noise sound source and the distance to it in shallow water using a vector-scalar receiver / G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin,

S. A. Pereselkov, I. V. Kaznacheev, V. A. Grigor'ev // Phys. Wave Phenom. – 2017 – Vol. 25, № 4. – P. 299–306.

32. *Kuz'kin V. M.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, G. N. Kuznetsov, I. V. Kaznacheev // Physics of Wave Phenomena. – 2018 – Vol. 26, № 1. – P. 63–73.

33. *Переселков С. А.* Интерференционный метод оценки координат движущегося шумового источника в мелком море с использованием высокочастотных сигналов / С. А. Переселков, В. М. Кузькин, Г. Н. Кузнецов, Д. Ю. Просовецкий, С. А. Ткаченко // Акустический журнал. – 2020. – Т. 66, № 4 – С. 437–445.

34. *Кузнецов Г. Н.* Интерференционная структура шумового поля движущегося источника в высокочастотном диапазоне / Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, М. В. Куцов, С. А. Переселков // Известия РАН. Серия физическая. – 2021. – Т. 85, № 6 – С. 907–912.

35. *Brekhovskikh L. M.* Fundamentals of Ocean Acoustics / L. M. Brekhovskikh, Y. P. Lysanov // Springer Berlin/Heidelberg, Germany. – 2013.

36. *Гордиенко В. А.* Векторно-фазовые методы в акустике / В. А. Гордиенко // – Москва : Физматлит, 2007 – 480 с.

УДК 62.752, 629.4.015, 628.534, 519.71-74

УПРАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ВИБРАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ СТРУКТУРЫ СИЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

А. С. Миронов[1], А. В. Елисеев[1,2]

[1]Иркутский государственный университет путей сообщения
[2]Иркутский национальный исследовательский технический университет

Аннотация. Рассматриваются вопросы моделирования вибрационных технологических стендов с учетом технологической нагрузки в виде механической колебательной системы. Цель исследования — разработка методов оценки, коррекции и формирования динамических состояний механических колебательных систем в зависимости от структуры внешних нагружений. Используются методы системного анализа, теоретической и прикладной механики, теории механизмов и машин, динамики машин, теории колебаний, структурного математического моделирования. Разработаны математические модели испытательных стендов, позволяющие формировать режимы динамического гашения колебания по нескольким координатам и режимы предельного сближения частот обнуления и частот резонанса.
Ключевые слова: структурное математическое моделирование, вибрационные испытательные стенды, одновременное динамическое гашение колебаний по нескольким координатам, передаточные отношения, амплитудно-частотная характеристика, предельное сближение частот, сочленение.

Введение

В настоящее время вибрационные технологии имеют большое значение для оценки и модификации свойств технических объектов. Они применяются в различных производственных процессах, таких как перемещение рабочей среды, транспортировка, сепарация и упрочнение. Развитие вибрационных технологий привело к формированию методов механики и виброволновых технологий [1, 2]. Одно из ключевых направлений развития — создание виброиспытательных стендов для испытания образцов современной техники, включая лонжероны транспортных средств [3]. Разработка математических моделей испытательных стендов позволяет разрабатывать широкий класс вибрационных технологических машин [4, 5]. Значительное распространение в разработке методов оценки динамических особенностей вибрационных взаимодействий элементов технических объектов получил структурный подход [6]. Однако ряд вопросов в разработке математических моделей виброиспытательных стендов остаётся нерешённым, в частности, вопросы формирования режимов динамического гашения колебаний по нескольким координатам в зависимости от структуры внешних воздействий ещё не получили должого освещения.

Статья посвящена разработке математических моделей технических объектов с расчетными схемами в виде механических колебательны систем, которые допускают настройку форм колебаний и обеспечивают эффекты динамического гашения колебаний одновременно по двум точкам с помощью связности амплитуд внешних силовых возмущений.

I. Общие положения и постановка задачи

Рассматривается механическая колебательная система, образованная совокупностью твердых тел, совершающих упругие колебания в условиях связных силовых возмущений (рис. 1).

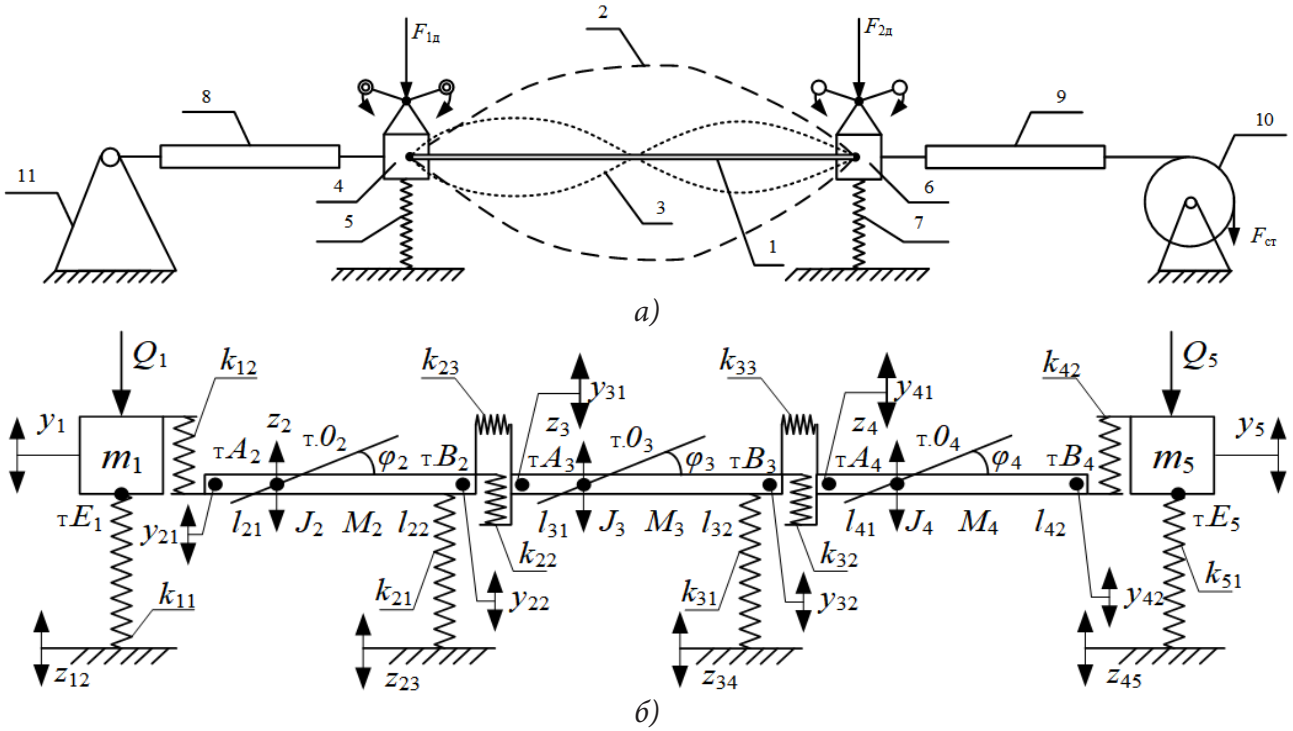


Рис. 1. Испытательный стенд с двумя вибрационным возбудителями: а) кинематическая схема вибрационного стенда; б) m_1, m_5 — сосредоточенные массы, M_1, M_2, M_3 — массы твердых тел

Механическая колебательная система образована двумя сосредоченными массами m_1, m_5, тремя твердыми телами A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 с массами M_2, M_3, M_4 и моментами инерции J_2, J_3, J_4 соответственно. Система твердых тел установлена на опорные поверхности посредством упругих элементов k_{11}, k_{21}, k_{31}, k_{51}, соединения упругого элемента, отображающего испытательный образец, представлено упругими элементами k_{12} и k_{42}. Характеристики жесткости испытательного образца моделируются упругими элементами k_{22} и k_{32}. Воздействие вибровозбудителя, представленного двумя внешними гармоническими силами Q_1 и Q_2, соответственно приложенных к точкам E_1 и E_5 сосредоточенных масс m_1 и m_5. Связность внешних возмущений Q_1 и Q_5 определяется коэффициентом γ, положительные значения которого определяют отношения амплитуд синфазных гармонических колебаний, а его отрицательные значения определяют отношение амплитуд гармонических колебаний находящихся в противофазе. Внешние возмущения, приложенные в точках E_1, E_5 приводит к колебаниям образца $A_2B_2A_3B_3A_4B_4$ в различных формах. Вместе с тем, эффекты возбуждения колебаний в различных формах в зависимости от частоты и связности внешних возмущений ещё не обладают должным уровнем детализации представлений.

Задача заключается в разработке метода оценки, формирования и коррекции динамического состояния испытательного образца в зависимости от частоты и связности внешних воздействий. В качестве частной задачи, необходимо определить коэффициент связности, обеспечивающий гашений колебаний по двум координатам одновременно для системы их нескольких твердых тел.

II. Математическая модель

Расчетная схема (рис. 1) может быть использована для моделирования динамических свойств семейства вибрационных испытательных стендов. Математическая модель в виде си-

стемы дифференциальных уравнений в виде уравнений Лагранжа 2-го рода стоится на основе выражений кинетической и потенциальной энергии:

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}m_5\dot{y}_5^2+\frac{1}{2}M_2\dot{z}_2^2+\frac{1}{2}M_3\dot{z}_3^2+\frac{1}{2}M_4\dot{z}_4^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2+\frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}_3^2+\frac{1}{2}J_4\dot{\varphi}_4^2, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\Pi=&\frac{1}{2}k_{11}y_1^2+\frac{1}{2}k_{21}y_{22}^2+\frac{1}{2}k_{31}y_{32}^2+\frac{1}{2}k_{51}y_5^2+\frac{1}{2}k_{12}(y_1-y_{21})^2+\\&+\frac{1}{2}k_{22}(y_{31}-y_{22})^2+\frac{1}{2}k_{32}(y_{41}-y_{32})^2+\frac{1}{2}k_{42}(y_5-y_{42})^2+\\&+\frac{1}{2}k_{23}r^2(\varphi_3-\varphi_2)^2+\frac{1}{2}k_{33}r^2(\varphi_4-\varphi_3)^2,\end{aligned} \tag{2}$$

где $y_1, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32}, y_{41}, y_{42}$ — совокупность обобщенных координат, отображающих вертикальные смещения точек твердых тел относительно положения статического равновесия.

Второй системой координат может быть выбрана совокупность вертикальных смещений $y_1,\ y_5,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ центров масс и углов координат $\varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4$. Координаты $\varphi_i,\ z_i,\ i=2,3,4$ и $y_{ij},\ i=2,3,4,\ j=1,2$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases}y_{i1}=z_i-\varphi_i l_{i1}\\ y_{i2}=z_i+\varphi_i l_{i2}\end{cases}, \tag{3}$$

где $i=2,3,4$.

Обратная зависимость имеет вид:

$$\begin{cases}\varphi_i=c_i(y_{i2}-y_{i1})\\ z_i=a_i y_{i1}+b_i y_{i2}\end{cases}, \tag{4}$$

где $c_i=\dfrac{1}{l_{i1}+l_{i2}},\ a_i=\dfrac{l_{i2}}{l_{i1}+l_{i2}},\ b_i=\dfrac{l_{i1}}{l_{i1}+l_{i2}}$. В матричном представлении кинетическая энергия T может быть представлена в виде:

$$T=\frac{1}{2}\left\langle\tau\cdot\vec{\dot{y}},\vec{\dot{y}}\right\rangle, \tag{5}$$

где

$$\tau=\theta^*\mu\theta+\psi^*M\psi+\varphi^*J\varphi, \tag{6}$$

$$\mu=\begin{pmatrix}m_1&0\\0&m_2\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}M_2&0&0\\0&M_3&0\\0&0&M_4\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}J_2&0&0\\0&J_3&0\\0&0&J_4\end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\theta=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\varphi=\begin{pmatrix}0&-c_2&c_2&0&0&0&0&0\\0&0&0&-c_3&c_3&0&0&0\\0&0&0&0&0&-c_4&c_4&0\end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\psi=\begin{pmatrix}0&a_2&b_2&0&0&0&0&0\\0&0&0&a_3&b_3&0&0&0\\0&0&0&0&0&a_4&b_4&0\end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$y=\begin{pmatrix}y_1&y_{21}&y_{22}&y_{31}&y_{32}&y_{41}&y_{42}&y_5\end{pmatrix}^*, \tag{11}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Потенциальная энергия может быть представлена в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2}\langle \pi_0 \cdot \vec{y}, \vec{y} \rangle, \tag{12}$$

где

$$\pi_0 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3, \tag{13}$$

$$\pi_{(1)} = U^*_{(1)} K_{(1)} U_{(1)} - U^*_{(2)} K_{(1)} U_{(1)} - U^*_{(1)} K_{(1)} U_{(2)} + U^*_{(2)} K_{(1)} U_{(2)}, \tag{14}$$

$$\pi_{(2)} = U^*_{(3)} K_{(2)} U_{(3)}, \tag{15}$$

$$\pi_{(3)} = r^2 \left(\Phi^*_{(34)} K_{(3)} \Phi_{(34)} - \Phi^*_{(23)} K_{(3)} \Phi_{(34)} - \Phi^*_{(34)} K_{(3)} \Phi_{(23)} + \Phi^*_{(23)} K_{(3)} \Phi_{(23)} \right). \tag{16}$$

$$\Phi_{(34)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_4 & c_4 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\Phi_{(23)} = \begin{pmatrix} 0 & -c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$U_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$U_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$U_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$K_{(1)} = \begin{pmatrix} k_{12} & & & \\ & k_{22} & & \\ & & k_{32} & \\ & & & k_{42} \end{pmatrix}, \; K_{(2)} = \begin{pmatrix} k_{11} & & & \\ & k_{21} & & \\ & & k_{31} & \\ & & & k_{51} \end{pmatrix}, \; K_{(3)} = \begin{pmatrix} k_{23} & \\ & k_{33} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

На основе матричных представлений кинетической и потенциальной энергии системы дифференциальных уравнений Лагранжа 2-го рода может быть представлена в виде:

$$\tau \cdot \ddot{\vec{y}} + \pi \cdot \vec{y} = \vec{Q}, \tag{23}$$

где

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \gamma \vec{Q}_5, \tag{24}$$

$$\vec{Q}_1 = \begin{pmatrix} Q_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*, \tag{25}$$

$$\vec{Q}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_0 \end{pmatrix}^*. \tag{26}$$

Система дифференциальных уравнений (23) может быть преобразована под действием интегральных преобразований Лапласа в систему алгебраических уравнений с учетом равенства нулю начальных условий:

$$(\tau \cdot p^2 + \pi) \cdot \bar{y} = \bar{Q}, \tag{27}$$

где $p = j\omega$, $j^2 = -1$ [7].

Система уравнений (27) может быть представлена в виде обобщенной (матричной) структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении систему автоматического управления (рис. 2).

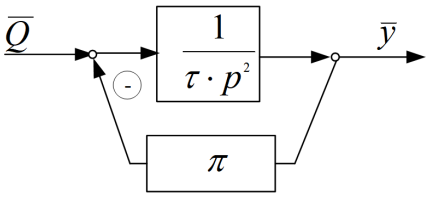


Рис. 2. Обобщенная структурная схема механической колебательной системы на рис. 1

На основе схемы (рис. 2) могут быть построены передаточные функции системы:

$$W_i = \frac{\bar{y}_i}{\bar{Q}_0}, \tag{28}$$

в физическом смысле отображающая представления о динамической податливости системы (рис. 4.3.1). Также могут быть построены передаточные функции межпарциальных связей, отображающих особенности рычажных связей в:

$$W_{ik} = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}_k}. \tag{29}$$

Амплитудно-частотные характеристики передаточных функций W_i и W_{ik} позволяет оценивать динамические состояния в зависимости от частот и коэффициентов связности внешних силовых возмущений γ.

Вместе с тем, механическая колебательная система обладает 8-ю степенями свободы. В свою очередь, обобщенная механическая колебательная система может быть модифицирована с учетом связей, отображающих специфику вибрационных взаимодействий элементов. В частности, можно полагать, что испытательный образец, составленный из трех твердых тел, допускает только относительные угловые упругие связи, а для установка упругого образца можно полагать, что $k_{12} = \infty$ и $k_{42} = \infty$. Подобная систему условий может быть реализована с помощью сочленений в поступательных формах движения в соединениях [8].

III. Оценка динамических особенностей в зависимости от структуры внешних силовых возмущений

Учет особенностей взаимодействий элементов может быть реализован посредством реализации сочленений точек твердых тел в относительных поступательных движений, в предположении, что жесткость соединительных элементов между точками устремляется к бесконечности [9]. Результатом сочленения совокупности соединений является механическая колебательная система с 4-мя степенями свободы (рис. 3).

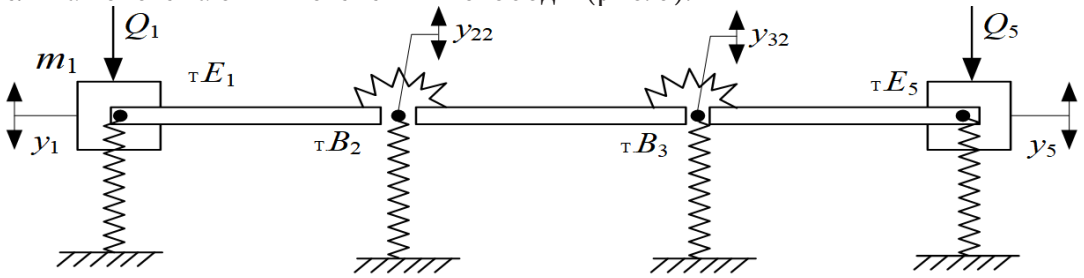


Рис. 3. Механическая колебательная система с учетом сочленений
$k_{12} \to \infty$, $k_{22} \to \infty$, $k_{32} \to \infty$, $k_{42} \to \infty$

Математическая модель сочлененной системы (рис. 3) может быть получена на основе неэквивалентного преобразования исходной механической колебательной системы (рис. 1). Сочленение $k_{12} \to \infty,\ k_{22} \to \infty,\ k_{32} \to \infty,\ k_{42} \to \infty$ приводит к отождествлению координат системы $y_1 = y_{21},\ y_{22} = y_{31},\ y_{32} = y_{41},\ y_{42} = y_5$. Матричный вид системы алгебраических уравнений с 8-ю степенями свободы в результате сочленения может быть представлен в виде системы с 4-мя степенями свободы:

$$(V^* \cdot \tau \cdot V \cdot p^2 + V^* \cdot \pi \cdot V) \cdot \overline{\xi} = V^* \overline{Q}, \tag{30}$$

где

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

$$\overline{\xi} = (\overline{y}_1, \overline{y}_{22}, \overline{y}_{32}, \overline{y}_5)^*, \tag{32}$$

ξ — совокупность координат сочленений системы, V — матрица перехода.

Система алгебраических уравнений (30) может быть представлена в виде обобщенной структурной схемы (рис. 4).

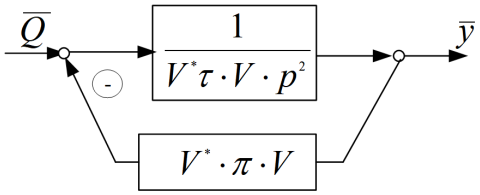


Рис. 4. Обобщенная структурная схема сочлененной механической колебательной системы

Структурная схема позволяет построить передаточные функции системы W_i и передаточные функции межпарциальных связей W_{ik}:

$$W_i = \frac{\overline{\xi}_1}{\overline{Q}_0}, \tag{34}$$

$$W_{ik} = \frac{\overline{\xi}_1}{\overline{\xi}_k}. \tag{35}$$

Амплитудно-частотная характеристика передаточной функции W_i $(p = j\omega)$ в физическом смысле представляет собой динамическую податливость, зависящую от частоты внешнего силового возмущения. В свою очередь, амплитудно-частотные характеристики (34), (35) позволяет оценивать особенности реализации форм вынужденных колебаний в зависимости от структуры внешних силовых возмущений с помощью неявно заданной функции в форме равенства нулю числителей передаточных отношений (34), (35).

На рис. 5 представлены характерные функции связи частот динамического гашения колебаний соответствующих одиночных координат $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4$ и коэффициента связности γ силовых возмущений $Q_1,\ Q_4$.

На рис. 5 показано, что кривые (линии 1, 2, 3, 4), отображающие связь режимов динамического гашения колебаний одиночных координат, пересекаются в точках (тт. 11, 12, 13, 14),

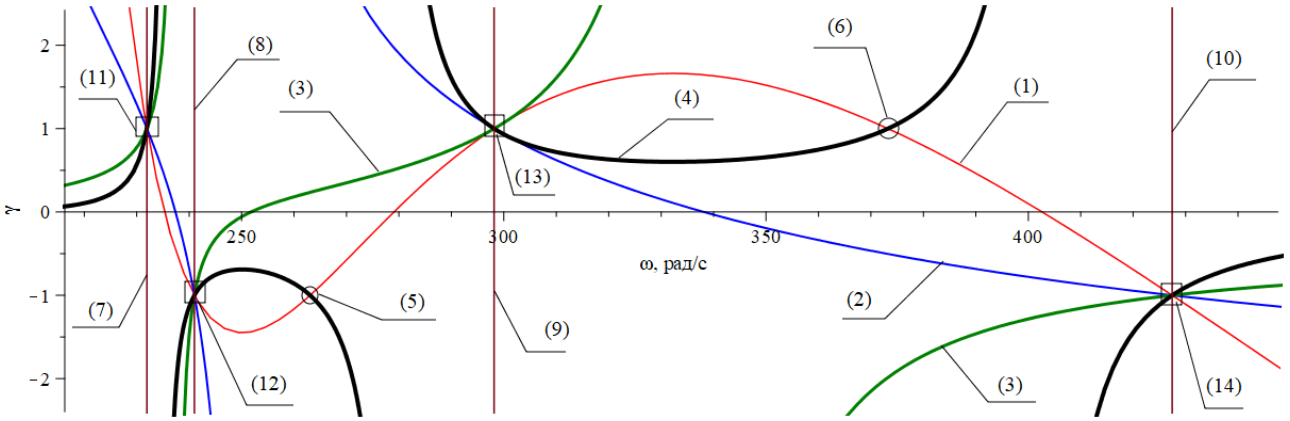


Рис. 5. Соотношение частот динамического гашения колебаний координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 *и коэффициента связности* γ

ординаты которых равны собственным частотам системы. Варьирование коэффициентов связности внешних возмущений позволяет изменять значения частот динамического гашения колебаний. В частности, возможен выбор коэффициента связности, обеспечивающего одновременный режим динамического гашения колебаний (рис. 5, т. 6) по двум координатам точек, в которых приложены связные внешние возмущения. С другой стороны, возможен выбор коэффициента связности, обеспечивающего предельное сближение частот динамического гашения колебаний координаты, выбранной в качестве объекта оценки, с собственными частотами системы, что может рассмотрено в качестве метода изменения актуального числа степеней свободы системы.

Заключение

Таким образом, разработана методологическая основа, позволяющая формировать совокупность специфических режимов работы вибрационных технологических систем, включая возможность реализации режимов одновременного динамического гашения по нескольким координатам. На основе разработанного подхода предложено усовершенствованное конструктивно-техническое решение виброиспытательного стенда с двумя вибрационными возбудителями инерционного типа, обладающего возможностями расширения испытательных программ за счет использования в качестве настроечного параметра коэффициента связности силовых возмущений вибрационных возбудителей.

Литература

1. *Блехман И. И.* Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. – СПб. : ИД «Руда и Металлы», 2013. – 640 с.

2. *Ганиев Р. Ф.* Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность / Р. Ф.Ганиев. – М. : Регулярная и хаотическая динамика, 2013. – 592 с.

3. *Миль М. Л., Некрасов А. В., Браверман А. С.* Вертолеты. Расчеты и проектирование. В 3-х кн. / под ред. М. Л. Миля. – М. : Машиностроение, 1967. – Кн. 2. Колебания и динамическая прочность. 1967. – 424 с.

4. *Пановко Г. Я.* Динамика вибрационных технологических процессов. – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных технологий, 2006. – 176 с.

5. *Копылов Ю. Р.* Динамика процессов виброударного упрочнения: монография. – Воронеж : ИПЦ Научная книга, 2011. – 568 с.

6. *Eliseev A. V.* Structural Mathematical Modeling Applications in Technological Machines and Transportation Vehicles. Hershey, PA: IGI Global, 2023. – 288 p. – https://doi.org/10.4018/978-1-6684-7237-8.

7. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики / А. И. Лурье. – Москва; Ленинград : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950. – 432 с.

8. *Елисеев С. В., Ермошенко Ю. В.* Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем : монография. – Иркутск : ИрГУПС, 2012. – 156 с.

9. *Елисеев А. В.* Упругие связи в формировании структуры и динамики механических систем в условиях вибрационных нагружений силовой природы / А. В. Елисеев, Н. К. Кузнецов, А. С. Миронов // Труды МАИ. – 2024. – № 137.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ТОНКИХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛЕНКАХ: ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Л. И. Мороз[1], А. Г. Масловская[2]

[1]Амурский государственный университет
[2]Университет Иннополис

Аннотация. В данной работе предлагается дробно-дифференциальная модификация модели Ландау — Гинзбурга — Девоншира — Халатникова для описания поляризационных откликов в тонких сегнетоэлектрических пленках. Математическая модель формализуется, как начально-краевая задача для полулинейного уравнения супердиффузии с дробной производной по времени Капуто Построена модифицированная неявная вычислительная схема, дополненная итерационной процедурой. Для компьютерной реализации модели была разработана программа с использованием программного обеспечения MATLAB. Представлены иллюстрации результатов вычислительных экспериментов при варьировании порядка дробной производной.
Ключевые слова: полулинейное уравнение супердиффузии, дробная производная Капуто, неявная конечно-разностная схема, вычислительный эксперимент.

Введение

В настоящее время дробно-дифференциальные уравнения нашли широкое применение в математическом моделировании динамических откликов сложноструктурированных сред. Процессы, описываемые дробно-дифференциальными уравнениями, относят к аномальным, поскольку они могут проявлять значительные градиентные изменения характеристик или очень длительное время ожидания последействия. Это означает, что система может «помнить» свои предыдущие состояние, что влияет на ее текущее поведение. Как правило, эффекты памяти формализуют с помощью дифференциальных уравнений с дробной производной по времени, в то время как уравнения с дробной производной по координате применяют для описания процессов в материалах с неоднородной структурой и многофазным составом. Примерами таких сред являются сегнетоэлектрики — класс полярных диэлектриков, обладающие фрактальными свойствами и эффектами памяти. Сегнетоэлектрические материалы, включая сегнетокерамику, используются для проектирования диэлектрических усилителей, модуляторов и других управляемых устройств, ячеек памяти, пьезо- и пироэлектрических преобразователей [1].

Один из подходов, позволяющих описать термодинамическое состояние системы, основан на теории Гинзбурга — Ландау. Феноменологическая теория Гинзбурга — Ландау может быть успешно применена для теоретического описания фазовых переходов и процессов переключения поляризации в сегнетоэлектриках. Ввиду сложного характера перестройки сегнетоэлектрических доменов и эффектов памяти рассмотрим дробно-дифференциальную модификацию модели Ландау — Гинзбурга — Девоншира — Халатникова. Многие авторы отмечают, что для тонких пленок, нанотрубок и наночастиц математическое описание характеристик переключения поляризации в сегнетоэлектрических материалах строится на основе волнового уравнения или уравнении супердиффузии. Например, волновое уравнение, основанное на теории среднего поля Ландау — Гинзбурга — Девоншира, было предложено в [2] для формализации распределения поляризации в сегнетоэлектриках. Кроме того, в исследовании [3] обсуждалось зависящее от времени нелинейное уравнение, описывающее распространение волн поляризации в тонких сегнетоэлектрических пленках.

Заметим, что поиск аналитического решения для дробно-дифференциальных уравнений во многих случаях встречает серьезные затруднения, поэтому на первый план выходят численные методы, в частности, метод конечных разностей.

Целью данной работы является построение и программная реализацию вычислительного алгоритма, предназначенного для компьютерного моделирования супердиффузионных процессов в приложении к исследования процессов переключения поляризации при вариации динамических режимов.

1. Математическая постановка задачи и вычислительная схема

Введем в рассмотрение дробно-дифференциальный аналог модели Ландау — Гинзбурга — Девоншира — Халатникова, представимого в виде начально-краевой задачи для нелинейного уравнения в частных производных нецелого порядка

$$\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + p + bp^3 - cp^5 + \sigma e, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le \theta, \tag{1}$$

$$p\big|_{t=0} = p_0(x), \quad 0 < x < l, \frac{\partial p}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \tilde{p}_0(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x=0} + qp\big|_{x=0} - g = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x=l} + qp\big|_{x=l} - g = 0, \quad 0 < t \le \theta, \tag{3}$$

где $\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha}$ — левосторонняя производная Капуто; α — порядок дробной производной по времени, $1 < \alpha \le 2$; l — толщина сегнетоэлектрической пленки; t — время процесса переключения поляризации; b, c, q, g — положительные параметры.

Дробную производную Капуто определим следующим образом:

$$\frac{\partial^\alpha p(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{p^{(m)}(\kappa)}{(t-\kappa)^{1+\alpha-m}} d\kappa, \; m-1 < \alpha < m.$$

Производная Капуто совпадает с определением производной целого порядка для $\alpha = m \in N$.

Пусть $\Omega_{\Delta x}^{\Delta t} = \{x_i = i\Delta x, i = \overline{0,N}, t^j = j\Delta t, j = \overline{0,M}\}$ — пространственно-временная сетка, покрывающая вычислительную область.

Тогда, согласно [4], аппроксимация производной Капуто для $0 < \alpha < 1$ может быть представлена в виде

$$\frac{\partial^\alpha p(x_i, t^{j+1})}{\partial t^\alpha} = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{j} \mu_k^\alpha \left(p_i^{j+1-k} - p_i^{j-k} \right) + O(\Delta t^{2-\alpha}). \tag{4}$$

Здесь Γ — гамма-функция, $\mu_k^\alpha = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$, $k = \overline{0,M}$.

Чтобы построить конечно-разностную схему для $1 < \alpha < 2$, введем следующую замену $\alpha = 1 + \beta$, $\beta < 1$.

Пусть $U(x,t) = \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} = U, \\ \dfrac{\partial^\beta U}{\partial t^\beta} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + p + bp^3 - cp^5 + \sigma e. \end{cases} \tag{5}$$

Разностную схему для уравнений системы (5) можно записать как [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{p_i^{j+1}-p_i^j}{\Delta t}=U_i^{j+1}, \\ \dfrac{\Delta t^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\displaystyle\sum_{k=0}^{j}\eta_k^\beta\left(U_i^{j-k+1}-U_i^{j-k}\right)=\dfrac{1}{\Delta x^2}\left(p_{i+1}^{j+1}-2p_i^{j+1}+p_{i-1}^{j+1}\right)+\varphi_i^{j+1}+\sigma e^{j+1}. \end{cases} \tag{6}$$

или

$$-\frac{1}{\Delta x^2}p_{i-1}^{j+1}+\left(\frac{\Delta t^{-1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\eta_0^\beta+\frac{2}{\Delta x^2}-1-b(p_i^j)^2+c(p_i^j)^4\right)p_i^{j+1}-\frac{1}{\Delta x^2}p_{i+1}^{j+1}=$$

$$=-\frac{\Delta t^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\left(\eta_k^\beta-\eta_{k+1}^\beta\right)U_i^{j-k}+\frac{\eta_0^\beta}{\Delta t}p_i^j+\eta_j^\beta U_i^0\right)+\sigma e^{j+1},$$

$$U_i^{j+1}=\frac{p_i^{j+1}-p_i^j}{\Delta t},\quad i=\overline{1,N-1},\quad j=\overline{0,M-1}.$$

Здесь η_k^β — веса, аналогичные μ_k^α. Нахождение решения уравнения (1) приводит к системе полулинейных уравнений на каждом временном слое. В этом случае было бы разумно объединить конечно-разностную схему с итеративной процедурой. Сформируем последовательность приближений $\{p_i^{(s)}\}$, сходящуюся к p_i^j для каждого момента времени t^j, $j=\overline{1,M}$, по формулам: $(p_i^{(s)})^3\approx(p_i^{(s-1)})^2P_i^{(s)}$, $(p_i^{(s)})^5\approx(p_i^{(s-1)})^4p_i^{(s)}$, где $s=1,2,\ldots$ — номер итерации. Исходя из значения предыдущего временного шага, итерационный алгоритм начинается с $p_i^{(0)}=p_i^{j-1}$. Таким образом, комбинируя метод конечных разностей с итерационной процедурой, можно сохранить порядок точности построенной вычислительной схемы [5].

Использование несимметричных формул конечных разностей второго порядка позволяет аппроксимировать граничные условия (3)

$$-\frac{-3p_0^j+4p_1^j-p_2^j}{2\Delta x}+qp_0^j-g=0,$$

$$\frac{3p_N^j-4p_{N-1}^j+p_{N-2}^j}{2\Delta x}+qp_N^j-g=0,$$

где $j=\overline{1,M}$.

Полученная вычислительная схема была реализована с использованием программной платформы MATLAB.

2. Вычислительный эксперимент

В качестве входных параметров выберем значения, характерные для тонких пленок титана бария: $b=4.0544$, $c=5.1946$, $q=0.3314$, $p_0=0$, $\tilde{p}_0=0$ [5]. На рис. 1 показаны результаты моделирования зависимостей поляризации от поля $p(e)$ при различных значениях порядка дробной производной по времени α. В серии вычислительных экспериментов α изменялась от 1 до 1.15 при фиксированном значении толщины пленки $l=1.37$.

В случае порядка $\alpha=1$ вычислительная схема строилась на основе классической неявной схемы для уравнения параболического типа. Для дифференциального уравнения с целой производной также применялась итерационная процедура. Увеличение порядка дробной производной ведет к расширению петли, а при $\alpha\geq1.3$ петля гистерезиса теряет свою характерную форму.

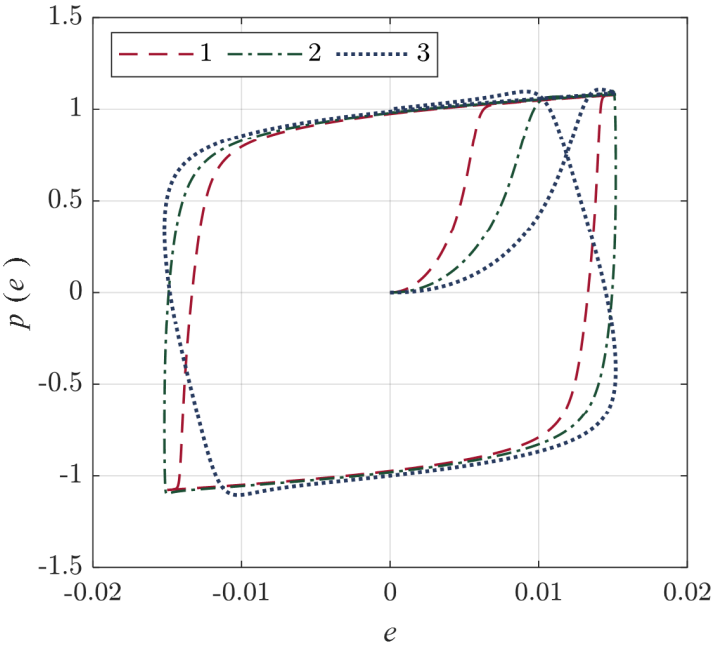


Рис. 1. Петля сегнетоэлектрического гистерезиса при $\alpha = 1-1,\ \alpha = 1.1-2,\ \alpha = 1.2-3$ *для* $l = 1.37$

Заключение

Таким образом, характерным управляющим параметром обобщенной модели становится порядок дробной производной по времени. Уравнение супердиффузии для тонких пленок сегнетоэлектриков позволяет описывать динамику поляризации в условиях, когда механизмы переключения поляризации становятся важными в контексте низкоразмерных систем. Полученные результаты позволяют предположить, что эффекты памяти проявляются в деформации петли, связанной с ее расширением. Переходные процессы супердиффузии, характеризующиеся деформацией петли, наблюдаются, начиная с $\alpha \geq 1.3$.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 122082400001-8.

Литература

1. Физика сегнетоэлектриков: современный взгляд / под ред. К. М. Рабе, Ч. Г. Анна, Ж.-М. Трискона; пер. с англ. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 440 с.

2. *Hubert M.* Solitons in thin-film ferroelectric materia / M. Hubert, M. Justin, N. Kudryashov, G. Betchewe, S. Doka // Physica Scripta. – 2018. – V. 93. – P. 75201.

3. *Souleymanou A.* Soliton solutions in different classes for the Kaup – Newell model equation / A. Souleymanou, A. Korkmaz, H. Rezazadeh, A. Bekir, S. Takougoum Mukam // Mod. Phys. Lett. B. – 2019. – V. 31. – P. 2050038.

4. *Liu F.* Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffusion equation / F. Liu, M. Meerschaert, R. McGough, P. Zhuang, Q. Liu // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2013. –V.16. – P. 9–25.

5. *Maslovskaya A.* Time-fractional Landau–Khalatnikov model applied to numerical simulation of polarization switching in ferroelectrics / A. Maslovskaya, L. Moroz // Nonlinear Dynamics. – 2022. – С. 1 – 23.

УДК 004.891

ПРИМЕНЕНИЕ КОНКУРЕНТНОГО КОЭВОЛЮЦИОННОГО АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ СИМВОЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ РЕГУЛЯРНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Н. А. Морошкин

МИРЭА – Российский технологический университет

Аннотация. В работе описан подход к оптимизации структуры регулярных выражений диалекта языка программирования Python модуля re. Этот подход реализован как алгоритм конкурентной коэволюции на основе символьной регрессии (GEP). Сравнительный анализ результатов запуска алгоритмов GEP в составе коэволюции и по отдельности демонстрирует эффективность использования коэволюции символьной регрессии в качестве инструмента оптимизации регулярных выражений.
Ключевые слова: регулярные выражения, символьная регрессия, оптимизация структуры регулярного выражения, коэволюционный алгоритм, конкурентная коэволюция, дерево выражений, популяционные алгоритмы.

В настоящее время, несмотря на развитие и усложнений технологий анализа данных, классические алгоритмы обработки строк остаются наиболее распространенными инструментами текстового анализа в самых различных сферах. Один из таких инструментов — регулярные выражения (РВ). РВ — это инструмент для поиска подстроки в строке. РВ используются во многих текстовых редакторах, различных мониторинговых системах и СУБД. Рост популярности задач текстовой аналитики спровоцировал рост числа диалектов РВ [1]. Из-за этого задача оптимизации регулярного выражения путем минимизации некоторых конечных автомат, задающихся РВ, становится неразрешимой.

Задача оптимизации РВ заключается в нахождении такого РВ, которое будет показывать наибольшую скорость работы на некотором множестве проверочных строк. Однако, при проведении оптимизации важно учитывать, что оптимизированное РВ должно показывать (с некоторым допущением) тот же уровень точности, как и исходное РВ. Отметим, что при подсчете результатов оптимизации запуск каждого РВ осуществлялся несколько раз. Данная операция необходимо для точного замера времени работы регулярного выражения, так как при различных запусках регулярного выражения затраченное время может отличаться. Причины таких различий обычно находятся в аппаратной части рассматриваемого ЭВМ. Пусть область причин для текущего примера ограничена работой языков программирования и использованием доступных аппаратных ресурсов, а именно ОЗУ. В некоторых случаях сборщики мусора используемых языков программирования могут влиять на время работы рассматриваемого РВ. Для минимизации влияния сторонних процессов замер следует производить заданное количество раз, считая среднее арифметическое время работы некоторого РВ или медиану, для избегания учета выбросов в замерах времени работы. Функция замера времени $p(\partial)$ осуществляет замер времени работы для некоторой операции. Необходимо выбирать функцию $p(\partial)$ таким образом, чтобы она наименее зависела от сторонних процессов и учитывала специфику работы программы на используемом языке программирования.

В связи с этим предлагается рассматривать РВ не просто как способ некоторого конечного автомата, а как модель «черный ящик». Тогда задача оптимизации РВ можно решить с помощью некоторого стохастического алгоритма. В данной работе рассматривается применение конкурентного коэволюционного алгоритма [2] на основе символьной регрессии [3] для оптимизации некоторого РВ.

Символьная регрессия относится к группе популяционных алгоритмов. При решении задачи оптимизации некоторой модели «черный ящик» популяционные алгоритмы обладают рядом преимуществ по сравнению с аналогами:

– решение через популяционные алгоритмы наиболее интерпретируемо;

– популяционные алгоритмы — это «легковесные» инструменты, что показывается в количество необходимых аппаратно-программных ресурсах;

– популяционные алгоритмы позволяют обрабатывать большое количество альтернативных решений.

В контексте решения задачи оптимизации регулярного выражения вектор решения или индивид в популяции представляется в виде дерева выражения (ДВ). Символьная регрессия — это тип регрессионного анализа [2], рассматривающая пространство ДВ, чтобы найти определенную ДВ, которое наилучшим образом соответствует заданному набору данных, то есть имеет наилучший показатель пригодности при заданных условиях. Наиболее часто символьная регрессия применяется для оптимизации математических выражений, представленных в иерархической структуре, то есть в виде некоторого ДВ. В данной работе рассматривается алгоритм программирования генетических выражений (GEP) [2], который является представителем семейства популяционных алгоритмов, решающих задачу символьной регрессии.

Пусть reg_0 — некоторое исходное РВ. Пусть t — некоторое множество терминалов $t_1, t_2, ..., t_r$, где r — это количество используемых терминалов в исходном РВ reg_0. Пусть f – множество функций принимающих множество терминалов t в качестве параметра, $f_1(t), f_2(t), ..., f_k(t)$, где k — это количество используемых функций в исходном РВ reg_0. Например, для РВ $ab?|c*.[0-2]$, множество терминалов $t = (a, b, c)$, а множество функций $f = (\&, |, ?, *)$. Также каждая функция $f_i \subset f$ характеризуется параметров арности θ, определяющим максимально возможное количество терминалов в качестве параметров для рассматриваемой функции. Тогда ДВ для исходного РВ reg_0 будет иметь вид $tree_0(f, t | reg_0)$. При работе с задачей символьной регрессии и алгоритмом программирования генетических выражений необходимо определить фенотип и генотип индивида. Исходная форма РВ представлена на рис. 1a. Генотипом индивида является K-выражение [2] (представлено на рис. 1b). Фенотипом является описанное выше ДВ (представлено на рис. 1c).

Для решения задачи оптимизации РВ необходимо:

– сгенерировать множество проверочных строк $S(g = \overline{1, G})$ множество сгенерированных строк, которые используются для проверки РВ на корректность и для подсчета качественных метрик;

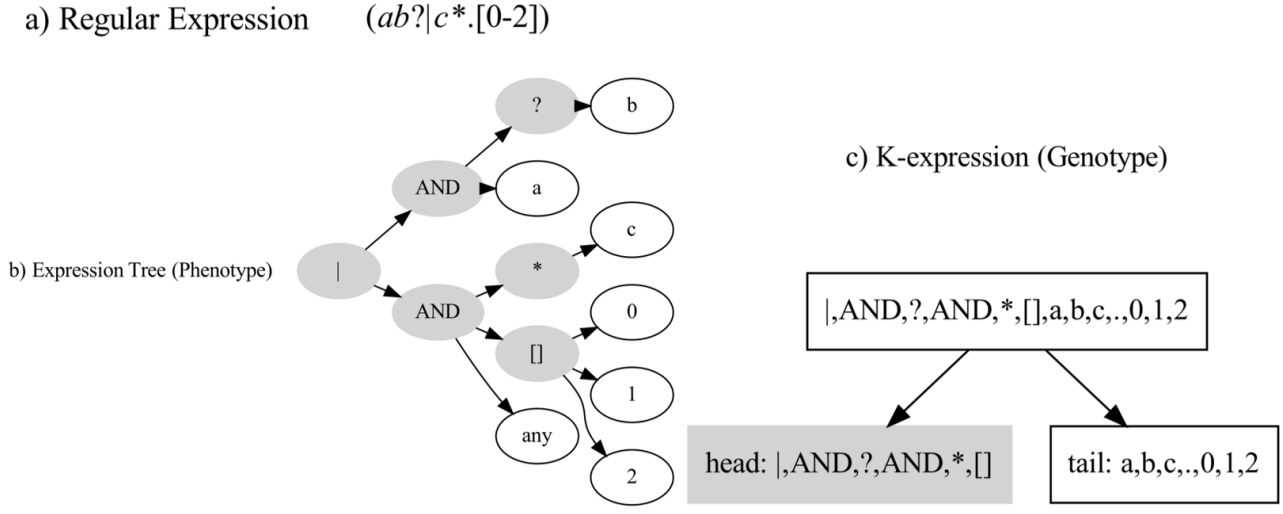


Рис. 1. Пример промежуточных представлений: a) вид исходного регулярного выражения; b) дерево выражений (фенотип); c) K-выражение (генотип)

– определить для некоторого РВ функцию прохода m для строки S_g через автомат РВ reg, возвращающая 1, если РВ reg полностью соответствует некоторому участку в строке S_g и 0 — в противном случае;

– определить функцию пригодности $Q(x)$ для индивида x.

В данной работе показана зависимость результатов оптимизации от разных функций пригодности. Функцию пригодности индивида $Q(x)$ можно определить на основе времени работы некоторого индивида x умноженное на точность РВ, полученного от некоторого индивида x. В качестве метрик качества предлагается использовать такие метрики, как accuracy, precision, recall и f-мера [4].

Конкурентная коэволюция — это способ организации коэволюционного алгоритма, когда алгоритмы «борются» за общедоступные ресурсы. В данном случае — это общее количество вычислений функции пригодности.

Коэволюционный алгоритм предлагается реализовать как конкурентную коэволюцию, основанную на сравнении индивидуальных алгоритмов по качеству каждой итерации (поколения). Основными параметрами коэволюционного алгоритма [2] можно считать общий ресурс $R \subset N$, длину интервала адаптации $T \subset N$, размер «социальной карты» M (процент от исходного размера популяции, позволяющий определить обязательный к сохранению минимальный размер популяции при её коррекции в процессе коэволюции) и размер штрафа для проигравшей популяции $P \subset R$ (процент индивидов, которые должны быть удалены из популяции).

В результате анализа результатов оптимизации и описательных статистик выборок (среднее, медиана, коэффициент вариации, среднеквадратичное отклонение, максимальное и минимальное значение) каждого запуска алгоритмов можно сделать вывод, что коэволюционный алгоритм лучше, чем «худший» из индивидуальных алгоритмов, и даже лучше, чем «средний» алгоритм, но не всегда лучше, чем «лучший» из алгоритмов.

Также можно отметить, что в процессе оптимизации было замечено, что некоторые индивиды не способы скомпилироваться в некоторое РВ. Обычно это было связано с внутренними ограничениями механизма регулярных выражений выбранного модуля или библиотеки. Количество таких «больных» индивидов при запуске индивидуальных алгоритмов не уменьшается и в среднем остается практически неизменным на протяжении всех итераций. Из-за наличия штрафов в алгоритмах коэволюции количество таких индививидов напротив сокращается с каждой итерацией.

В представленной работе оптимизация РВ осуществлялась с использованием коэволюционного алгоритма оптимизации на основе алгоритма GEP. Анализ результатов показал, что коэволюционный алгоритм способен решать задачу оптимизации РВ быстрее, чем это можно сделать при запуске отдельных индивидуальных алгоритмов. Отдельно следует отметить, что в будущих исследованиях будет проведен анализ результатов коэволюционного алгоритма при изменении значений таких параметров как, общий размер ресурса, размер штрафа, размер социальной карты и размер интервала адаптации.

Литература

1. *Moroshkin N.* Architecture of a regular expression translator with optimization of intermediate states / L. Demidova, N. Moroshkin // 2024 International Scientific Conference on Information Technologies (InfoTech). – 2024. – P. 1-4.

2. *Semenkin E.* Michigan and Pittsburgh methods combination for fuzzy classifier design with coevolutionary algorithm / R. Sergienko, E. Semenkin // 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation. – 2013. – P. 3252–3259.

3. *Cândida F.* Gene Expression Programming: A New Adaptive Algorithm for Solving Problems / F. Cândida // Complex Systems. – 2001. – № 13. – P. 87–129.

4. *Gorchakov A.* Analysis of Program Representations Based on Abstract Syntax Trees and Higher-Order Markov Chains for Source Code Classification Task / A. Gorchakov, L. Demidova, P. Sovietov // Future Internet. – 2023. – № 13. – P. 314.

УДК 519.654 : 519.676

БИЛОГИСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МОЩНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИОННЫХ КЛАСТЕРОВ НА ОГРАНИЧЕННЫХ НЕРАВНОМЕРНО ВЗВЕШЕННЫХ КВАДРАТНЫХ РЕШЕТКАХ С (1, 0)-ОКРЕСТНОСТЬЮ

П. В. Москалев[1,2], А. С. Мягков[1]

[1]Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
[2]Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Проводится анализ модели, используемой для аппроксимации функций мощности перколяционных кластеров на ограниченных квадратных решетках с (1, 0)-окрестностью, взвешенных бета-распределенными случайными величинами. Аппроксимация строится как произведение функции взвешивающего распределения и пары двухпараметрических логистических функций. Статистические оценки параметров моделей получены с помощью нелинейного метода наименьших квадратов. Показано, что апостериорные оценки сдвиговых параметров обеих логистических функций значимо отличаются от априорных оценок порога перколяции, что приводит к существенной асимметрии функции, аппроксимирующей мощность перколяционных кластеров на ограниченных квадратных решетках с (1, 0)-окрестностью.
Ключевые слова: порог перколяции, перколяция узлов, квадратная решетка, мощность перколяционного кластера, бета-распределение, логистическая функция.

Введение

Модели решеточной перколяции находят применение в различных областях, например, при исследовании процессов в пористых материалах, или при изучении фазовых переходов в физике твердого тела. Одной из задач, решаемых для перколяционных моделей, является выделение некоторого подмножества узлов (кластера), непрерывным образом связанного с другим (стартовым) подмножеством. Типичные модели решеточной перколяции основаны на структурах регулярных (однородных) графов [1, 2], вершины или ребра которых взвешиваются с помощью некоррелированной выборки значений случайной величины S с некоторым известным законом распределения. К особенностям таких моделей обычно относят: во-первых, их стохастичность, появляющуюся в виде взаимосвязи между глобальными характеристиками модели и законом распределения взвешивающей решетку случайной величины S; во-вторых, их связность, проявляющуюся во взаимосвязи глобальных характеристик кластеров с локальными характеристиками ε-окрестностей узлов в перколяционной решетки; в-третьих, критический характер процесса протекания, проявляющийся в наличии некоторых (пороговых) значений, в окрестности которых малые вариации локальных параметров приводят к существенно большим изменениям эффективных характеристик перколяционной модели.

Следуя логике нашего предыдущего исследования [3], в качестве параметров в задаче узлов для моделей решеточной перколяции выделим размер решетки x и долю ее достижимых узлов p, а также теоретическую функцию распределения $F_0(p)$ случайной величины S, взвешивающей узлы перколяционной решетки. Их значения и будут определять эффективные характеристики исследуемых моделей, в частности, функцию мощности перколяционных кластеров $P_\infty(p)$ и порог протекания, априорные оценки которого, как показано в [4], могут быть определены квантилями функций распределения $F_0(p)$, а апостериорные — аппроксимациями функций мощности перколяционных кластеров $P_\infty(p)$.

1. Модель перколяции узлов на квадратной неравномерно взвешенной решетке

В рамках поставленной задачи будем рассматривать модель перколяции узлов на ограниченной квадратной решетке с (1, 0)-окрестностью, взвешенную непрерывной случайной величиной S, имеющей бета-распределение $S \sim \mathbf{B}(s_1, s_2)$. Для этих моделей, следуя работам [3–5], будем исследовать статистику образования кластеров, стягивающих решетку в вертикальном направлении, то есть обладающих вертикальным размером, сопоставимым с размером перколяционной решетки.

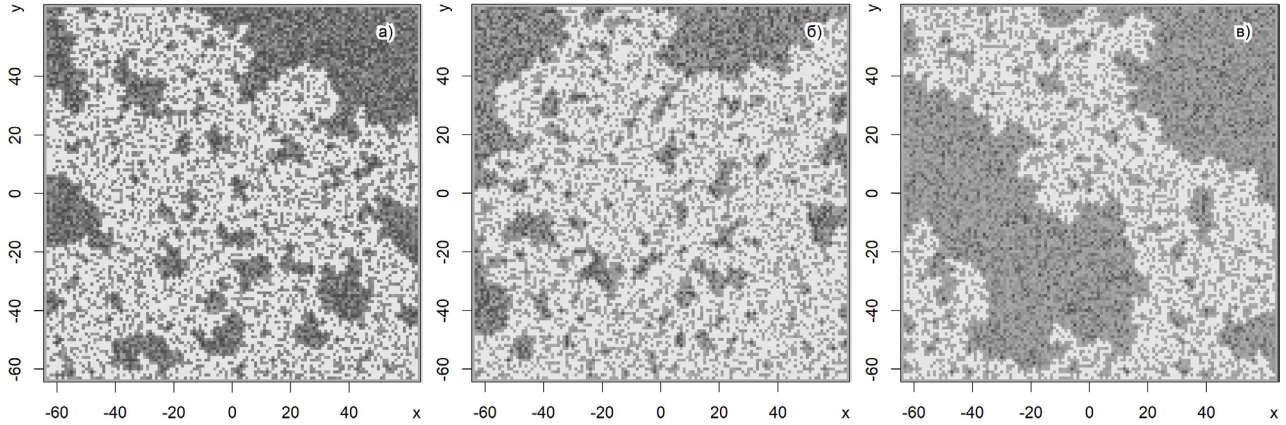


Рис. 1. Реализации стягивающих кластеров при критических значениях параметра $p \approx p_c$ для различных взвешивающих распределений S: а) $S \sim \mathbf{B}(1,2)$; б) $S \sim \mathbf{B}(1,1)$; в) $S \sim \mathbf{B}(2,1)$

Все реализации кластеров на рис. 1 строились нами для квадратной решетки размером $x = 129$ узлов с (1, 0)-окрестностью при критических значениях параметра $p \approx p_c$, соответствующих априорным оценкам порога перколяции [4] с различными взвешивающими распределениями S: а) $S \sim \mathbf{B}(1,2)$, $p = 0.3618$; б) $S \sim \mathbf{B}(1,1)$, $p = 0.5927$; в) $S \sim \mathbf{B}(2,1)$, $p = 0.7699$.

Стартовое подмножество узлов на рис. 1 формируется вдоль нижней границы перколяционной решетки, а целевое подмножество — вдоль ее верхней границы $X_{0|1} = \{(x_k, y_k)$: $x_k = -64, -63, \ldots, 64$; $y_k = \mp 64\}$. Светло-серым цветом на рис. 1 мы обозначили узлы с низкой вероятностью протекания, темно-серым цветом — узлы с высокой вероятностью протекания, а белым цветом — узлы кластера, стягивающего решетку по вертикали. Реализации строились с применением пакета "SPSL" для системы R [6]: а) "`ssi20(x = 129, p = 0.3618, shape = c(1, 2))`"; б) "`ssi20(x = 129, p = 0.5927, shape = c(1, 1))`"; в) "`ssi20(x = 129, p = 0.7699, shape = c(2, 1))`".

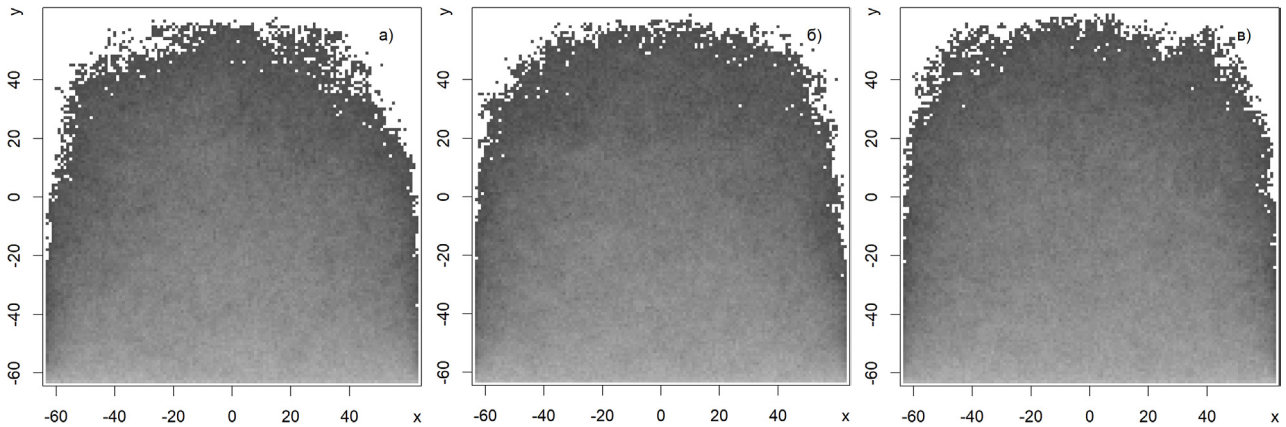


Рис. 2. Распределения относительных частот стягивающих кластеров для различных взвешивающих распределений S: а) $S \sim \mathbf{B}(1,2)$; б) $S \sim \mathbf{B}(1,1)$; в) $S \sim \mathbf{B}(2,1)$

На рис. 2 показаны распределения относительных частот узлов квадратных решеток для выборок объемом $n = 300$ кластеров узлов с (1, 0)-окрестностью при критических значениях параметра $p \approx p_c$, соответствующих априорным оценкам порога перколяции [4] для взвешивающих распределений S, идентичных ранее показанным на рис. 1.

Светло- и темно-серым цветом на рис. 2 показаны узлы перколяционной решетки с высокими и низкими частотами принадлежности к стягивающим кластерам, а все узлы с околонулевыми частотами условно не отображаются. По аналогии с рис. 1 все распределения на рис. 2 были построены с помощью пакета "SPSL" для системы R [6]: а) "`fssi20(n = 300, x = 129, p = 0.3618, shape = c(1, 2))`"; б) "`fssi20(n = 300, x = 129, p = 0.5927, shape = c(1, 1))`"; в) "`fssi20(n = 300, x = 129, p = 0.7699, shape = c(2, 1))`".

2. Аппроксимация функций мощности стягивающих кластеров на неравномерно взвешенных перколяционных решетках

В качестве оценок функции мощности перколяционных кластеров $\{P_{\infty,i}(p_i)\}$ примем усредненные по целевому подмножеству X_1 относительные частоты узлов решетки в стягивающих кластерах, примеры распределений которых показаны выше на рис. 2. В работе [4] было показано, что при убывании параметра $p \to 0+$ эти оценки близки к нулю $P_\infty(p) \to 0+$, а при его возрастании $p \to 1-$ сходятся к функции взвешивающего распределения $P_\infty(p) \to F_0(p)-$.

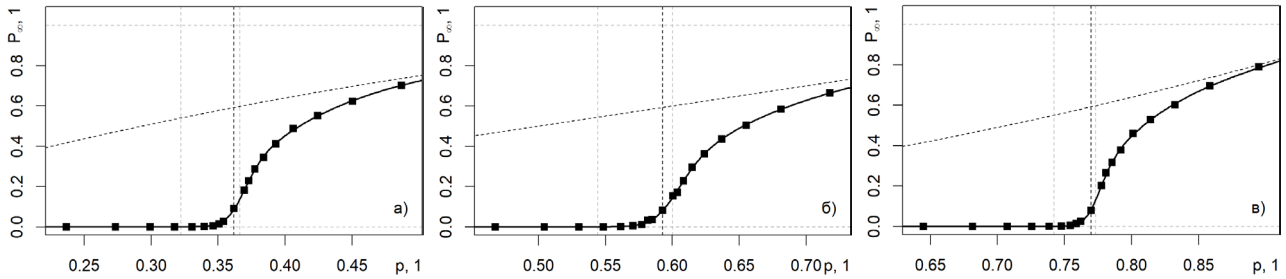


Рис. 3. Аппроксимация мощности стягивающих кластеров $P_\infty(p \mid S)$ для различных взвешивающих распределений S: а) $S \sim \mathbf{B}(1,2)$; б) $S \sim \mathbf{B}(1,1)$; в) $S \sim \mathbf{B}(2,1)$

На рис. 3 приведены зависимости статистических оценок мощности стягивающих кластеров от доли достижимых узлов $P_\infty(p)$ для неравномерно взвешенных квадратных решеток с линейным размером $x = 129$ узлов с (1, 0)-окрестностью для множества возможных значений долей достижимых узлов p в окрестности критической точки $p \approx p_c$. Символами «■» показаны статистические оценки $\{P_{\infty,i}(p_i)\}$. Вертикальные и горизонтальные штриховые линии серого и черного цветов на рис. 3 соответствуют характерным для данной задачи уровням долей достижимых узлов $p \approx p_c$ и предельных вероятностей $P_\infty = \{0,1\}$. Выпуклые вверх, вниз или прямые штриховые линии черного цвета соответствуют интегральным функциям бета-распределенной случайной величины S, на интервале $(p_c \pm 0.13)$. При этом мощность стягивающего кластера на интервале $0 < p < 1$ будет аппроксимироваться моделью вида:

$$P_\infty(p \mid s) = F_0(p \mid s)F(p), \tag{1}$$

где $F_0(p \mid s_1, s_2) = \mathbf{B}(p \mid s_1, s_2) / \mathbf{B}(s_1, s_2)$ — функция распределения взвешивающей узлы перколяционной решетки случайной величины S; $F(p) = F_1(p)F_2(p)$ — асимметричная билогистическая функция вида:

$$F(p) = \frac{2/[1 + \exp(-(p - a_2)/b_2)] - 1}{1 + \exp(-(p - a_1)/b_1)}, \tag{2}$$

где a_1, a_2 — параметры сдвига, определяющие абсциссы точек перегиба отдельных компонент $F_1(p)$ и $F_2(p)$ билогистической функции (2); b_1, b_2 — параметры масштаба, определяющие

радиусы асимметричного интервала значений параметра $p \in (p_c - \varepsilon_1, p_c + \varepsilon_2)$, в пределах которого функция (2) статистически значимо отличается от своих асимптот.

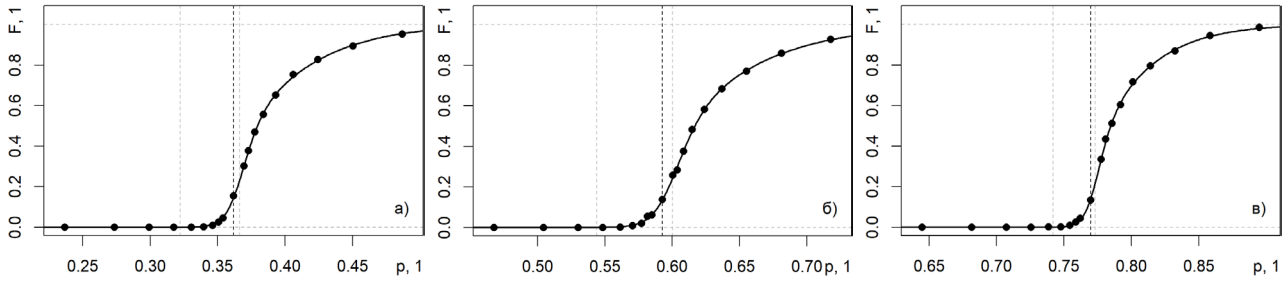


Рис. 4. Аппроксимация билогистических сигмоидных функций $F(p)$ для различных взвешивающих распределений S: а) $S \sim \mathbf{B}(1,2)$; б) $S \sim \mathbf{B}(1,1)$; в) $S \sim \mathbf{B}(2,1)$

На рис. 4 представлены примеры графиков асимметричных билогистических сигмоидных функций вида (2) со сдвиговыми и масштабными параметрами, идентичными принятым при построении аппроксимаций на рис. 3. Символами «●» показаны отношения оценок мощности стягивающих кластеров к соответствующим значениям функций распределения $\{P_{\infty,i}/F_0(p_i)\}$ взвешивающей узлы перколяционной решетки случайной величины S.

3. Результаты и обсуждение

При построении вышеуказанной аппроксимации в системе R была использована реализация нелинейного метода наименьших квадратов из пакета “gslnls” для системы R [7]. Основные результаты, полученные при аппроксимации в форме (1) для зависимости мощности стягивающих кластеров от доли достижимых узлов $\{P_{\infty,i}(p_i)\}$ при параметрах взвешивающего распределения $S \sim \mathbf{B}(1,1)$ приведена в листинге 1.

Листинг 1

Аппроксимация эмпирической зависимости $\{P_{\infty,i}(p_i)\}$ в форме (1)

```
> summary(fit)
Formula: Pinf ~ p * (2/(1 + exp(-(p - a2)/b2)) - 1)/(1 + exp(-(p - a1)/b1))
   Parameters:
       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
   a1 0.5989037  0.0003941 1519.65   <2e-16 ***
   a2 0.5447627  0.0019619  277.67   <2e-16 ***
   b1 0.0097962  0.0001619   60.52   <2e-16 ***
   b2 0.0532708  0.0009085   58.64   <2e-16 ***
   ---
   Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
   Residual standard error: 0.001864 on 22 degrees of freedom
   Number of iterations to convergence: 14
   Achieved convergence tolerance: 1.751e-16

> confint(fit)
         2.5 %     97.5 %
a1 0.598086392 0.59972104
a2 0.540693863 0.54883144
b1 0.009460513 0.01013191
b2 0.051386728 0.05515483
```

Как было показано в работе [3], при исследовании равномерно взвешенных перколяционных решеток малого размера удовлетворительную аппроксимацию для функции мощности стягивающих кластеров можно построить на базе произведения функции распределения и единичной логистической функции. Однако для неравномерно взвешенных решеток большего размера построение удовлетворительной аппроксимации вида (1) основано на использовании асимметричной билогистической функции вида (2), причем, если ориентироваться на остаточное стандартное отклонение (RSE), то можно заметить, что качество построенной аппроксимации выросло более чем пятикратно $\sigma_{\varepsilon 1}/\sigma_{\varepsilon 2} \approx 0.0097/0.0019 \approx 5.1$.

На рис. 3 вертикальными штриховыми линиями серого цвета показаны статистические оценки сдвиговых параметров модели (1), а вертикальными линиями черного цвета — априорные оценки порога перколяции на бета-взвешенных квадратных решетках с (1, 0)-окрестностью. Нетрудно заметить, что во всех рассмотренных случаях выполняются неравенства вида $a_2 < p_c < a_1$, причем радиусы левого и правого полуинтервалов различаются почти на порядок $p_c - a_1 < p_c - a_2$.

4. Заключение

Представленные результаты на взгляд авторов наглядно демонстрируют, что применение билогистических моделей позволяет получать удовлетворительные аппроксимации кластеров, стягивающих неравномерно взвешенные решетки для большего диапазона размеров решеток. С теоретической точки зрения интерес вызывает исследование природы возникновения асимметрии в зависимости функции мощности стягивающих кластеров от доли достижимых узлов. С практической точки зрения интерес вызывают корреляции параметров предлагаемых аппроксимаций от размера решетки и параметров взвешивающего распределения, а также применимость предлагаемых аппроксимаций на неравномерно взвешенных кубических решетках.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 23-21-00376).

Литература

1. *Тарасевич Ю. Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы / Ю. Ю. Тарасевич. – Москва: URSS, 2002. – 112 с. – URL: https://elibrary.ru/jkmbru (дата обращения: 29.10.2024).

2. *Москалев П. В.* Перколяционное моделирование пористых структур / П. В. Москалев. – Москва: URSS, 2018. – 240 с. – URL: https://elibrary.ru/zrjswd (дата обращения: 29.10.2024).

3. *Москалев П. В.* Об аппроксимации функций мощности перколяционных кластеров на равномерно взвешенных квадратных решетках с (1, 0)-окрестностью / П. В. Москалев, Л. С. Онищенко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2024. – С. 564–568. – URL: https://elibrary.ru/hvsmwr (дата обращения: 29.10.2024).

4. *Moskalev P. V.* Convergence of percolation probability functions to cumulative distribution functions on square lattices with (1, 0)-neighborhood / P. V. Moskalev // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2020. – V. 553. – P. 124657. – URL: https://doi.org/10.1016/j. physa.2020.124657 (дата обращения: 29.10.2024).

5. *Москалев П. В.* Оценки порога и мощности перколяционных кластеров на квадрат-ных решетках с (1, π)-окрестностью / П. В. Москалев // Компьютерные исследования и модели-

рование. – 2014. – Т. 6, № 3. – С. 405–414. – URL: https://elibrary.ru/sitewx (дата обращения: 29.10.2024).

6. *Moskalev P. V.* SPSL: Site Percolation on Square Lattices. – R package version 0.1.9. – URL: https://cran.r-project.org/package=SPSL (дата обращения: 29.10.2024).

7. *Chau J.* gslnls: GSL Nonlinear Least-Squares Fitting. – R package version 1.1.2. – URL: https://cran.r-project.org/package=gslnls (дата обращения: 29.10.2024).

УДК 519.6

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НА МВС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГИДРОБИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АКТУАЛЬНОГО СЦЕНАРИЯ ВНЕЗАПНОЙ ДЕПРЕССИИ АКТИВНО РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВИДОВ ПЛАНКТОНА И ПРОМЫСЛОВЫХ РЫБ ПРИ ПОПАДАНИИ В МЕЛКОВОДНЫЙ ВОДОЕМ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ

А. В. Никитина[1,2], Т.В. Лященко[2]

[1]Донской государственный технический университет
[2]Южный федеральный университет

Аннотация. Работа посвящена исследованию актуального сценария внезапной депрессии активно распространяющихся видов фито- и зоопланктонных сообществ при загрязнении гидробиогеоценоза опасными, в том числе и токсичными, веществами. Изучение механизма влияния загрязнений мелководных систем на численность планктонных популяций реализовано на основе методов и средств математического моделирования и сценарного подхода. Разработана и численно реализована в виде программного комплекса, ориентированного на супер-ЭВМ, математическая модель распространения загрязняющих веществ, включая частицы нано- и микропластика, наиболее распространенных видов планктона и промысловых рыб в мелководном водоеме на примере Азовского моря.
Ключевые слова: гидробиологический процесс, математическая модель, алгоритм.

Введение

Цель исследования состояла в разработке, изучении и численной реализации математической модели гидробиологического процесса мелководного водоема. Одной из важных и актуальных задач является исследование на основе сценарного подхода, методов и средств математического моделирования активно распространяющихся видов фито- и зоопланктонных сообществ, являющихся основной пищей ценных и промысловых рыб. Попадание в гидробиогеоценоз загрязняющих веществ, включая частицы нано- и микропластика, со стоками рек и путем оседания из воздуха приводит к значительному ухудшению среды обитания. Пластиковые отходы и мусор образуют целые острова, ухудшают экологическое состояние многих уникальных водных экосистем, имеющих курортное значение.

1. Постановка задачи

В разработанной пространственно-трехмерная математическая модель водной ихтиологии — модель динамики промысловой рыбы основывается на литературных источниках, работах Тютюнова Ю. В. с соавторами [1], учитывается конвективное и адвективное движение водной среды, микротурбулентная диффузия, температурный и кислородный режимы, соленость, гравитационное оседание субстанций, пищевой таксис, вылов. С помощью разработанной модели гидробиологии мелководного водоема можно изучать распределения наиболее распространенных в Азовском море в летний период видов планктона – диатомового фитопланктона и зоопланктона, загрязняющих биогенных веществ, пластика [2–4]. Модель включает систему нелинейных уравнений в частных производных с реактивными членами, имеет вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial (uc)}{\partial x}+\frac{\partial (vc)}{\partial y}+\frac{\partial \left(\left(w+w_{g\varphi}\right)c\right)}{\partial z}-\mu_c \Delta c+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_c \frac{\partial c}{\partial z}\right)=\psi_c,$$

$$c \in \{X, Z, S, M, N, P\},\ \psi_X = g_X(X, S) - (\delta_X Z + \sigma_X P + \varepsilon_X) X, \tag{1}$$

$$\psi_Z = g_Z(X, Z, N) - (\varepsilon_Z + \delta_Z) Z,\ \psi_S = -g_S(X, S) + B(S_P - S) + f_S,$$

$$\psi_M = f_M - g_M(M, P) - \varepsilon_M MN,\ \psi_N = \varepsilon_N MN - g_N(N, Z, P),\ \psi_P = g_P(X, M, N, P) - (\varepsilon_P + \delta_P) P,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial t} + div(\mathbf{U}_P \otimes \mathbf{u}_P) - \mu_u \Delta \mathbf{u}_P - \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_u \frac{\partial \mathbf{u}_P}{\partial z}\right) - k_M grad M - k_N grad N - k_X grad X + \alpha_u \mathbf{u}_P = 0,$$

где X, Z, S, M, N, P — концентрации водоросли *Coscinodiscus*, планктона *Copepoda*, биогенного вещества, микро- и нанопластика, промысловой рыбы *Abramis brama*; g_φ — трофические функции для субстанций $c \in \{X, Z, S, M, N, P\}$. Положим вначале: $g_X(X, S) = \gamma_X \alpha_S XS$, $g_Z(X, Z, N) = \gamma_Z \delta_X XZ - \beta_N NZ$, $g_S(X, S) = \alpha_S XS$, $g_M(M, P) = \beta_M MP$, $g_P(X, M, N, P) = \xi_P \sigma_X XP - \gamma_P(\beta_M M + \beta_N N) P$, γ_P, ξ_P — передаточные коэффициенты; γ_S — доля S, находящегося в биомассе X; ε_X — коэффициент, учитывающий смертность и метаболизм X; ε_M, ε_N — коэффициенты разложения микропластика на нанопластик и передаточный коэффициент поступления в водную среду нанопластика; $\varepsilon_Z, \varepsilon_P$ — коэффициенты элиминации (смертности) Z, P соответственно; δ_X — убыль X за счет выедания Z; δ_Z — убыль Z за счет выедания рыбами; δ_P — убыль P за счет выедания рыбами и вылова; $f_S = f_S(t, x, y, z)$, $f_M = f_M(t, x, y, z)$ — функции источника загрязнений; S_P — предельно возможная концентрация биогенного вещества; B — удельная скорость поступления загрязняющего вещества; β_N, β_M — скорости выедания нано- и микропластика рыбами; ε_M — коэффициент разложения микропластика на нанопластик; Δ — двумерный оператор Лапласа; μ_c, ν_c — диффузионные коэффициенты в горизонтальном и вертикальном направлениях субстанции c соответственно; $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_{gc}$, $\mathbf{U}_P = \mathbf{u} + \mathbf{u}_P$ — скорости конвективного переноса вещества и P; w_{gc} — гидравлическая крупность или скорость осаждения субстанции c; $\mathbf{u} = (u, v, w)^\tau$ — поле скоростей водного потока; $\mathbf{u}_P$ — скорость движения рыбы относительно воды; μ_u, ν_u — коэффициенты горизонтальной и вертикальной составляющей диффузии скорости таксиса; α_u — коэффициент инерционного движения рыбы; k_N, k_M, k_X — коэффициенты таксиса; $\otimes$ — тензорное произведение; $\mathbf{u}_{0c}$ — скорость осаждения c-й субстанции под действием силы тяжести, $c \in \{X, Z, S, M\}$.

Расчетная область G представляет собой замкнутый бассейн, ограниченный цилиндрической боковой поверхностью σ, невозмущенной поверхностью водоема Σ_0, дном $\Sigma_H = \Sigma_H(x, y)$. $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_H \cup \sigma$ — кусочно-гладкая граница области G для $0 < t \le T_0$.

Пусть $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности, $\mathbf{U}_\mathbf{n}$ — нормальная по отношению к Σ составляющая вектора скорости водного потока.

Зададим начальные условия:

$$c(x, y, z, 0) = c_0(x, y, z),\ \ c \in \{X, S, Z, M, N, P\}, (x, y, z) \in \bar{G}, t = 0. \tag{2}$$

Граничные условия зададим в следующем виде:

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{на } \sigma, \text{ если } \mathbf{U}_\mathbf{n} < 0;\ \mu_c \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = -\mathbf{U}_\mathbf{n} c \text{ на } \sigma, \text{ если } U_\mathbf{n} \ge 0;$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma_0;\ \nu_c \frac{\partial c}{\partial z} = -w_{gc} c \quad \text{на } \Sigma_H, c \in \{X, S, Z, M, N, P\}, \tag{3}$$

ε_1, ε_3, ε_5 — учитывают опускание планктона и рыб на дно и их затопление; ε_2, ε_4, ε_6 — учитывают поглощение загрязняющих веществ донными отложениями.

2. Описание метода решения задачи

Опишем уравнение типа диффузии-конвекции, к которому может быть сведено каждое уравнение системы (1)–(3) после линеаризации

$$c'_t + uc'_x + vc'_y = \left(\mu c'_x\right)'_x + \left(\mu c'_y\right)'_y + f \tag{4}$$

с граничными условиями:

$$c'_n(x, y, t) = \alpha_n c + \beta_n, \tag{5}$$

где u, v — компоненты вектора скорости, μ — коэффициент турбулентного обмена, f — функция, описывающая интенсивность и распределение источников.

2.1. Дискретизация задачи биологической кинетики

Для численной реализации поместим расчетную область в прямоугольник, введем равномерную расчетную сетку [5, 6]:

$$w_h = \left\{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y;\ \ n = \overline{0, N_t}, i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y};\ \ N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y\right\},$$

где τ — шаг по времени, h_x, h_y — шаги по пространству, N_t — верхняя граница по времени, N_x, N_y — границы по пространству.

Аппроксимация однородного уравнения (4) реализуется с помощью схемы расщепления [7–10]:

$$\frac{c^{n+1/2} - c^n}{\tau} + u\left(c^n\right)'_x = \left(\mu\left(c^n\right)'_x\right)'_x, \tag{6}$$

$$\frac{c^{n+1} - c^{n+1/2}}{\tau} + v\left(c^{n+1/2}\right)'_y = \left(\mu\left(c^{n+1/2}\right)'_y\right)'_y. \tag{7}$$

Для аппроксимации системы уравнений (6), (7) используется схема, полученная как результат линейной комбинации схемы «кабаре» и «крест», с весовыми коэффициентами 2/3 и 1/3 соответственно. Данные коэффициенты рассчитаны путем минимизации порядка погрешности аппроксимации, которая для рассматриваемой задачи позволяет более точно описать поведение решения при достаточно больших сеточных числах Пекле [11–14]. Алгоритм решения задачи базируется на использовании функции заполненности расчетных ячеек [15, 16]:

$$\frac{2q_{2,i,j} + q_{0,i,j}}{3}\frac{c^{n+1/2}_{i,j} - c^n_{i,j}}{\tau} + 5u_{i-1/2,j}q_{2,i,j}\frac{c^n_{i,j} - c^n_{i-1,j}}{3h_x} + u_{i+1/2,j}\min\left(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}\right)\frac{c^n_{i+1,j} - c^n_{i,j}}{3h_x} +$$
$$+ \frac{2\Delta_x c^n_{i-1,j}q_{2,i,j} + \Delta_x c^n_{i,j}q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i+1/2,j}q_{1,i,j}\frac{c^n_{i+1,j} - c^n_{i,j}}{h_x^2} - 2\mu_{i-1/2,j}q_{2,i,j}\frac{c^n_{i,j} - c^n_{i-1,j}}{h_x^2} -$$
$$-\left|q_{1,i,j} - q_{2,i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x},\ \text{в случае, если } u_{i,j} \geq 0; \tag{8}$$

$$\frac{2q_{1,i,j} + q_{0,i,j}}{3}\frac{c^{n+1}_{i,j} - c^n_{i,j}}{\tau} + 5u_{i+1/2,j}q_{1,i,j}\frac{c^n_{i+1,j} - c^n_{i,j}}{3h_x} + u_{i-1/2,j}\min\left(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}\right)\frac{c^n_{i,j} - c^n_{i-1,j}}{3h_x} +$$
$$+ \frac{2\Delta_x c^n_{i+1,j}q_{1,i,j} + \Delta_x c^n_{i,j}q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i+1/2,j}q_{1,i,j}\frac{c^n_{i+1,j} - c^n_{i,j}}{h_x^2} - 2\mu_{i-1/2,j}q_{2,i,j}\frac{c^n_{i,j} - c^n_{i-1,j}}{h_x^2} -$$
$$-\left|q_{1,i,j} - q_{2,i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x},\ u_{i,j} < 0,\ \text{где } \Delta_x c^n_{i,j} = \frac{c^{n-1/2}_{i,j} - c^{n-1}_{i,j}}{\tau};$$

$$\frac{2q_{4,i,j}+q_{0,i,j}}{3}\frac{c_{i,j}^{n+1}-c_{i,j}^{n+1/2}}{\tau}+5v_{i,j-1/2}q_{4,i,j}\frac{c_{i,j}^{n+1/2}-c_{i,j-1}^{n+1/2}}{3h_y}+v_{i,j+1/2}\min\left(q_{3,i,j},q_{4,i,j}\right)\frac{c_{i,j+1}^{n+1/2}-c_{i,j}^{n+1/2}}{3h_y}+$$

$$+\frac{2\Delta_y c_{i,j-1}^{n}q_{4,i,j}+\Delta_y c_{i,j}^{n}q_{0,i,j}}{3}=2\mu_{i,j+1/2}q_{3,i,j}\frac{c_{i,j+1}^{n}-c_{i,j}^{n}}{h_y^2}-2\mu_{i,j-1/2}q_{4,i,j}\frac{c_{i,j}^{n}-c_{i,j-1}^{n}}{h_y^2}-$$

$$-\left|q_{3,i,j}-q_{4,i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_y c_{i,j}+\beta_y}{h_y},\ v_{i,j}\geq 0; \qquad (9)$$

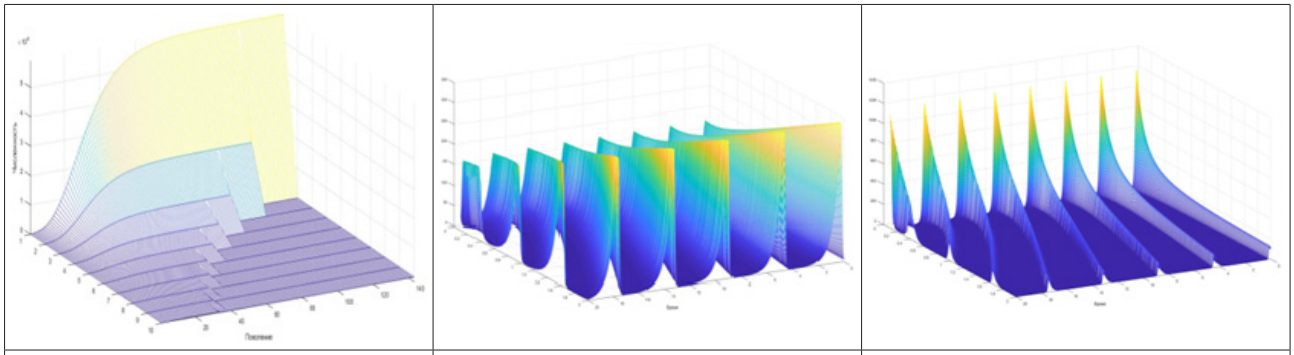
$$\frac{2q_{3,i,j}+q_{0,i,j}}{3}\frac{c_{i,j}^{n+1}-c_{i,j}^{n+1/2}}{\tau}+5v_{i,j+1/2}q_{3,i,j}\frac{c_{i,j+1}^{n+1/2}-c_{i,j}^{n+1/2}}{3h_y}+v_{i,j-1/2}\min\left(q_{3,i,j},q_{4,i,j}\right)\frac{c_{i,j}^{n+1/2}-c_{i,j-1}^{n+1/2}}{3h_y}+$$

$$+\frac{2\Delta_y c_{i,j+1}^{n+1/2}q_{3,i,j}+\Delta_y c_{i,j}^{n+1/2}q_{0,i,j}}{3}=2\mu_{i,j+1/2}q_{3,i,j}\frac{c_{i,j+1}^{n+1/2}-c_{i,j}^{n+1/2}}{h_y^2}-2\mu_{i,j-1/2}q_{4,i,j}\frac{c_{i,j}^{n+1/2}-c_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_y^2}-$$

$$-\left|q_{3,i,j}-q_{4,i,j}\right|\mu_{i,j}\frac{\alpha_y c_{i,j}+\beta_y}{h_y},\ \text{в случае, если } v_{i,j}<0,\ \text{где } \Delta_y c_{i,j}^{n+1/2}=\frac{c_{i,j}^{n}-c_{i,j}^{n-1/2}}{\tau}.$$

3. Результаты численного эксперимента

На рис. 1 представлены результаты работы программного комплекса, ориентированного на многопроцессорную вычислительную систему, при этом разработаны параллельные алгоритмы расчетов для решения рассматриваемой задачи гидробиологии мелководного водоема.



а) *б)* *в)*

Рис. 1. Результаты численного эксперимента: а) колебания численности популяции фитопланктона от характера эволюции в модельной области правильной формы; б), в) колебания численности фитопланктона и биогенного вещества, $f=0{,}1...2{,}0$; временной промежуток $T=20$

На рис. 2, 3 представлены результаты численного эксперимента для задачи гидробиологии Азовского моря (1)–(3).

При создании баз входных данных использовались экспедиционные исследования [17], литературные источники, электронный атлас, подготовленный ЮНЦ РАН, Экологический атлас Черного и Азовского морей.

Заключение

Разработана и численно реализована математическая модель распространения загрязняющих веществ, в том числе и микрочастиц пластиковых отходов, базовые виды планктона в мелководном водоеме на примере мелководного водоема. Снижение погрешности решения

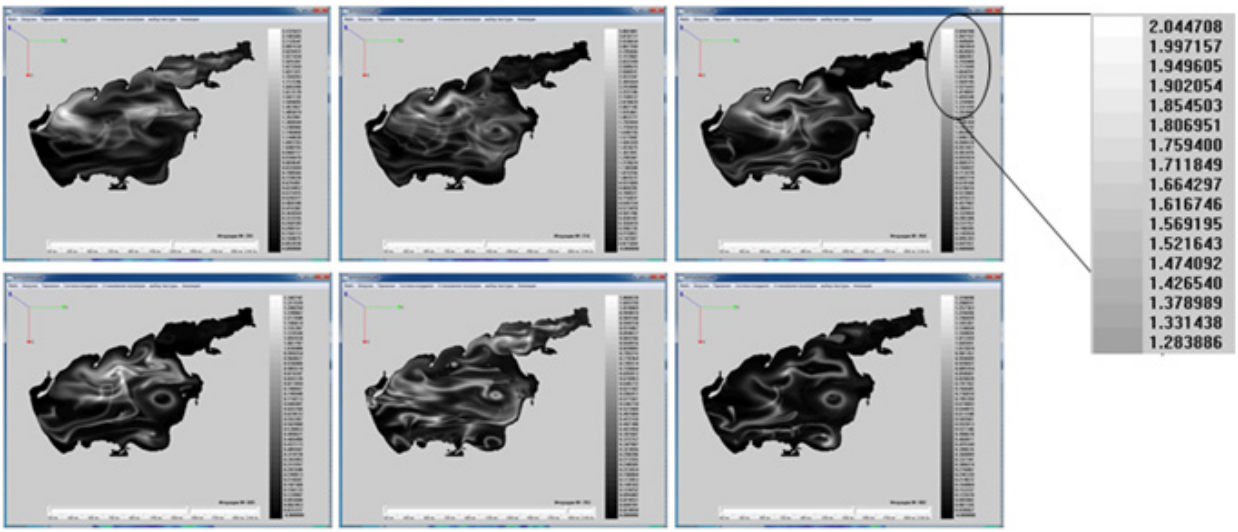


Рис. 2. Распределение концентрации фитопланктона

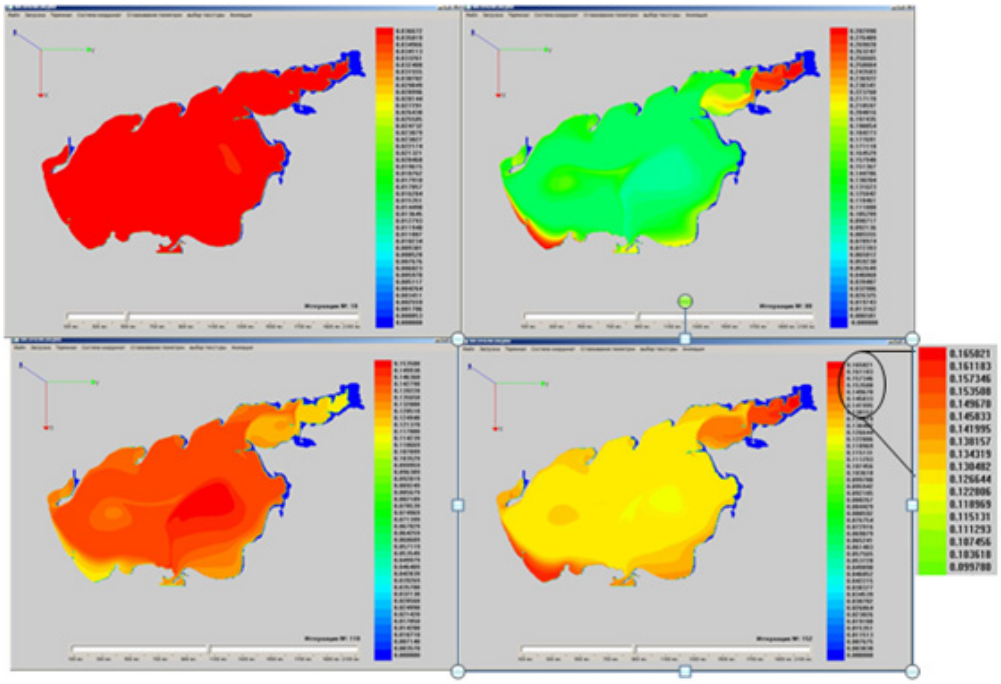


Рис. 3. Распределение концентрации загрязняющего вещества

поставленной задачи в расчетной области сложной формы удалось добиться при ее дискретизации на основе метода частичной заполненности расчетных ячеек и комбинации разностных схем «крест» и «кабаре». Использование этих схем при дискретизации модели позволило существенно повысить точность моделирования.

Программно-аналитические исследования, проведенные с использованием предложенной и численно реализованной задачи транспорта загрязняющих веществ с учетом внезапной депрессии наиболее активно распространяющихся видов планктона и промысловых рыб показали адекватность и работоспособность построенной в данной работе математической модели, интегрированной в программный комплекс, что позволяет использовать его при планировании прогностических расчетов определения качества вод в различные периоды времени. Разработка эффективных параллельных алгоритмов численной реализации поставленной задачи биологической кинетики позволила изучать биологическую кинетику планктонных популяций, а также строить краткосрочные и долгосрочные прогнозы устойчивого развития

гидробиоценозов водоемов при загрязнении их токсичными веществами и пластиковым мусором. Разработанное экспериментальное программное обеспечение ориентировано на многопроцессорные вычислительные системы, что позволяет выполнять прогностические расчеты возможных сценариев развития эвтрофированных водоемов при возникновении в них опасных природных и техногенных явлений в ускоренном режиме времени.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №21-71-20050)

Литература

1. *Тютюнов Ю. В.* Микромасштабная пятнистость распределения веслоногих рачков как результат трофически-обусловленных миграций / Ю. В.Тютюнов, А. Д. Загребнева, Ф. А. Сурков, А. И. Азовский // Океанология. – 2010. – Т. 50, № 1. – С. 72–81.

2. *Белова Ю. В.* Применение методов усвоения данных наблюдений для моделирования распространения загрязняющих веществ в водоеме и управления устойчивым развитием / Ю. В. Белова, А. В. Никитина // Безопасность техногенных и природных систем. – 2024. – Т. 8, № 3. – С. 39–48.

3. *Четверушкин Б. Н.* Кинетические модели для решения задач механики сплошной среды на суперкомпьютерах / Б. Н. Четверушкин // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27, № 5. – С. 65–79.

4. *Сухинов А. И.* Регуляризованная разностная схема для решения задач гидродинамики / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, И. Ю. Кузнецова, А. М. Атаян, А. В. Никитина // Математическое моделирование. – 2022. – Т. 34, № 2. – С 85–100.

5. *Белоцерковский О. М.* Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. М. Белоцерковский, В. А. Гущин, В. В. Щенников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1975. – Т. 15, № 1. – С. 197–207.

6. *Chistyakov A. E.* Investigation of the Approximation Error of the Difference Scheme for the Mathematical Model of Hydrodynamics / A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, I. Y. Kuznetsova, E. O. Rakhimbaeva, M. V. Porksheyan // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, No 5. – P. 1839–1846.

7. *Sukhinov A. I.* Mathematical modeling of eutrophication processes in shallow waters on multiprocessor computer system / A. I. Sukhinov, A. V. Nikitina, A. E. Chistyakov, I. S. Semenov, A. A. Semenyakina, D. S. Khachunts // В сборнике: PCT 2016 Parallel Computing Technologies. Proceedings of the 10th Annual International Scientific Conference on Parallel Computing Technologies. – 2016. – С. 320–333.

8. *Sukhinov A.* Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the dynamics of biogeochemical cycles in coastal systems problem / A. Sukhinov, Y. Belova, A. Nikitina, V. Sidoryakina // Mathematics. – 2022. – Т. 10, № 12.

9. *Chistyakov A. E.* A differential game model of preventing fish kills in shallow waterbodies / A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, G. A. Ougolnitsky, M.V. Puchkin, I.S. Semenov, A. I. Sukhinov, A. B. Usov // Game Theory and Applications. – 2015. – Т. 17. – С. 37-48.

10. *Sukhinov A.* Complex of models, high-resolution schemes and programs for the predictive modeling of suffocation in shallow waters / A. Sukhinov, A. Chistyakov, A. Isayev, A. Nikitina, V. Sumbaev, A. Semenyakina // Communications in Computer and Information Science. – 2017. – Т. 753. – С. 169–185.

11. *Сухинов А. И.* Обработка данных натурных измерений экспедиционных исследований для математического моделирования гидродинамических процессов Азовского моря / А. И. Сухинов, А. М. Атаян, Ю. В. Белова, В. Н. Литвинов, А. В. Никитина, А. Е. Чистяков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2020. – Т. 13, № 2. – С. 161–174.

12. *Сухинов А. И.* Математическое моделирование процессов эвтрофикации в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе / А. И. Сухинов, А. В. Никитина, А. Е. Чистяков, И. С. Семенов, А. А. Семенякина, Д. С. Хачунц // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. – 2016. – Т. 5, № 3. – С. 36–53.

13. *Sukhinov A. I.* The use of supercomputer technologies for predictive modeling of pollutant transport in boundary layers of the atmosphere and water bodies / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, A. V. Nikitina, T. V. Lyashchenko, A. A. Filina, V. N. Litvinov // Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Т. 1063. – С. 225–241.

14. *Самарский А. А.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва : URSS, 2009. – 248 с.

15. *Вабищевич П. Н.* Явно-неявные схемы для задач конвекции-диффузии-реакции / П. Н. Вабищевич, М. В. Васильева // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 359–369.

16. *Самарский А. А.* Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – Москва : Наука, 1978. – 592 с.

17. *Литвинов В. Н.* Математическое моделирование гидродинамических процессов Азовского моря на многопроцессорной вычислительной системе / В. Н. Литвинов, А. Е. Чистяков, А. В. Никитина, А. М. Атаян, И. Ю. Кузнецова // Компьютерные исследования и моделирование. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 647–672.

УДК 624.154.5

ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАТЕРИАЛОВ ПРИМЕНЯЕМЫХ В МОСТОСТРОИТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ НА ДИАПАЗОНЕ РАБОЧИХ ТЕМПЕРАТУР

Ю. О. Носов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Аннотация. В рамках работы проведено экспериментальное и численное исследование набора функциональных материалов применяемых в мостостроительной деятельности. Для построения качественного аналога реальной конструкции необходимо основательно подходить к описанию математических моделей материалов, которые могут зависеть от различных параметров. В рамках исследования создана численная процедура, которая в автоматизированном режиме описывает поведение антифрикционных полимерных материалов и смазок. Для описания полимеров выбрано тело Максвелла на основе рядов Прони. Представленная модель позволяет описать термовязкоупругое поведение материала, что позволяет проводить численное исследование конструкции на широком диапазоне рабочих температур. Для описания математической модели набора смазочных материалов используется модель Ананд. В отличии от рядов Прони, представленная модель позволяет дополнительно учесть пластическое поведение материала. Выполнена верификация выбранных математических моделей с экспериментальным исследованием, получены качественные и количественные закономерности поведения материалов.
Ключевые слова: антифрикционный полимерный материал, смазочный материал, температура, ряды Прони, модель Ананд, вязкоупругость, вязкоупругопластичность.

Введение

Транспортно-логистические системы являются важной отраслью современной инфраструктуры РФ. При этом активное развитие общества приводит к увеличению на мостовые сооружения, что в свою очередь приводит к снижению долговечности работы конструкции а в последствии увеличение затрат на ее обслуживание [1]. Согласно [2] срок службы элементов мостового сооружения должны составлять не менее 25 лет, с учетом переменной температурной и механической нагрузки. Опорные части пролетных строений мостов [3] относятся к ответственным элементам мостовых сооружений и воспринимают вертикальные и горизонтальные нагрузки от мостового пролета, а так же поглощают тепловое расширение и сжатие. При этом выход из строя элемента приведет к значительным временным и экономическим затратам. Следовательно, к материалам, применяемых в опорных частях мостовых сооружения, предъявляют повышенные требования по качеству, долговечности и прочности. Среди таких материалов встречаются: сверхвысокомалекеулярные полиэтилены [4], фторопласты и их модификации и др [5]. При этом в настоящее время активно развивается область материаловедения и создания новых типов материалов, что может привести к модернизации конструкции, а в следствии к увеличению ее долговечности. Но процесс модификации конструкции является экономически невыгодным, вследствие чего многие производители отказываются от модернизации собственных продуктов.

Для минимизации экономических и временных затрат активно применяются методы компьютерного инжиниринга [6, 7]. Итогом, работы которого, является качественный численный аналог конструкции, на котором можно проводить эксперименты, и проводить модификацию конструкции не создавая ее реального прототипа, вследствие чего, можно получить качественные закономерности поведения элемента сооружения и уже на этапе проектирования

принять решение по использованию нового вида материала в конструкции. Но для создания численного аналога конструкции необходимо основательно подходить к описанию математических моделей поведения материалов, для минимизации погрешности с реальным объектом. Качественное описание материалов позволяет предсказать поведение элемента конструкции не только на малом временном диапазоне, но и на всем жизненном цикле, а так же при различных термоцикловых воздействиях.

В рамках работы представлены основные этапы идентификации математических моделей поведения набора материалов, применяемых в мостостроительных сооружениях в целом и опорной части в частности. Реализация программного комплекса выполнена на языке APDL в ANSYS Mechanical с использованием итерационных алгоритмов идентификации на основе Python.

1. Экспериментальное исследование

В рамках работы проведено экспериментальное исследование на базе лаборатории пластмасс ФГАОУ ВО ПНИПУ [8]. В качестве объекта исследования среди полимерных материалов выбран гамма-модифицированный фторопласт-4, который обладает увеличенными антифрикционными свойствами по сравнению с аналогами. Для определения вязкоупругих характеристик был проведен эксперимент Dynamic Mechanical Analysis (DMA) на анализаторе TA Instruments Q800. Эксперимент проводился на диапазоне рабочих температур от –40 до +80 градусов с шагом охлаждения 2 градуса в минуту и частотой воздействия 2 Гц. На рис. 1. Представлена зависимость компонент модуля упругости для гамма-модифицированного фторолпаста-4.

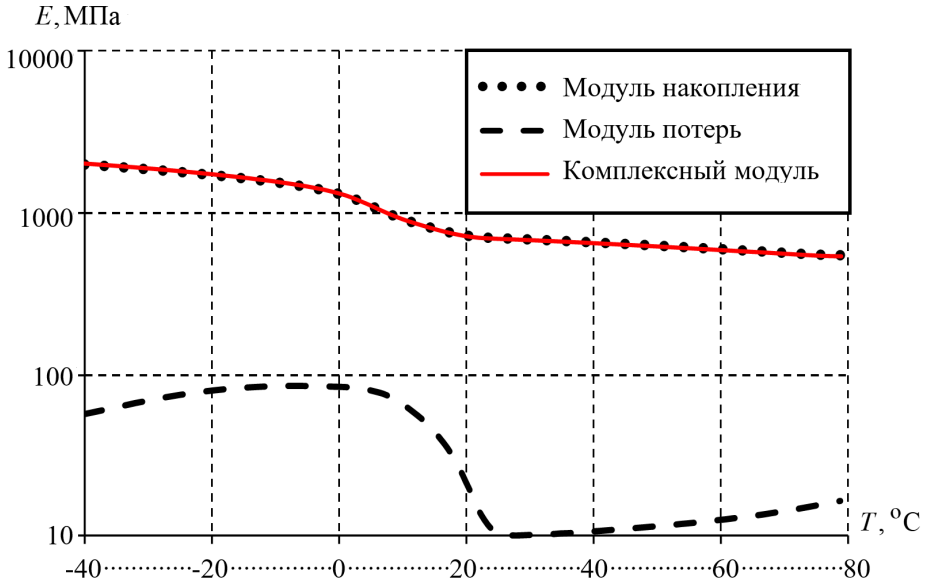


Рис. 1. Распределение компонент модуля упругости модифицированного фторопласта-4

Модуль потерь имеет незначительный уровень по сравнению с модулем накопления, следовательно, вязкая составляющая материала незначительна, по сравнению с упругой. Следовательно, полимерный материал можно описывать рядами Прони.

Вторым объектом исследования является смазочный материал. Смазочный материал обладает характеристиками как твердого так и жидкого тела. Поэтому на первом этапе исследования необходимо оценить в рамках, какой теории можно описывать материал. Для этого на ротационном вискозиметре Discovery HR2 проведено экспериментальное исследование компонент модуля сдвига для смазочных материалов ЦИАТИМ-221 (рис. 2а) и ЦИАТИМ-221F (рис. 2б), которые широко используются в мостостроительной деятельности.

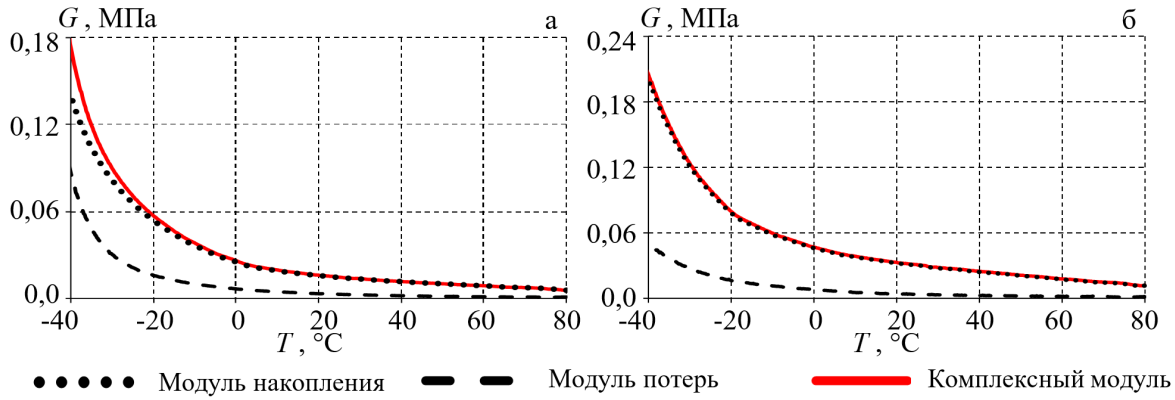


Рис. 2. Распределение компонент модуля сдвига набора смазочных материалов: а) ЦИАТИМ-221; б) ЦИАТИМ-221F

Согласно [9] если модуль потерь на всем диапазоне температур ниже модуля накопления, стоит описывать материал в рамках механики деформируемого твердого тела. Следовательно, для дальнейшего описания математической модели поведения смазочных материалов будем использовать математические модели для твердых тел, например модель Ананд.

2. Идентификации математических моделей поведения материалов

Для описания поведения смазочного материала выбрана вязкоупругая модель Максвелла, которая реализуется с помощью рядов Prony [10]:

$$\sigma(t)=\int_0^t 2\left[G_\infty+G_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\exp\left(-\frac{t-\tau}{\beta_i'}\right)\right]d\varepsilon(\tau), \tag{1}$$

где G_0 — модуль сдвига при $t=0$; n — количество рядов Prony; τ — время релаксации; α_i — коэффициенты сдвигового модуля; $\beta_i'=\dfrac{\beta_i}{A(t)}$ — приведенное время; $A(t)$ — функция сдвига.

Для описания зависимости времени от температуры модели используется температурно-временная аналогия:

$$A(t)=\frac{C_1(T-T_r)}{C_2+(T-T_r)}, \tag{2}$$

где T — текущая температура, T_r — постоянная базовая температура, C_1, C_2 — эмпирические постоянные для материала.

Зависимость сдвигового модуля от времени релаксации при использовании модели Prony:

$$G(t)=G_0\left[\alpha_\infty+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\exp\left(-\frac{t}{\beta_i'}\right)\right]. \tag{3}$$

Неизвестные коэффициенты:

$$\overline{x}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_N,C_1,C_2,C_3\}. \tag{4}$$

Для описания набора смазок используется модель Ананд, которая ранее использовалась для описания течения расплавов металлов, но со временем многие ученые [11, 12] начали использовать модель для описания вязкоупругопластического поведения полимеров, смазок и др.

Связь деформации и напряжения данной модели имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}_v=A\exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)\left[\sinh\left(\frac{\sigma\xi}{S}\right)\right]^{\frac{1}{m}}, \tag{5}$$

где A, ξ, m — константы для материала; Q — энергия активации материала; R — универсальная газовая постоянная; S — сопротивление деформации материала. При этом модель включает в себя эволюционное уравнения для сопротивления деформации:

$$\dot{S} = \left\{ h_0 \left(|B| \right)^a \frac{B}{|B|} \right\} \dot{\varepsilon}_v, \tag{6}$$

где h_0 — константа размягчения; $B = 1 - S/S^*$, S^* — коэффициент сопротивления деформации; a — скорость чувствительности сопротивления деформации. Неизвестные коэффициенты для модели Ананд имеют вид:

$$\overline{x} = \left\{ A, \frac{Q}{R}, \xi, S_0, h_0, S^*, n, m, a \right\}. \tag{7}$$

Поиск неизвестных выполняется при помощи многопараметрической оптимизации методом Нелдера-Мида. Функционал нелинейной оптимизации:

$$\Phi\left(X\right) = \left\| \frac{K'_g - K'_f\left(\overline{x}\right)}{K'_g} \right\| \to \min, \tag{8}$$

где K'_g — экспериментальные данные; $K'_f(\overline{x})$ — численные данные.

В качестве примеры работы процедуры на рис. 3 представлено распределение коэффициентов сдвигового модуля от времен релаксации для модифицированного фторопласта.

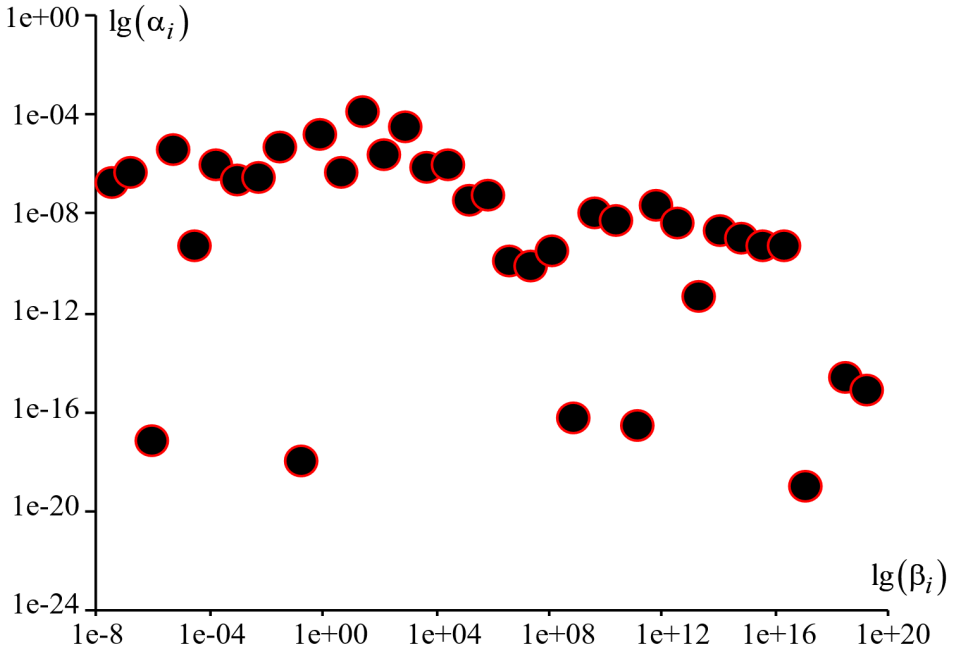


Рис. 3. Параметры ряда Prony для модифицированного фторопласта

Численная процедура [13] проводит поиск неизвестных параметров и останавливается при достижении погрешности менее 5 %. Что позволяет качественно и количественно описать широкий набор материалов.

Заключение

В рамках работы приведено экспериментальное исследование и построены математические модели поведения полимерного материала и набора смазок. Так же установлено:

– вязкоупругое поведение рассмотренного полимерного материала необходимо описывать рядами Прони;

– вязкоупругопластическое поведение набора смазочных материалов необходимо описывать моделью Ананд;

Получены качественные и количественные закономерности погрешности между натурным экспериментов и численной реализацией.

Благодарности

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0007).

Литература

1. *Blinkin M., Koncheva E.* Transport Systems of Russian Cities: Ongoing Transformations. – Switzerland : Springer, 2016. – 299 p.

2. СП 46.13330.2012 Мосты и трубы. Актуализированная редакция СНиП 3.06.04-91 (с изменением № 1): утвержден приказом Министерства регионального развития Российской Федерации (Минрегион России) от 29 декабря 2011 г. N 635 и введен в действие с 01 января 2013 г. Зарегистрирован Федеральным агентством по техническому регулированию и метрологии (Росстандарт). Пересмотр СП 46.13330.2010 «СНиП 3.06.04-91 Мосты и трубы».

3. *Bogdanova A. P., Kamenskikh A. A., Nosov Y. O.* The Geometric Configuration of Lubricant Recesses of the Polymer Sliding Layer of the Bearing // Designs. – 2023. – V.7, No 144. https://doi.org/10.3390/designs7060144.

4. *Шидловский Т. Д., Цыганков М. М., Зимарев И. В.* Методы обработки полимерных поверхностей для повышения адгезионной прочности // Современные тенденции развития химической технологии, промышленной экологии и экологической безопасности : Материалы V Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 190-летию Д. И. Менделеева, Санкт-Петербург, 11–12 апреля 2024 года. – С. 148–150.

5. *Адамов А. А., Носов Ю. О., Каменских А. А.* Идентификация математической модели поведения антифрикционных полимерных материалов // Научно-технический вестник Поволжья. – 2018. – № 12. – С. 49–51.

6. Проектирование CAD-моделей для расчета значений термического напряжения / Н. В. Трапезников, А. А. Шумков, Е. В. Матыгуллина, Т. Р. Абляз // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. – 2018. – Т. 20, № 2. – С. 55–61.

7. *Лесникова Ю. И., Каменских А. А.* Анализ влияния характера сопряжения оптического волокна и полимерного покрытия на работоспособность системы волокно-катушка // Научно-технический вестник Поволжья. – 2023. – № 11. – С. 99–102.

8. *Корелин А. А., Труфанова Н. М.* Анализ влияния кинетических и теплофизических характеристик полиэтилена при моделировании процесса пероксидной сшивки изоляции // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2024. – № 50. – С. 5–22.

9. *Barnes A. H.* A Handbook of Elementary Rheology. University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2000. – 200 p.

10. *Сметанников О. Ю., Самусев И. В.* Экспериментальная идентификация параметров определяющих соотношений для фотополимерного композита // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 105–116.

11. *Gharaibeh M. A., Feisst M., Wilde J.* Anand constitutive modeling of multilayer Silver-Tin transient liquid phase foils using tensile and creep testing // Soldering & Surface Mount Technology. – 2024. – Vol. 36(2). – P. 132–143. – https://doi.org/10.1108/SSMT-10-2023-0061.

12. *Xu Y., Wang X., Wang X. [et al.]* The prediction method for the saturation stress of materials used in the Anand model parameters identification // J Mech Sci Technol 3. – 2024. – Vol. 8. – P. 1775–1787. – https://doi.org/10.1007/s12206-024-0312-9.

13. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023618695 Российская Федерация. Идентификация математической модели вязкоупругого поведения тела Максвелла на основе рядов Прони: № 2023617843: заявл. 27.04.2023: опубл. 27.04.2023 / А. А. Каменских, Ю. О. Носов; заявитель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

УДК 51

ОЦЕНКА ИЗМЕНЧИВОСТИ МОДУЛЯ ДЕФОРМАЦИИ ГРУНТА НА ОСНОВЕ ДАННЫХ CPT

Нуне Тигабу Абера

Университет Вачемо, Осанна, Эфиопия
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

Аннотация. Деформация почвы была решающим фактором при проектировании и строительстве инфраструктуры. Это оказало существенное влияние на устойчивость и работоспособность конструкций. Особое внимание было уделено использованию описательной статистики при анализе данных CPT, особенно для характеристики изменчивости *qc* и других свойств почвы. Изменения *qc* и *E* глубиной, отражающие изменения плотности почвы, ее слоистости и уровня стресса. Точная оценка изменчивости деформации грунта была необходима для обеспечения безопасности и надежности грунта.
Ключевые слова: статистическое распределение, проверка гипотез, критерий Хи-Квадрат, данные CPT.

Введение

Проектирование инженерно-геологических проектов, основанное на надежности, требует глубокого понимания изменчивости грунта, которую можно смоделировать как случайное поле, характеризующееся функцией плотности вероятности (PDF) с ее статистикой (среднее и стандартное отклонение) [1].

Точная оценка изменчивости деформаций грунта имела важное значение для обеспечения безопасности и надежности. Одним из подходов к оценке деформации почвы было использование данных конусного пенетрационного тестирования (CPT), которые предоставляют информацию о физических свойствах почвы и должны были сделать вывод о ее характеристиках деформации [3].

Испытание на проникновение конуса (CPT) было широко используемым методом полевых исследований, который обеспечивает непрерывный профиль физических свойств почвы, таких как сопротивление наконечника, трение втулки и давление поровой воды. Целью этих измерений была оценка прочности, жесткости и сжимаемости грунта, которые являются ключевыми параметрами для определения его деформационного поведения [4].

Понимание изменения сопротивления конуса qc и E с глубиной имело решающее значение в геотехнической инженерии, поскольку оно дает представление о прочности и жесткости грунта. Проверка гипотез предлагает статистическую основу для оценки наличия статистически значимой связи между qc и E глубиной и глубиной, указывающей на наличие неоднородности в профиле почвы [5]. Статистическая проверка гипотез представляла собой формальную проверку гипотез, которая сравнивала статистические свойства (например, среднее значение, стандартное отклонение) данных CPT из разных слоев почвы или мест для оценки потенциальных различий и неоднородности. Модель распределения Вейбулла может помочь понять диапазон значений, ожидаемых на разных глубинах, и дать представление о неопределенности, связанной с характеристиками почвы [6].

Изменения, зависящие от глубины

Ожидаемые изменения qc и E с глубиной, отражающей изменения плотности почвы, ее слоистости и уровней напряжения. Изменения Fs и u может свидетельствовать об изменениях в структуре почвы, состоянии грунтовых вод и их влиянии на деформации.

Описательная статистика

Проведите статистический анализ для количественной оценки изменчивости параметров деформации грунта в пределах каждого сегмента глубины. Рассчитайте описательные статистические данные, такие как среднее значение, стандартное отклонение и меры формы распределения (асимметрия, эксцесс), чтобы понять распределение данных на различной глубине. Понимание статистического распределения этих коэффициентов имеет решающее значение для интерпретации поведения и изменчивости случайного процесса.

Таблица 1

Толщина (мм)	5	10	15	20	25	30	--	4958	4963	4968
Среднее	1,92	2,14	2,30	2,43	2,54	2,60	----	2,47	2,467	2.469
St.D	2,9	3,1	3,2	3,3	3,47	3.54	----	0,36	0,37	0,37

Стандартное отклонение обеспечивает меру изменчивости значений qcвокруг среднего значения, а более высокое стандартное отклонение указывает на большую изменчивость прочности грунта. В приведенном выше расчете мы увидели стандартное отклонение для разных интервалов глубины в данных CPT, чтобы понять, как изменчивость прочности грунта меняется с глубиной.

Данные визуализации

Визуализация пространственного распределения модуля деформации может помочь определить области с высокими или низкими значениями модуля деформации и визуально продемонстрировать статистическую неоднородность по исследуемой территории. Пространственное распределение и изменчивость свойств почвы по данным CPT

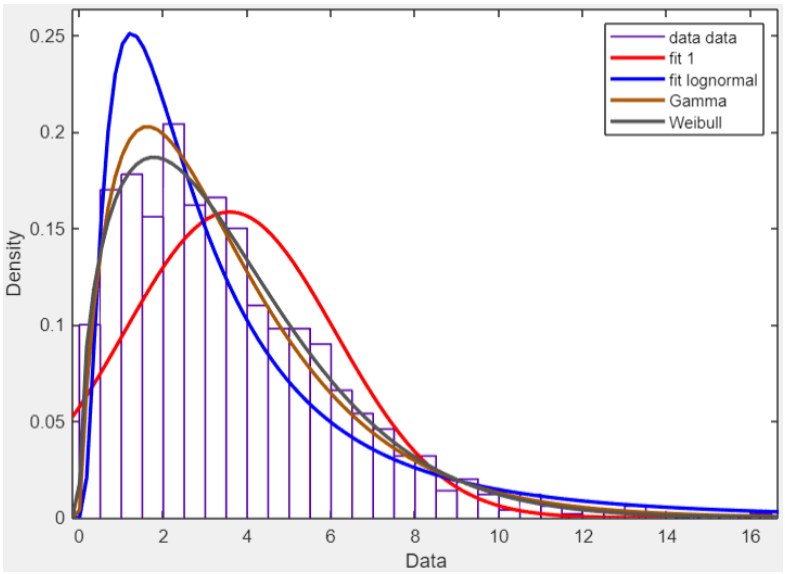


Рис. 1. Гистограмма и график плотности: визуально оцените, напоминают ли данные колоколообразную кривую. На каждой глубине (мм)

Мы видим на рис. 1, что распределение Вейбулла соответствует данным, а на рис. 2 точки лежат преимущественно вдоль прямой диагональной линии с небольшими отклонениями вдоль каждого из хвостов. На основании этих графиков был сделан вывод, что этот набор данных был распределен по Вейбуллу.

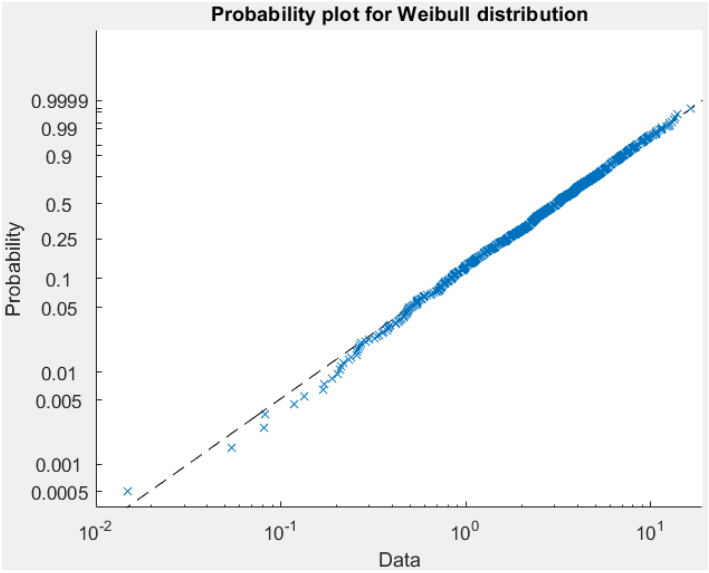


Рис. 2. Вероятность распределения Вейбулла

Распределение Вейбулла

Остановимся подробнее на распределении Вейбулла, которое в настоящее время широко используется при моделировании различных объектов промышленного машиностроения, теории надежности, гидрологии и так далее. Плотность распределения Вейбулла была трехпараметрической.

$$f(x)=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)^{\beta}\right\};x\geq\mu;\beta,\alpha>0 \qquad (1)$$

где $\beta=0.8442765144662296$ — параметр формы, $\alpha=2.3967200567202163$ — параметр масштаба, $\mu=0$ — параметр сдвига (положения).

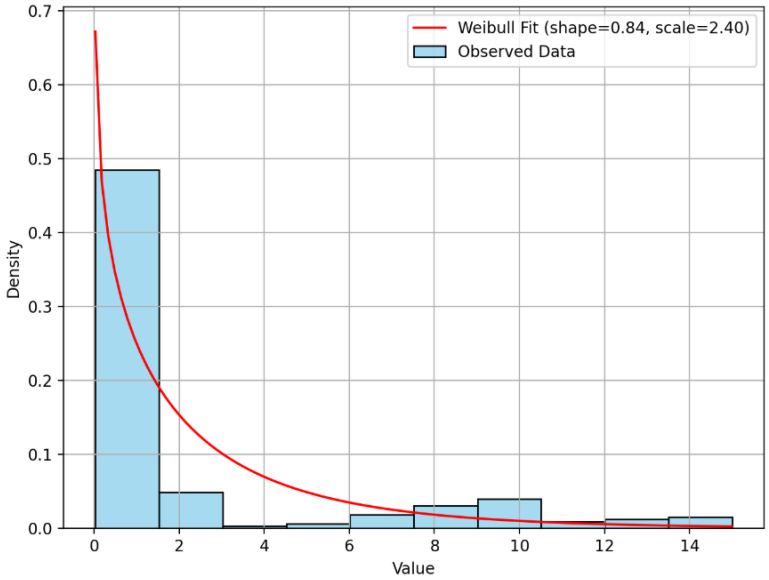


Рис. 3. Плотность Вейбулла в зависимости от значения данных

Используя эту таблицу, отклоните нулевую гипотезу. Имелись существенные доказательства различий между средствами. Делаем вывод, что они имеют астатическую разницу в данных. Использование программного обеспечения Python. Если значение p теста было меньше

Таблица 2

Результаты проверки гипотез

Толщина(м)-(слои)	Статистика результатов, Т-тест:
(0,5 м)	Статистика: -3,30, значение *P*: 0,001.
(1м)	Статистика: -3,488, значение *P*: 0,001.
(1,5 м)	Статистика: 4,750, значение *P*: 0,000.
(2м)	Статистика: 2,284, значение *P*: 0,023.
(2,5 м)	Статистика: 2560, П- значение: 0,011
(3м)	Статистика: 3,244, значение *P*: 0,001.
(3,5 м)	Статистика: -2,00, значение *P*: 0,046.
4(м)	Статистика: 0,630, значение *P*: 0,025.
(4,5 м)	Статистика: 2,560, значение *P*: 0,011.
(5м)	Статистика: 1,060, значение *P*: 0,290.

определенного уровня значимости (например, $\alpha = 0.05$), то у вас есть достаточно доказательств, чтобы сказать, что данные не были распределены нормально. Используя эти три теста, мы пришли к выводу, что модуль деформации меняется с увеличением глубины при постоянной нагрузке.

Статистика данных хи-квадрат

Статистика хи-квадрат обычно использовалась для оценки соответствия модели или распределения набору наблюдаемых данных. В контексте сравнения соответствия двух моделей распределения, таких как распределение Вейбулла и логнормальное распределение, мы можем вычислить статистику хи-квадрат следующим образом:

$$x^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad (2)$$

где O_i — наблюдаемое значение и E_i — ожидаемое значение. Поэтому, используя код Jupiter notebook Python, можно сравнить их соответствие данным.

Статистика хи-квадрат: 452048,05439786875, значение P: 0,0012, степени свободы: 227997. Отклонить нулевую гипотезу. Между переменными существует статистически значимая связь.

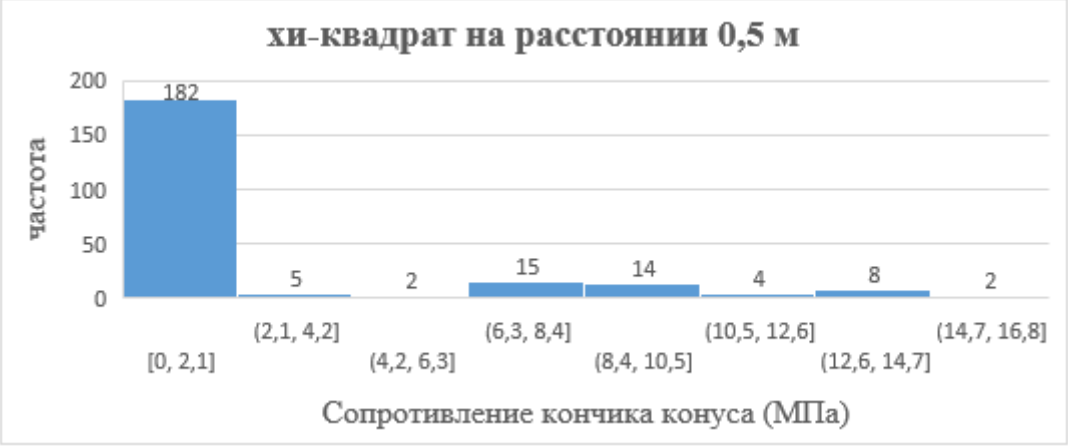


Рис. 4. Гистограмма распределения частот по хи-квадрату при толщине 0,5 м

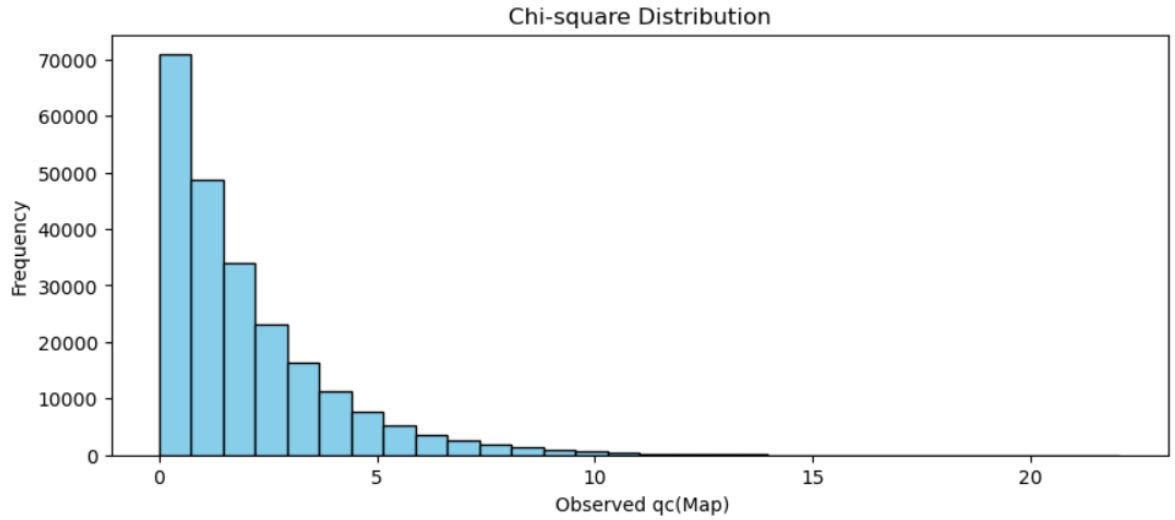


Рис. 5. Гистограмма распределения частот хи-квадрат толщиной 5 м

Заключение

На модуль деформации повлияла неоднородность деформации грунта в каждом слое. Связь между характеристиками деформации грунта и глубиной. Оцените неопределенность, связанную с расчетными значениями модуля грунта и пространственными закономерностями, выявленными в результате анализа.

Оценка надежности прогноза модуля деформации на основе модели распределения Вейбулла, полученные на основе гетерогенных данных CPT- зондирования, имели решающее значение для точного геотехнического проектирования и анализа. Когда слои увеличивают деформацию, модуль уменьшается, что означает низкую деформацию и почти нормальное распределение.

Литература

1. *Фунг К. К., Хуанг С.* Критический обзор анализа надежности инженерно-геологических задач // Компьютеры и геотехническая инженерия. – 2008. – 35(6). P. 828–848.

2. *Ванмарк Э. Х.* Случайные поля: анализ и синтез. – Кембридж, Массачусетс : MIT Press, 1983.

3. Профессор, доктор ир. Абдул Хаким, MT Практика анализа белков. 2020. – P. 16–23 https://www.researchgate.net/publication/344000193

4. *Чжан Дж., Литтон Р. Л.* Геостатистический анализ пространственной изменчивости свойств почв // Канадский журнал геотехнической инженерии. – 2003. – 40 (3). – P. 517–531.

5. *Фентон Джорджия, и Гриффитс Д. В.* Вероятностные методы геотехнического проектирования. Тейлор и Фрэнсис. – 2003.

УДК 62-1/-9

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ФЛАНЦЕВЫХ СОЕДИНЕНИЙ ВЫСОКОВАКУУМНЫХ СИСТЕМ

О. В. Опалихина, М. А. Желавский

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Аннотация. В работе представлена методика расчета на прочность и жесткость фланцевых соединений, входящих в состав высоковакуумных систем. Приводятся результаты моделирования изменения технического состояния системы при внезапном изменении условий нагружения и нарушении целостности вакуумного уплотнения при наличии неравномерного распределения температуры и монтажных напряжений. Даны рекомендации по использованию материалов уплотнения, расчету и конструированию фланцев и элементов креплений с учетом возможного частичного раскрытия соединения.
Ключевые слова: геометрическое подобие, числа подобия, высоковакуумная система, прочность, жесткость, модель пластины, вакуумное уплотнение.

Введение

Высоковакуумные системы различного типа нашли широкое применение в аэрокосмической, энергетической и машиностроительной отраслях, в ускорительной технике и ядерной медицине. Особенностью высоковакуумных систем являются повышенные требования к надежности соединения деталей и узлов. В высоковакуумной технике часто используются фланцевые соединения. Методы расчета и конструирования фланцевых соединений основаны на теории подобия [1]. В этом случае подробный расчет на прочность по теории упругости не выполняется. Такой подход к расчету и конструированию фланцевых соединений требует сравнительного анализа большого объема данных, полученных при испытаниях новой техники. Оценка результатов измерений в кратчайший срок не всегда представляется возможной. Часто бывает необходимо конструировать нестандартные фланцы, форма и размеры которых задаются разработчиком. Результаты испытаний показали, что основными проблемами, возникающими при работе изделия, являются частичное раскрытие фланцевого соединения при внезапном изменении условий нагружения и нарушении целостности вакуумного уплотнения. Цель работы заключается в моделировании изменения технического состояния высоковакуумной системы при внезапном изменении условий нагружения и нарушении целостности вакуумного уплотнения. При моделировании учитываются неравномерность распределения температуры и монтажные напряжения, возникающие в элементах фланцевого соединения.

1. Постановка задачи

В высоковакуумных системах используются разъемные фланцевые соединения с приварными встык фланцами, с плоскими приварными фланцами (рис. 1), а также со свободными фланцами, содержащими свободные кольца [1]. К сварному шву предъявляют особые требования, учитывающие режим работы изделия [2]. Существующая нормативно-техническая документация в полной мере позволяет рассчитать сварные соединения на прочность и выполнить сварку.



Рис. 1. Сварное соединение

Разъемные фланцевые соединения высоковакуумных систем включают в себя, помимо стыкуемых деталей, вакуумное уплотнение. Такое уплотнение обычно изготавливается из подготовленной резины и устанавливается в расточенную канавку на сопрягаемой детали. Для более точного выравнивания одного узла системы относительно другого применяются уплотнения с внутренним центрирующим кольцом, изготавливаемым из сталей, сплавов цветных металлов или полимерных пластмасс с учетом необходимости электрической изоляции одного узла системы относительно другого. Такие уплотнения могут закрепляться с помощью фланцевых (рис. 2) и бугельных (рис. 3) соединений [1].

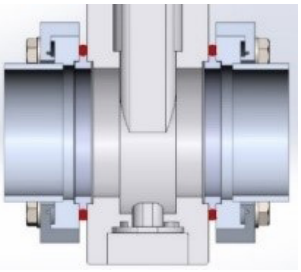


Рис. 2. Подключение вакуумного затвора в системе с резиновым уплотнением с центрирующим кольцом

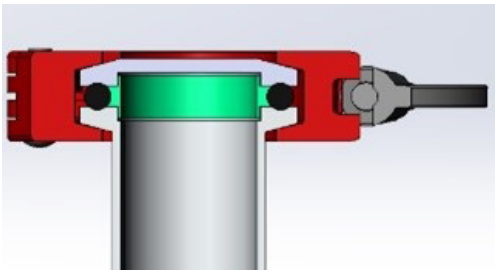


Рис. 3. Бугельное соединение патрубка и глухого фланца типа ISO-KF с центрирующим уплотнением

Фланцевые соединения применяют в высоковакуумных системах различных диаметров. Бугельные соединения используют в высоковакуумных системах малых диаметров (от 10 до 63 мм) [1]. В работе рассматривается фланцевое соединение среднего диаметра (внутренний проход 63 мм). Регламентом технического обслуживания изделия не предусмотрены частые разборки его узлов. Поэтому выбирается соединение, передающее всю нагрузку болтов на вакуумное уплотнение. Конструктивно соединение выполняется цельным либо с плоскими приварными фланцами [2]. Фланцевые соединения со свободными кольцами при работе в высоковакуумной среде имеют меньшую прочность [1, 3]. Подробные расчеты на прочность, жесткость и герметичность фланцевых соединений приведены в нормативно-технической документации [2, 4]. Причины возникновения монтажных напряжений при наличии технологических погрешностей и локальных дефектов поверхности, а также перепады температур в полной мере не рассмотрены. В нормативно-технической документации не описана работа фланцевых соединений при внезапных изменениях условий нагружения. Акцент делается на статическое и опасное малоцикловое нагружение. В то же время указанные факторы могут повлиять на изменение углового положения элементов фланцевого соединения и привести к его частичному раскрытию. В работе исследуются причины, приводящие к частичному раскрытию фланцевого соединения и нарушению целостности вакуумного уплотнения.

2. Работа в высоком вакууме

Высоковакуумная среда характеризуется давлением до 10^{-9} Торр $\approx 1.3332 \cdot 10^{-7}$ Па. При расчете фланцевых соединений учитываются следующие виды нагрузки: внутреннее или наружное давление, усилие затяжки болтов, внешняя осевая сила, а также внешний изгибающий момент [2]. Будем считать, что в условиях эксплуатации усилиями, сдвигающими элементы соединения в стыке, болтовое соединение не нагружено.

Рассчитаем равнодействующую нагрузку $Q_д$ от давления рабочей среды p на площадь, ограниченную средним диаметром эффективной площади вакуумного уплотнения

$$Q_д \approx 0,785 D_{сп}^2 p, \qquad (1)$$

где $D_{сп}$ — средний диаметр эффективной площади вакуумного уплотнения, мм, p, МПа; $Q_д$, Н.

В формулу (1) входит диаметр $D_{\text{сп}}$, рассчитываемый как

$$D_{\text{сп}} \approx D_{\text{к}}^{\text{внутр}} + \frac{h}{2}, \quad h = 1,2b, \tag{2}$$

где $D_{\text{к}}^{\text{внутр}}$ — внутренний диаметр уплотнительного кольца, мм; h — ширина уплотнительной канавки; b — толщина уплотнительного кольца.

Герметичность фланцевого соединения зависит от усилий $Q_{\text{гп}}$, действующих на вакуумное уплотнение в рабочем режиме:

$$Q_{\text{гп}} \approx \pi D_{\text{сп}} h_{\text{э}} m p, \tag{3}$$

где $h_{\text{э}}$ — эффективная ширина вакуумного уплотнения, мм; m — поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения давления; $Q_{\text{гп}}$, Н. Формула (3) справедлива при действии внутреннего давления рабочей среды p. При действии внешнего давления $Q_{\text{гп}} = 0$.

Расчетная нагрузка на болты при затяжке фланцевого соединения $Q_{\text{зб}}$ определяется как

$$Q_{\text{зб}} = \max\left\{Q_{\text{б1}},\ Q_{\text{б2}}\right\}, Q_{\text{б1}} = \max\left\{\begin{array}{l}\alpha\left(Q_{\text{д}} + P\right) + Q_{\text{гп}} + \dfrac{4\alpha_{\text{м}}\left|M\right|}{D_{\text{сп}}}, \\ \alpha\left(Q_{\text{д}} + P\right) + Q_{\text{гп}} + \dfrac{4\alpha_{\text{м}}\left|M\right|}{D_{\text{сп}}} - Q_t\end{array}\right\}, Q_{\text{б2}} = \max\left\{Q_{\text{обж}},\ 0.4S_{\text{б}}\left[\sigma\right]_0^{\text{б}}\right\}, \tag{4}$$

где P, M — внешняя осевая сила, Н и внешний изгибающий момент, Н·мм, соответственно; $\alpha, \alpha_{\text{М}}$ — коэффициенты жесткости фланцевого соединения, нагруженного внешней осевой силой (или внутренним давлением) и внешним изгибающим моментом соответственно; Q_t —нагрузка на болты, вызванная стесненностью температурных деформаций, Н; $Q_{\text{обж}}$ — усилие, необходимое для смятия вакуумного уплотнения при затяжке болта, Н, $Q_{\text{обж}} \approx 0.5\pi D_{\text{сп}} h_{\text{э}} q_{\text{обж}}$, $q_{\text{обж}}$ — удельное давление обжатия прокладки (вакуумного уплотнения), МПа.

Расчетная нагрузка на болты в условиях эксплуатации $Q_{\text{эб}}$ равна

$$Q_{\text{эб}} = Q_{\text{зб}} + \left(1-\alpha\right)\left(Q_{\text{д}} + P\right) + \frac{4\left(1-\alpha_{\text{м}}\right)\left|M\right|}{D_{\text{сп}}} + Q_t. \tag{5}$$

С учетом формул (1)–(5), обобщенная формула для расчета нагрузки Q на болты фланцевого соединения в условиях эксплуатации примет вид

$$Q = Q_{\text{эб}} + Q_{\text{обж}} + Q_{\text{м}} + Q_{\Delta} + Q_{\text{п}} + Q_{\Delta t} + Q_{\text{мн}}, \tag{6}$$

где $Q_{\text{м}}$ — часть нагрузки болтов, расходуемая на создание внутренних сил, уравновешивающих внешний изгибающий момент M и внешнюю осевую силу P; Q_{Δ} — часть нагрузки болтов, расходуемая на уплотнение затвора с упруго-искривленными уплотнительными поверхностями; $Q_{\text{п}}$ — часть нагрузки болтов, необходимая для их повторной затяжки с целью сохранения плотности их соединения при нарастании прогибов фланцев в области ползучести; $Q_{\Delta t}$ — дополнительная нагрузка на болтовое соединение, определяемая неравномерным распределением температуры; $Q_{\text{мн}}$ — дополнительная нагрузка на болтовое соединение, определяемая монтажными напряжениями, вызванными технологическими погрешностями изготовления и сборки, а также локальными дефектами поверхности; Q, Н.

Дополнительная нагрузка на болтовое соединение $Q_{\Delta t}$, входящая в формулу (6), равна

$$Q_{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}, \tag{7}$$

где $\Delta l = \Delta t \cdot (\alpha_{\text{ф}} - \alpha_{\text{б}}) \cdot l_{\text{б}}$ — разность теплового удлинения фланца и болта, мм, определяемая исходя из табличных данных (табл. 1) или экспериментально; $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ — коэффициенты податливости прокладки, болта и фланца соответственно; $\alpha_{\text{ф}}, \alpha_{\text{б}}$ коэффициенты линейного расширения материалов фланца и болта соответственно.

Таблица 1

Разность средних температур Δt элементов фланцевых соединений, выраженная в % от температуры рабочей среды ($t_{\text{пред}} = \pm 60°\text{C}$)

Части фланцевого соединения	Неразъемные фланцы	Свободные фланцы	Δl неразъемного фланца, мм	Δl свободного фланца, мм
Болт–окружающая среда	7	11	–	–
Кольцо цельного фланца болт	2	–	0,336	–
Прокладка–болт	3	7	0,338	0,345
Бурт–болт	6	7	0,343	0,345
Кольцо свободного фланца–болт	–	1	–	0,334

Учитывая формулы (4)–(6), условия прочности болтов при затяжке и в условиях эксплуатации:

$$\sigma_{\text{зб}} \le [\sigma]_{\text{зб}}, \quad \sigma_{\text{эб}} \le [\sigma]_{\text{эб}}, \tag{8}$$

где $\sigma_{\text{зб}}, \sigma_{\text{эб}}$ — расчетные напряжения в болтах при затяжке и в условиях эксплуатации соответственно, МПа; $[\sigma]_{\text{зб}}$, $[\sigma]_{\text{эб}}$ — допускаемые напряжения для болтов при затяжке и в условиях эксплуатации соответственно, МПа; $\sigma_{\text{зб}} = \dfrac{Q_{\text{зб}}}{S_1}$, $\sigma_{\text{эб}} = \dfrac{Q_{\text{эб}}}{S_1}$, S_1 — суммарная площадь сечения болтов по внутреннему диаметру d_1. Считается, что нагрузка болтов фланцевого соединения статическая [1, 2]. В элементах болтового соединения возникают пластические деформации. При $d \ge 30$ мм (что соответствует выбранной модели фланцевого соединения) болт рассчитывается на растяжение с кручением. Коэффициент запаса прочности болтов $n_{\text{б}}$ выбираем по четвертой теории прочности, соответствующей пластическим деформациям $n_{\text{б}} = \dfrac{\sigma_{\text{т}}}{\sqrt{\sigma_{\text{р}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2}}$. Здесь $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести материала; $\sigma_{\text{р}}$ — растягивающее напряжение; $\tau_{\text{кр}}$ — напряжение кручения (болт затянут, внешняя нагрузка отсутствует).

Учтем, что в месте стыка конической втулки с кольцом могут возникать опасные напряжения. Расчетный изгибающий момент, действующий на фланец при затяжке, равен

$$M_{\text{зб}} = C_F Q_{\text{зб}} b, \tag{9}$$

где b — плечо от действия усилия $Q_{\text{зб}}$; C_F — табличный коэффициент, учитывающий изгиб кольца фланца между болтами, мм.

Учтем смещение болта, вызванное погрешностью сборки. Тогда расчетный изгибающий момент, действующий на фланец в условиях эксплуатации $M_{\text{зб}}$, равен

$$M_{\text{эб}} = C_F \left\{ \left(Q_{\text{эб}} (b + a) + \left(Q_{\text{д}} + Q_{PM} \right) (e + a) \right), \left| Q_{\text{д}} + Q_{PM} \right| (e + a) \right\}, \tag{10}$$

где e — плечо усилия от действия давления внутри фланца, мм; a — смещение болта, мм; Q_{PM} — приведенная нагрузка, вызванная действием внешней осевой силы и внешнего изгибающего момента, Н.

Условие статической прочности фланцев при затяжке болта:

$$\max \left\{ \left| \sigma_1^M + \sigma_R^M \right|; \left| \sigma_1^M + \sigma_S^M \right| \right\} \le K_T [\sigma]_M, \tag{11}$$

где σ_1^M — меридиональное изгибное напряжение в конической втулке фланца в месте стыка с кольцом при затяжке болта, МПа; σ_R^M — радиальное напряжение в кольце фланца при затяжке болта, МПа; σ_S^M — окружное напряжение в кольце фланца при затяжке болта, МПа; K_T — коэффициент, учитывающий стесненность температурных деформаций; $[\sigma]_M$ — допускаемое значение общих мембранных и изгибных напряжений, МПа.

Условие статической прочности фланцев в условиях эксплуатации:

$$\max\left\{\left|\sigma_1^{\text{э}}-\sigma_{1\text{м.м}}^{\text{э}}+\sigma_R^{\text{э}}\right|;\left|\sigma_1^{\text{э}}-\sigma_{1\text{м.м}}^{\text{э}}+\sigma_S^{\text{э}}\right|;\left|\sigma_1^{\text{э}}+\sigma_{1\text{м.м}}^{\text{э}}\right|\right\}\le K_T[\sigma]_M, \tag{12}$$

где $\sigma_1^{\text{э}}$ — меридиональное изгибное напряжение в месте стыка конической втулки фланца с кольцом, МПа; $\sigma_{1\text{м.м}}^{\text{э}}$ — меридиональные мембранные напряжения в условиях эксплуатации, МПа; $\sigma_R^{\text{э}}$ — радиальное напряжение в кольце фланца в условиях эксплуатации; $\sigma_S^{\text{э}}$ — окружное напряжение в кольце фланца в условиях эксплуатации.

Плотность соединения может нарушить прогиб колец фланцев между болтами. Поэтому для фланцевых соединений высоковакуумных систем, помимо расчета на прочность болтовых соединений, большое значение придается расчету деформации изгиба внешними моментами M и выбору шага болтов. В качестве расчетной модели кольца фланца, на котором закрепляются болты, рассматривается тонкая кольцевая пластина с радиусом R и толщиной h (рис. 4).

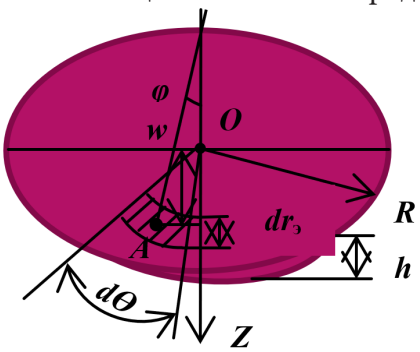


Рис. 4. Расчетная модель кольцевой пластины

Внутренние изгибающие моменты $M_{r\text{э}}$, M_θ выразим через нормальные напряжения:

$$M_{r\text{э}}=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_{r\text{э}}\cdot z\cdot dz\cdot 1,\ M_\theta=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_\theta\cdot z\cdot dz\cdot 1,$$

где 1 — единичная длина; z — расстояние от напряженной точки $A(r_{\text{э}},z)$ до нейтрального слоя; $\sigma_{r\text{э}},\sigma_\theta$ — нормальные напряжения.

Ослабим элемент кольцевой пластины отверстием. Данную модель можно рассматривать как статически неопределимую систему, в которой могут возникнуть температурные и монтажные напряжения. Рассчитаем диаметр кольцевой пластины $D_{\text{к}}$. Диаметр $D_{\text{к}}$ соответствует расчетному диаметру кольца фланца и учитывает снижение жесткости кольца отверстиями для болтов:

$$D_{\text{к}}=D_{\text{нк}}\frac{4D_1^2-nd_0^2}{4D_1^2+nd_0^2},\ R=\frac{D_{\text{к}}}{2}, \tag{13}$$

где $D_{\text{нк}}$ — наружный диаметр кольца фланца; D_1 — диаметр окружности расположения центров отверстий для болтов; d_0 — диаметр отверстий для болтов; n — число болтов.

Максимальное напряжение в пластине $\sigma_{\max}$ с учетом разности средних температур Δt элементов фланцевых соединений (табл. 1) равно

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho}=\frac{M}{D(1+\mu)}=\frac{(\alpha_{\text{ф}}-\alpha_{\text{б}})\Delta t}{h},D=\frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)},\\ \sigma_{\max}=\frac{6M}{h^2}=\frac{6(\alpha_{\text{ф}}-\alpha_{\text{б}})\Delta tD(1+\mu)}{h^3}=\frac{(\alpha_{\text{ф}}-\alpha_{\text{б}})\Delta tE}{2(1-\mu)},\end{gathered} \tag{14}$$

где ρ — радиус кривизны нейтрального слоя; D — жесткость пластины (кольца фланца); μ — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга первого рода.

Уравнения прогиба пластины *w*, определяющего жесткость элементов соединения, имеют вид

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right)=0,\ -\frac{dw}{dr}=\varphi=\frac{C_1 r}{2}+\frac{C_2}{r},\ w=-C_1\frac{r^2}{4}-C_2\ln\frac{r}{a}+C_3, \tag{15}$$

где r — радиальное расстояние точки A, находящейся в срединной плоскости; φ — максимальный угол наклона изогнутой поверхности в точке A (рис. 4); C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования.

При динамическом действии нагрузок, к которым можно отнести циклические нагрузки, удары и колебания, разрушение элементов фланцевого соединения происходит вследствие потери сопротивления усталости. В зонах концентрации напряжений появляются трещины. Трещины развиваются постепенно. Малоцикловое нагружение основано на эффекте Баушингера [5, 6]. Материал проявляет неупругость в зоне перехода к упругопластическим деформациям. Данный вид нагружения рассмотрен в нормативно-технической документации подробно. Учтем внезапные изменения условий нагружения, к которым могут привести изгибные удары и колебания, возникающие в системе при нарушении условий равновесия. Условия прочности дополним коэффициентами динамичности $k_{\text{д}} : \sigma_{\text{эб}} \le k_{\text{д}}[\sigma]_{\text{эб}}$.

Свободные поперечные колебания, которые могут возникнуть во фланцевом соединении при действии динамических нагрузок, описывает дифференциальное уравнение

$$D = \Delta\Delta w_0 - \lambda w_0 = 0, \tag{16}$$

где λ — характеристический параметр, $\lambda = p^2 m$, m — масса площадки, кг; $w = w_0 \cos(pt)$ — прогиб; t — время, с.

Расчет фланцевого соединения высоковакуумной системы выполняется по формулам (1)–(16). Методика расчета, основанная на теории подобия, дополняется вычислением нагрузок, вызываемых погрешностями сборки и перепадами температур.

3. Моделирование изменения технического состояния высоковакуумной системы

Моделирование изменения технического состояния высоковакуумной системы вследствие частичного раскрытия фланцевого соединения основано на создании модели геометрического подобия. В качестве инвариантов (чисел подобия) рассмотрим расчетные $D_{\text{сп}}$ и эталонные $D_{\text{спэ}}$ средние диаметры эффективной площади вакуумного уплотнения. Эталонные данные были получены в процессе многократных испытаний изделий.

Учитывая формулы (1)–(3), запишем уравнение геометрического подобия

$$f(D_{\text{сп}}, D_{\text{спэ1}},\ \ldots, D_{\text{спэ}n}) = 0.$$

Модели геометрического подобия соответствует физическая модель, связывающая давление рабочей среды p со средней длиной свободного пробега молекул λ. Запишем уравнение физического подобия

$$f(\lambda_1, \lambda_2,\ \ldots, \lambda_n) = 0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2,\ \ldots, \lambda_n$ — числа подобия, полученные в процессе многократных испытаний изделий, $\lambda = \frac{k}{p}$; k — коэффициент, определяемый газовой средой.

Скорость протекания газа через вакуумное уплотнение определяется как

$$v = \frac{k_0 \pi D_{\text{сп}}}{h_0} b_0 \left(1-\varepsilon\right)^2 \Delta p, \tag{17}$$

где k_0 — проницаемость резины; b_0 — начальная толщина вакуумного уплотнения, мм; h_0 — начальная ширина контактной площадки вакуумного уплотнения, $h_0 \approx h_{\text{э}}$, мм; ε — относительное сжатие вакуумного уплотнения, $\varepsilon \le 0.25$; Δp — разность давлений, МПа. Формула

(17) позволяет учесть диффузионные свойства газообразной среды и проницаемость резины при сжатии вакуумного уплотнения. Свяжем формулу (17) с эффективной шириной вакуумного уплотнения $h_э$: $h_э = \frac{k_0 \pi D_{сп}}{v} b_0 (1-\varepsilon)^2 \Delta p$.

При моделировании изменения технического состояния высоковакуумной системы

необходимо учесть возникновение в элементах фланцевого соединения пластичности, влияющей на его плотность. Согласно четвертой и третьей теориям прочности предельный изгибающий момент $M_{пред}$ равен [1, 3, 7, 8]

$$M_{пред} = 1,27\pi r^2 \sqrt{(\sigma_т s)^2 - (0,75rp)^2},\ M_{пред} = 1,27\left[\sigma_т - \frac{rp}{s}\right]W, \qquad (18)$$

где $\sigma_т$ — предел текучести материала, МПа; r — средний радиус поперечного сечения, мм; s — толщина стенки в вершине конической втулки, мм; W — момент сопротивления поперечного сечения основания втулки, отнесенный к единице длины средней окружности основания. Формулы (18) связывают предельный изгибающий момент $M_{пред}$ с давлением рабочей среды p, МПа.

При моделировании также следует учесть дополнительный крутящий момент $M_{крд}$, возникающий при неосесимметричном кручении кольца, сопровождающим изгиб фланцевого соединения: $M_{крд} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mR_{ср} \sin\alpha \cos\alpha d\alpha = \frac{mR_{ср}}{2}$. Здесь m — крутящая пара; α — центральный угол; $R_{ср}$ — радиус кольца на средней линии, мм.

Модели частично раскрытого фланцевого соединения соответствует нагружение стыка соединения переменным усилием $P_э(t)$, раскрывающим стык деталей. К одному болту будет приложено усилие $P_э^1(t) = \frac{P_э(t)}{n}$. Дополнительное растяжение болта Δ пропорционально уменьшению затяжки стыка $(1-\zeta)P_э^1$ и податливости фланца λ_2: $\Delta = (1-\varsigma)P_э^1\lambda_2$. В то же время дополнительное растяжение Δ пропорционально податливости болта λ_1, определяемой его удлинением при единичной нагрузке: $\Delta = \varsigma P_э^1\lambda_1$. Тогда приращение дополнительной нагрузки на болт $P_э^1$ равно

$$P_{эб}^1(t) = \xi P_э^1(t),\ \xi = \frac{\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)},\ P_{эб}^1(t) \le [P_{эб}^1]. \qquad (19)$$

Значение коэффициента ς получено в процессе многократных испытаний изделия. Формула (19) позволяет определить нагрузку, соответствующую частичному раскрытию фланцевого соединения (рис. 5). Коэффициенты податливости λ_1 и λ_2 выбраны с учетом разности теплового удлинения Δl (табл. 1, (7)). *Условием нераскрытия стыка* будет:

$$Q_{зб} - (1-\varsigma)P_э^1 > 0. \qquad (20)$$



а) *б)*

Рис. 5. Изменение технического состояния фланцевого соединения: а) целостность вакуумного уплотнения не нарушена; б) фланцевое соединение частично раскрыто

Результаты моделирования в компьютерной среде Wolfram Mathematica иллюстрирует рис. 6. На графике раскрывающее стык переменное усилие обозначено P1(t), а приращение дополнительной нагрузки на один болт — P2(t). Усилия P1(t) и P2(t) изменяются по одному

гармоническому закону. Приращение дополнительной нагрузки на один болт уменьшается при уменьшении коэффициента ς.

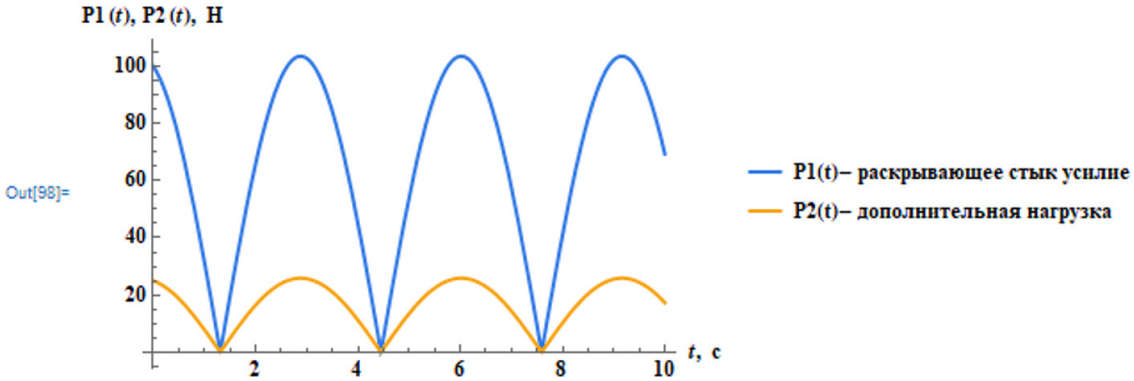


Рис. 6. Моделирование изменения условий нагружения

Заключение

Результаты моделирования изменения технического состояния высоковакуумной системы показали, что температурные напряжения, вызванные неравномерностью распределения температуры между деталями и окружающей средой, а также монтажные напряжения создают в элементах фланцевого соединения дополнительные динамические нагрузки. Внезапное изменение условий нагружения в сочетании с нарушением целостности вакуумного уплотнения приводит к частичному раскрытию фланцевого соединения, что в большей мере характерно для соединений, работающих при отрицательных температурах. Раскрытие фланцевого соединения связано с нагружением его стыка переменным усилием $P_э(t)$. К внезапному отказу изделия может привести приращение дополнительной нагрузки на один болт, приближающееся к критическому значению переменного усилия $P_э(t)$. Формула (20) позволяет сделать вывод, что нераскрытие стыка элементов фланцевого соединения и его герметичность обеспечивается затяжкой болтов и упругостью вакуумного уплотнения. Результаты моделирования и испытаний подтвердили, что при любых условиях нагружения и параметрах рабочей среды могут работать только цельные соединения и соединения с плоскими приварными фланцами. В работе исследовалось влияние погрешностей сборки на частичное раскрытие фланцевого соединения. В дальнейшем предполагается исследовать внезапные отказы изделий при наличии скрытых локальных дефектов материала.

Литература

1. *Волошин А. А.* Расчет и конструирование фланцевых соединений / А. А. Волошин, Г. Т. Григорьев. – Ленинград : Машиностроение, 1979. – 125 с.

2. ГОСТ Р 52857.4-2007. Расчет на прочность и герметичность фланцевых соединений. Общие требования и правила составления: национальный стандарт Российской Федерации: дата введения 2008-03-31/ Федеральное агентство по техническому регулированию. – Изд. официальное. – Москва : Стандартинформ, 2009. – 37 с.

3. *Рот А.* Вакуумные уплотнения / А. Рот. – Москва : Энергия, 1971. – 464 с.

4. ГОСТ Р 52857.6-2007. Нормы и методы расчета на прочность. Расчет на прочность при малоцикловых нагрузках. Общие требования и правила составления: национальный стандарт Российской Федерации: дата введения 2008-03-31/ Федеральное агентство по техническому регулированию. – Изд. официальное. – Москва: Стандартинформ, 2009. – 17 с.

5. *Тимошенко С. П.* Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва : Наука, 1966. – 636 с.

6. *Виноградов Ю. И.* Фундаментальная система функции Коши — Крылова решения дифференциальных уравнений механики деформирования пологой сферической оболочки / Ю. И. Виноградов // Российская академия наук, Государственная корпорация по космической деятельности «Роскосмос», Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, МГТУ им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский ун-т). – 2022. – Т. 4. – С. 457– 462.

7. *Opalikhina O.V.* Research of the stable equilibrium position of a dissipative system / O. V. Opalikhina, M. A. Zhelavskiy // Journal of Physics: Conference Series. – 2022. – Vol. 2373, 2373 072019. – P. 1–10. DOI: 10.1088/1742-6596/2373/7/072019

8. Податливость затянутого резьбового соединения / Б. В. Букеткин, В. М. Зябликов, И. Е. Семенов-Ежов, А. А. Ширшов // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2019. – вып. 3. – http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-3-1855

УДК 004.032.26

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ УСТРАНЕНИЯ АВТОКОРРЕЛИРОВАННОГО ШУМА В ИЗОБРАЖЕНИЯХ ПЕРЕД ОБУЧЕНИЕМ АВТОЭНКОДЕРОВ

И. Н. Осипенко, О. В. Лукин

Ульяновский государственный университет

Аннотация. В данной работе предлагается исследование влияния модифицированного фильтра Калмана, использующего расширенный вектор состояния, на качество обучения автоэнкодеров при обработке изображений с автокоррелированным шумом. Основная цель исследования — определить, насколько данный подход может оказаться более эффективным по сравнению с традиционными методами фильтрации, такими как медианный фильтр и фильтр Гаусса, для предварительной обработки изображений. Для моделирования реальных условий предполагается использовать изображения с искусственно добавленным автокоррелированным шумом.

Методика эксперимента будет включать настройку параметров модифицированного фильтра Калмана для оптимального подавления автокоррелированного шума, а также тестирование медианного и Гауссова фильтров для проведения сравнительного анализа. Оценка качества фильтрации запланирована с использованием метрик SSIM (индекс структурного сходства) и PSNR (пиковое отношение сигнал/шум).

Ожидается, что результаты эксперимента подтвердят, что предложенный модифицированный фильтр Калмана с расширенным вектором состояния эффективно снижает уровень автокоррелированного шума, улучшая качество изображений и повышая точность обучения автоэнкодеров. Это исследование подчёркивает важность выбора подходящих методов фильтрации для повышения эффективности нейронных сетей в условиях автокоррелированного шума.

Ключевые слова: фильтр Калмана, автокоррелированный шум, обработка изображений, автоэнкодеры, предварительная обработка данных, медианный фильтр, фильтр Гаусса, качество изображений, машинное обучение, фильтрация шума.

Введение

В настоящее время обработка изображений играет ключевую роль в таких областях, как компьютерное зрение, медицинская диагностика и автономные системы [1]. Однако эта задача усложняется воздействием внешних факторов и присутствием различных типов шума. Шумы, такие как гауссовский, импульсный и автокоррелированный, могут существенно снижать качество изображений, что затрудняет их дальнейшую обработку и анализ [2].

Шумовые искажения могут возникать на разных этапах — от получения изображения до его передачи и хранения, что приводит к деградации данных и снижению точности выполнения таких задач, как распознавание объектов, сегментация и диагностика. Особенно трудным для обработки является автокоррелированный шум, так как он влияет на большие участки изображения, что усложняет его устранение с помощью традиционных методов фильтрации [3, 4].

Цель данной работы — оценить эффективность модифицированного фильтра Калмана с расширенным вектором состояния для устранения автокоррелированного шума в изображениях перед обучением автоэнкодеров. Предполагается, что исследование позволит выяснить, насколько данный подход способен улучшить качество изображений и повысить точность обучения автоэнкодеров в условиях автокоррелированного шума. Ожидается, что полученные результаты внесут значительный вклад в разработку более эффективных методов обработки изображений и расширят их применение в различных областях [5].

1. Теоретические основы

Автокоррелированный шум представляет собой один из наиболее сложных типов искажений, с которыми сталкиваются при обработке изображений. Такие искажения могут появляться на различных этапах работы с изображением — от момента его получения до передачи или хранения, что приводит к ухудшению качества визуальных данных и затрудняет решение задач, таких как сегментация или распознавание объектов.

В отличие от гауссовского или импульсного шума, автокоррелированный шум проявляется как систематические искажения, влияющие на соседние пиксели. Вместо случайного распределения он создает взаимосвязанные области, где соседние значения шума оказывают влияние друг на друга. Это приводит к образованию крупных зон искажений, которые сложно обработать традиционными методами фильтрации, такими как медианный фильтр или фильтр Гаусса. Эти методы зачастую оказываются недостаточно эффективными, так как рассчитаны на устранение случайных локальных искажений.

Для эффективного подавления автокоррелированного шума требуются методы, способные учитывать взаимосвязь значений шума в соседних областях изображения. Такие подходы должны не только устранять искажения, но и сохранять ключевые визуальные особенности, что является критически важным для последующей обработки и анализа данных.

2. Математическая модель

Для устранения автокоррелированного шума в изображениях перед обучением автоэнкодеров планируется использовать модифицированный фильтр Калмана, построенный на основе подхода с расширенным вектором состояния [6]. В данной модели предполагается расширение вектора состояния для учёта динамики изменения изображения и параметров автокоррелированного шума. Это позволит фильтру Калмана учитывать сложные зависимости между соседними пикселями, возникающие из-за шума, что, как ожидается, повысит точность фильтрации.

Модель состояния

Пусть изображение представлено в виде вектора состояния x_k, где каждый элемент вектора соответствует отдельному пикселю изображения. Динамика изменения состояния изображения описывается следующим уравнением:

$$x_k = Ax_{k-1} + w_k,$$

где x_k — вектор состояния изображения на шаге k, A — матрица перехода состояния, описывающая изменения изображения во времени, w_k — шум процесса, который моделирует случайные изменения изображения.

Для моделирования автокоррелированного шума v_k, который влияет на изображение, используется следующая модель:

$$v_k = \alpha v_{k-1} + n_k,$$

где α — коэффициент автокорреляции, описывающий степень зависимости текущего шума от предыдущего, n_k — случайный шум, добавляемый на каждом шаге.

Расширенный вектор состояния

Для корректного учёта автокоррелированного шума расширим вектор состояния. Новый вектор состояния φ_k включает как само изображение x_k, так и параметры автокоррелированного шума v_k, что позволяет фильтру учитывать влияние шума на большие области изображения. Расширенный вектор состояния записывается как:

$$\varphi_k = \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix}.$$

Размерность вектора состояния p складывается из количества пикселей изображения n и параметров автокоррелированного шума:

$$p = n + L * q,$$

где n — количество пикселей в изображении, L — количество шагов автокорреляции, q — размерность вектора шума.

Расширенные матрицы перехода и наблюдений

Для описания динамики системы с учётом автокоррелированного шума применяются следующие матрицы:

• Матрица перехода состояния для расширенного вектора состояния A_r:

$$A_r = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

где A — матрица перехода для изображения, I — единичная матрица для описания динамики автокоррелированного шума.

• Матрица наблюдений C_r используется для того, чтобы извлекать состояние изображения:

$$C_r = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица наблюдений C_r измеряет только состояние изображения, а шум не включён в процесс наблюдения.

Ковариационные матрицы

Ковариационная матрица процесса для расширенного вектора состояния Q_r также расширяется за счёт описания автокоррелированного шума:

$$Q_r = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_v \end{bmatrix},$$

где Q — ковариационная матрица процесса для изображения, Q_v — ковариационная матрица автокоррелированного шума.

Шаги предсказания и обновления

• Шаг предсказания:

На этапе предсказания оценка расширенного вектор состояния $\hat{\phi}_k$ прогнозируется через матрицу перехода A_r:

$$\hat{\phi}_{k|k-1} = A_r \hat{\phi}_{k-1}.$$

Ковариационная матрица ошибок предсказания обновляется:

$$P_{k|k-1} = A_r P_{k-1} A_r^T + Q_r.$$

• Шаг обновления:

Используя наблюдения (зашумленное изображение y_k), вычисляется коэффициент Калмана:

$$K_k = P_{k|k-1} C_r^T \left(C_r P_{k|k-1} C_r^T \right)^{-1},$$

где R_k — ковариационная матрица шума наблюдений.

После вычисления коэффициента Калмана обновляется состояние:

$$\hat{\phi}_k = \hat{\phi}_{k|k-1} + K_k \left(y_k - C_r \hat{\phi}_{k|k-1} \right).$$

Ковариационная матрица ошибок обновляется следующим образом:

$$P_k = P_{k|k-1} - K_k C_r P_{k|k-1} C_r^T.$$

Оценка вектора состояния:

$$\hat{x}_k = \left(I_n \, 0 \right) \hat{\phi}_k.$$

Результатом работы алгоритма является оценка вектора состояния x_k как части расширенного вектора состояния ϕ_k, участвующего в уравнениях.

3. Методика вычислительного эксперимента

Цель предстоящего вычислительного эксперимента — оценить эффективность применения модифицированного фильтра Калмана с расширенным вектором состояния для подавления автокоррелированного шума в изображениях перед обучением автоэнкодеров. Методика эксперимента включает подготовку изображений, генерацию автокоррелированного шума, предварительную фильтрацию с использованием модифицированного фильтра Калмана и традиционных методов фильтрации, а также оценку результатов по метрикам качества. В качестве данных планируется использовать изображения из датасета CIFAR-10 размером 32×32 пикселя с тремя цветовыми каналами (RGB).

Подготовка данных

Для эксперимента предполагается отобрать изображения из CIFAR-10, поскольку они имеют достаточно низкое разрешение, что упрощает процесс фильтрации и анализа. Исходные изображения x_k будут нормализованы, чтобы значения пикселей находились в диапазоне [0, 1], что соответствует требованиям автоэнкодера и фильтра Калмана.

Генерация автокоррелированного шума

Для моделирования автокоррелированного шума, который сложен для удаления из-за его корреляционной структуры, в планируемом эксперименте предполагается следующий подход:

• устанавливается автокорреляционный коэффициент α который контролирует степень зависимости текущих значений шума от предыдущих;

• для каждого изображения будет генерироваться базовый шум n_k с гауссовым распределением (среднее значение 0 и стандартное отклонение 1);

• автокоррелированный шум v_k предполагается вычислять рекурсивно, используя предыдущее значение шума:

$$v_k = \alpha v_{k-1} + n_k,$$

где коэффициент α определяет степень корреляции.

Каждое изображение будет искажено добавлением к нему автокоррелированного шума, что приведёт к зашумленному изображению y_k, предназначенному для фильтрации.

На рис. 1 представлен пример изображения с добавленным автокоррелированным шумом при коэффициенте автокорреляции $\alpha = 0,8$.

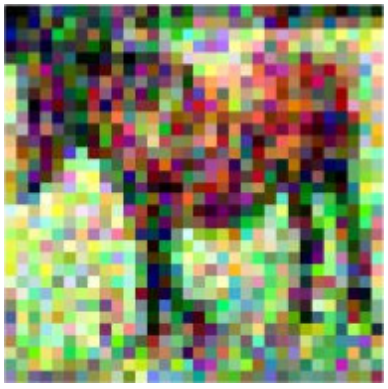


Рис. 1. Пример зашумленного изображения с автокоррелированным шумом

Как видно, шум затрагивает значительные области изображения, что усложняет его обработку традиционными методами фильтрации.

Методы фильтрации шума

Для сравнения эффективности планируется использовать три метода фильтрации:

• Модифицированный фильтр Калмана: основной метод исследования, разработанный для учёта автокоррелированного шума посредством применения расширенного вектора состояния [7].

• Медианный фильтр: классический метод фильтрации, работающий на основе локальной медианы и часто используемый для подавления импульсного шума [8].

• Фильтр Гаусса: метод сглаживания, применяющийся для уменьшения гауссовского шума в изображениях [9].

Для количественной оценки эффективности каждого метода фильтрации планируется использовать две метрики:

Пиковое отношение сигнал/шум (PSNR): метрика, измеряющая разницу между исходным и отфильтрованным изображением. Чем выше значение PSNR, тем лучше качество восстановленного изображения.

$$PSNR = 10 * \log_{10}\left(\frac{MAX^2}{MSE}\right),$$

где MAX — определяет степень корреляции, максимальное возможное значение пикселя изображения (1.0 для нормализованных изображений), а MSE — среднеквадратичная ошибка между исходным и отфильтрованным изображением.

Индекс структурного сходства (SSIM): метрика, оценивающая структурное сходство между исходным и восстановленным изображением. SSIM учитывает такие характеристики, как яркость, контраст и структуру, и принимает значения от 0 до 1, где 1 соответствует полному сходству.

$$SSIM\left(x, y\right) = \frac{\left(\mu_x\mu_y + C_1\right)\left(2\sigma_{xy} + C_2\right)}{\left(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1\right)\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C2\right)},$$

где μ_x и μ_y — средние значения изображений, σ_x и σ_y — дисперсии, а σ_{xy} — ковариации между изображениями. Константы C_1 и C_2 применяются для стабилизации метрики.

Процесс планируемого эксперимента

1. Для каждого изображения из набора данных будет создана зашумленная версия с добавлением автокоррелированного шума.

2. Полученные зашумленные изображения предполагается поочередно обрабатывать каждым из трёх методов фильтрации.

3. Фильтрованные изображения будут оцениваться по метрикам PSNR и SSIM относительно исходного изображения.

4. Для каждого метода планируется вычислить средние значения PSNR и SSIM по всему набору изображений, чтобы провести объективное сравнение их эффективности.

Ожидаемые результаты позволят оценить, насколько каждый из методов успешно удаляет автокоррелированный шум. Повышенные значения PSNR и SSIM для метода, использующего модифицированный фильтр Калмана, будут свидетельствовать о его способности восстанавливать исходные характеристики изображения, несмотря на присутствие автокоррелированного шума.

Заключение

В данной работе представлен подход к устранению автокоррелированного шума в изображениях с использованием модифицированного фильтра Калмана перед обучением автоэнкодеров. Актуальность исследования обусловлена тем, что автокоррелированный шум, влияя на целые области изображения, затрудняет его эффективное устранение традиционными методами фильтрации и снижает качество данных для последующей обработки. Предполагается, что модифицированный фильтр Калмана, адаптированный для учёта динамики шума, обеспечит более точную и стабильную фильтрацию по сравнению с медианным и Гауссовым фильтрами [6].

Планируемый вычислительный эксперимент предполагает сравнение модифицированного фильтра Калмана с традиционными методами фильтрации по метрикам SSIM и PSNR, что позволит объективно оценить качество восстановления исходного изображения. Ожидается, что фильтр Калмана продемонстрирует высокую эффективность, сохраняя ключевые структурные характеристики изображения и минимизируя влияние автокоррелированного шума [10]. Эти прогнозируемые результаты могут способствовать улучшению точности и стабильности работы автоэнкодеров и других алгоритмов машинного обучения, в которых требуется предварительная очистка изображений.

Литература

1. *Heaton J., Goodfellow I., Bengio Y., Courville A*. Deep learning // Genetic Programming and Evolvable Machines. – 2018. – Vol. 19. – P. 305–307.

2. *Topaloglu I.* Deep Learning Based Convolutional Neural Network Structured New Image Classification Approach for Eye Disease Identification // Scientia Iranica. – 2023. – Vol. 30, No 5. – P. 1731–742. – DOI: 10.24200/SCI.2022.58049.5537.

3. *Kao M. H., Eller D. H.* Multiconfiguration Kalman Filter Design for High-Performance GPS Navigation // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1983. – Vol. 28, No 3. – P. 304–314. – DOI: 10.1109/TAC.1983.1103167.

4. *Kundu R., Chakrabarti A., Lenka P.* A Novel Technique for Image Denoising using Non-local Means and Genetic Algorithm // National Academy Science Letters. – 2022. – Vol. 45, No 1. – P. 61–7. DOI: 10.1007/s40009-021-01052-z.

5. *Gonzalez R. C., Woods R. E.* Digital Image Processing. Pearson Publ., 2018. – 1020 p.

6. *Liu W., Shi P., Zhang H.* Kalman Filtering with Finite-Step Autocorrelated Measurement Noise // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2022. – Vol. 408, Article 114138. – DOI: 10.1016/j.cam.2022.114138.

7. Coarse-to-Fine CNN for Image Super-Resolution / C. Tian, Y. Xu, W. Zuo, B. Zhang, L. Fei, C.-W. Lin // IEEE Transactions on Multimedia. – 2020. – Vol. 23. – P. 1489–1502. – DOI: 10.1109/TMM.2020.2999182.

8. *Grabowski S., Bieniecki W.* A Two-Pass Median-Like Filter for Impulse Noise Removal in Multi-Channel Images // Proc. 3rd Polish Conf. on Computer Pattern Recognition Systems (KOSYR) 2003. – P. 195–200.

9. *Peters R. A.* A New Algorithm for Image Noise Reduction Using Mathematical Morphology // IEEE Transactions on Image Processing. – 1995. – Vol. 4, No 5. – P. 554–568.

10. *Pizurica A., Zlokolica V., Philips W.* Noise Reduction in Video Sequences Using Wavelet-Domain and Temporal Filtering // Proc. SPIE, Wavelet Applicators in Industrial Processing. – 2004. – Vol. 5266. – DOI:10.1117/12.516069.

УДК 004, 519.86, 331.108

ФОРМИРОВАНИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ КАНДИДАТОВ ДЛЯ ПРОЦЕДУРЫ ПОДБОРА ПЕРСОНАЛА В IT-ПРОЕКТ

Ю. В. Бондаренко, С. А. Палкина

Воронежский государственный университет

Аннотация. Статья посвящена разработке модели оценивания кандидатов в IT-проект, что является одной из приоритетных задач HR-служб IT-компаний. Предлагаемая модель основана на применении метода многокритериальной оптимизации — методе анализа иерархий. Такой выбор позволяет работать как с количественными, так и качественными характеристиками, в которых обычно описываются требования к кандидатам. Практическая значимость модели оценивается потребностью рынка труда в совершенствовании процедур подбора кандидатов. При этом она учитывает, накопленный HR-компаниями опыт и удовлетворяет возможностью «масштабирования» на будущие проекты компаний.
Ключевые слова: подбор персонала, мультипроект, профессиональные компетенции, метод анализа иерархии.

Введение

Существование множества методов подбора персонала для IT-компаний не делает эту проблему решенной. Трудность задачи формирования команд IT-проектов связана как с ограничениями проектов (требуемые от кандидатов навыки, знания и опыт), так и с ограничениями по выбору кандидатов (запросы кандидатов на зарплату, наличие знаний и опыта). Дополнительными ограничениями также следует считать неопределенность проектов в процессе реализации. В ходе реализации проектов требования к участникам команды могут измениться, а времени на «пересборку» команды может не оказаться. В связи с этим, уже в модели будущего кандидата должна закладываться некоторая избыточность по ряду параметров. Идеальный кандидат для большинства IT-компаний это специалист, который может качественно вести, в том числе, одновременно и несколько проектов. С позиции реализации процедур подбора персонала это требует доработки существующих методов. Это и делает тему работы актуальной.

В работе поставлена цель: разработать модель оценки кандидата для отбора в команды проектов IT-компаний, которая позволит учитывать профессиональные, личностные и социальные характеристики, определяющие потенциал работы при совмещении участия в нескольких проектах, в том числе, мультипроектах.

Постановка задачи

Ставится задача, найти идеального кандидата в IT-проект, который сможет качественно вести, в том числе, одновременно и несколько, проектов и будет перспективным для работы в данном направлении в дальнейшем. Это значит, что он должен иметь функциональность по нескольким ролям в команде, обладать всей основной функциональностью (знаниями, умениями и навыками) по специфике проектов компании и ряд личностных характеристик, которые определяют способность работы, в условиях многозадачности и большой загрузки. В работе рассматриваются мультипроекты, так как их доля в отрасли информационных технологий постоянно растет. Мультипроект определяется как совокупность нескольких монопроектов, которые выполняются одной или несколькими организациями или командами в рамках одной программы или портфеля. В данной работе, рассматривается ситуация, когда подбирается кандидат для работы по проектам, реализуемым одной организацией. Мультипроект рассма-

тривается как аналог работы по нескольким проектам одновременно. При этом эффективность мультипроекта рассматривается аналогично эффективности обычного (моно) проекта. Под эффективностью понимается достижение высоких результатов с наименьшими затратами, в том числе, и по времени. Рассмотрение именно мультипроектов делает возможность заложить в модель требуемую избыточность по профессиональным компетенциям сотрудника.

Обзор существующих моделей, основанных на методе анализа иерархий

Одним из базовых подходов к оценке кандидата в проект является подход, основанный на методе анализа иерархий. В рамках его применения строится модель оценки кандидата в проект. Модель оценки ложится в основу «видения» идеального кандидата. Видение позволяет ранжировать критерии отбора, которые важны при выборе кандидата. В качестве критериев выступают характеристики кандидатов, в качестве альтернатив выбора рассматриваются сами кандидаты. Типовая модель оценки кандидата для IT-проекта приведена на рис. 1. Она позволяет подобрать кандидата на конкретный функционал проекта, что заложено в требованиях к вакансии. Функционал, на который берется сотрудник, определяет ожидаемые компетенции и качества кандидата. Требуемые профессиональные компетенции на вакансию определяются на основе анализа бизнес-процессов организации и иерархической структуры работ по проекту. В ходе этого анализа выявляются ключевые задачи и функции, которые должен выполнять сотрудник, а также необходимые знания, умения и навыки для успешного выполнения этих задач. При этом модель не учитывается особенности проектной работы.

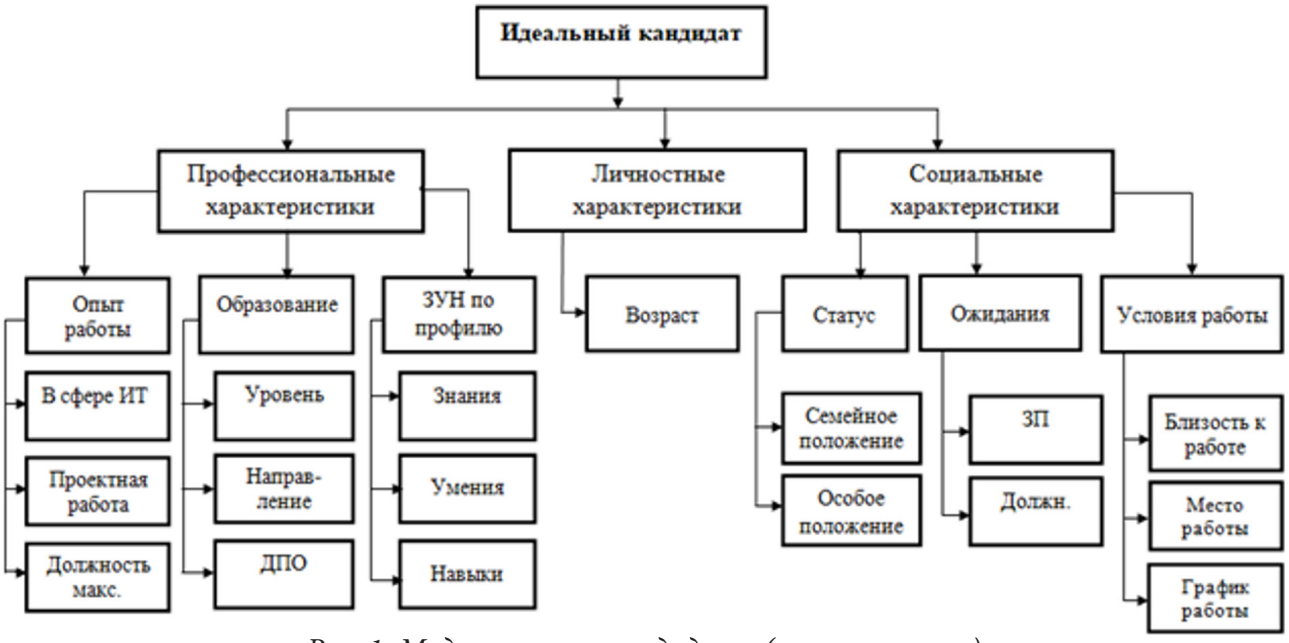


Рис. 1. Модель оценки кандидата (универсальная)

На рис. 2 представлена модель, которая учитывает необходимость оценивания кандидатов по компетенциям, важным для проектной работы, а также дает возможность заложить избыточность по профессиональным компетенциям. В ней учитываются профессиональные, личностные и социальные характеристики. Профессиональные характеристики заложены отдельным блоком и, в зависимости от функциональных обязанностей участника проекта, могут быть любыми. Они учитывают образование, опыт работы, знания, умения и навыки (ЗУН) по специфике проекта, из универсальной модели. В модели учитываются критерии, которые позволяют HR-специалистам составить представление о работоспособности кандидата, возможности совмещать задачи по разным проектам, как в плане трудовых функций,

так и личностных способностей. Для IT-сферы выделяют такие группы характеристик как Hard skills, Soft skills, Meta skills и Self skills. Hard skills — «жесткие» или профессиональные навыки. Soft skills — «мягкие» навыки, личностные характеристики, которые не закрепляются за одной профессиональной областью. Meta skills — базовые качества личности, которые считаются врожденными, на основе которых складываются остальные навыки. Self skills или self management — это навыки самоуправления, саморегулирования, организации себя, планирования, контроля и мотивация, навыки ориентированные на умение управлять собой. Self skills в ряде случаев могут стать решающими при отборе кандидатов. Блок «ЗУН по профилю» заменен на блок «Компетенции (Skills)». Блок «Черты характера» удален, т. к. он учитывается в блоке «Компетенции (Skills)». Блок «Meta skills» в модели не сформирован по двум причинам: качества трудно выявляемы тестами, базовые качества личности проявляются в других навыках, более легко выявляемых.

Универсальность модели заключается и в том, что при формировании команды мультипроекта руководителю не обязательно формировать «видение» для каждой позиции проекта. Достаточно сформировать единожды и далее изменять оценку только по уровню элементов, которые разнятся для разных позиций (например, по блоку «Hard-skills»).

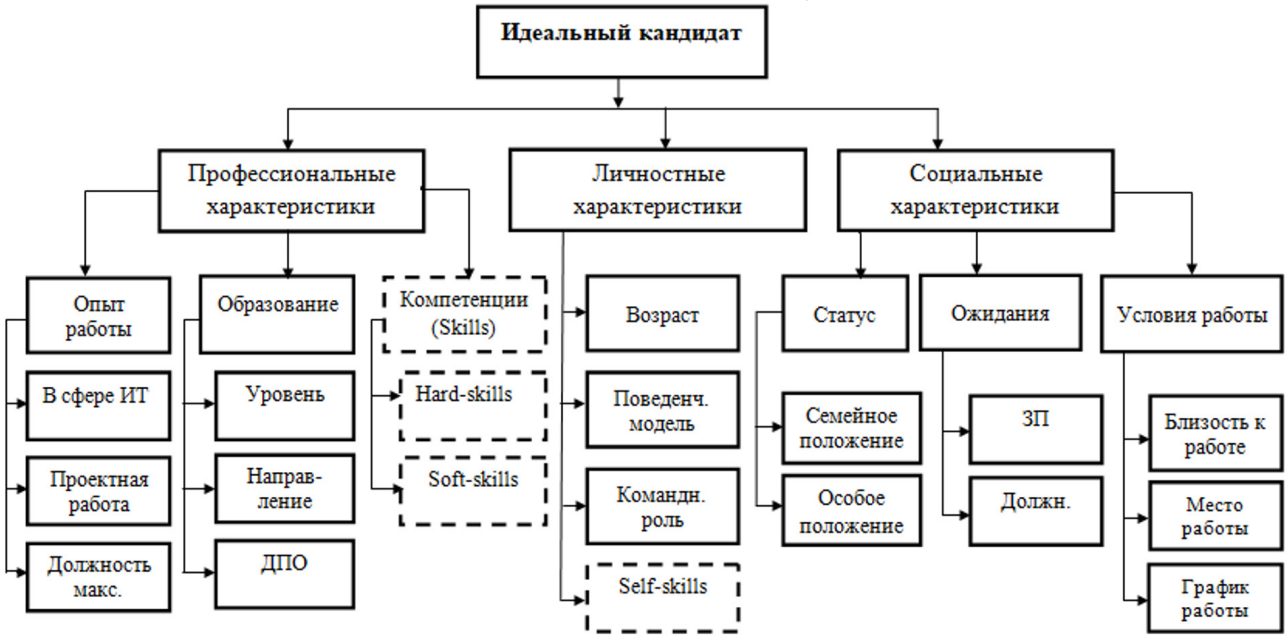


Рис. 2. Модель оценки кандидата в мультипроект

Формирование команды с использованием модели оценки кандидата

Процесс поиска «идеального « кандидата в IT-проект с использованием предложенной модели следующий.

Шаг 1. Формирование руководителем проекта «видения» идеального кандидата. Заключается в расстановке приоритетов критериев в рамках каждого уровня.

Шаг 2. Расчет весовых коэффициентов согласно методу иерархии по каждому уровню (локальных и глобальных).

Шаг 3. Ранжирование анкет соискателей с учетом весовых характеристик нижнего уровня модели оценки.

В случае одинакового веса анкеты, сравнение характеристик анкет более весомого критерия вышестоящего уровня. В отличие от классического алгоритма метода анализа иерархии, веса критериев уровней задаются через пересчет приоритетов, а не за счет применения матриц парных сравнений.

Заключение

Предложенная модель может использоваться для формирования команд мультипроектов, а также монопроектов и стартап-проектов в IT-сфере. Метод анализа иерархий хорошо зарекомендовал себя в схожих задач, является несложным для программной реализации. В свою очередь, данное решение является перспективным для реализации.

Литература

1. *Азарнова Т. В.* Модели и методы принятия решений / Т. В. Азарнова, Ю. В. Бондаренко, Н. Б. Баева, Е. С. Дашкова, В. В. Ухлова; Воронежский государственный университет. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. – 310 с.

2. *Бондаренко Ю. В.* Экспертно-тестовый механизм комплексной оценки кандидатов при подборе персонала / Ю. В. Бондаренко, И. В. Горошко, Е. В. Васильчикова // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2020. – Т. 20, № 1. – С. 100–110.

3. *Джабраилова З. Г.* Моделирование процесса выбора кандидатов на вакантные должности с применением нечеткой логики / З. Г. Джабраилова, С. Р. Нобари // Искусственный интеллект: сб. статей. – Баку, 2009. – С. 254–259.

4. *Жуков, Ю. М., Журавлёв А. В., Павлова Е. Н.* Технологии командообразования: учеб. пособие для студ. вузов Москва : Аспект Пресс, 2008. – 320 с.

5. *Игнатенко А. Н.* Современные технологии подбора персонала / А. Н. Игнатенко // Инновационная наука. – 2016. – №1–3. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/v/sovremennye–tehnologii–podbora–personala (Дата обращения: 29.08.2023).

6. *Казанцева В. А.* К вопросу о проблемах подбора персонала в сфере информационных технологий в России в современных условиях // Экономика России: глобальные вызовы и перспективы инновационного развития. Материалы всероссийской научной студенческой конференции. Омский государственный технический университет. – 2017. – 245 с.

7. *Кибанов А. Я.* Управление персоналом организации: стратегия, маркетинг, интернационализация: учеб. пособие / А. Я. Кибанов, И. Б. Дуракова. – Москва : Инфра-М, 2009. – 301 с.

8. *Махмудова И. Н.* Подбор персонала: организация бизнес–процесса / И. Н. Махмудова, Р. И. Климетьев // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. – 2017. – № 2. – С. 59–62.

9. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – Москва : Радио и связь, 1993. – 278 с.

10. *Ухлова В. В.* Применение системного подхода в процедурах формирования команд стартапов ИТ-проектов / Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики / В. В. Ухлова, С. А. Палкина // Сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 13–15 декабря 2021 г. – Воронеж, 2022. – С. 791–796.

11. *Палкина С. А.* Один из подходов формирования эффективных команд стартап-проектов / С. А. Палкина, А. Э. Потемкина // Математика, информационные технологии, приложения : сборник трудов Межвузовской научной конференции молодых ученых и студентов, Воронеж, 26 апреля 2023 г. – Воронеж : Научная книга, 2023. – С. 334–337.

УДК 502.001.573(075.8)

АНАЛИЗ ОБРАЗОВАНИЯ И ГОРЕНИЯ ГАЗОВЫХ ОБЛАКОВ В АТМОСФЕРЕ ПРИ АВАРИЙНЫХ ВЫБРОСАХ

И. Н. Пантелеев

Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Показана возможность анализа характера истечения при разгерметизации емкостей со сжатым газом и определение наиболее вероятной конфигурации пламени при возгорании выброса. Предложенный подход может использоваться для оценки опасности химических производств, построении карт риска, экспертных оценках последствий аварий на трубопроводах и хранилищах сжатых газов.
Ключевые слова: математическое моделирование, загрязнение атмосферы, экологический ущерб, анализ рисков.

Введение

Кратковременные выбросы в атмосферу загрязняющих веществ большой концентрации возникают при взрывах боеприпасов, емкостей с горючими материалами, запусках ракет и т. д. Особую опасность представляют техногенные чрезвычайные ситуации на объектах хранения и транспортировки сжиженных газов, в результате которых происходит образование облаков взрывоопасных или токсических газов [1–4]. В рассмотренных выше случаях за короткий промежуток времени в атмосферу поступает большое количество газообразных и твердых загрязняющих веществ, которые затем мигрируют вместе с потоками воздуха, вступают между собой в реакции, образуя опасные химические соединения, осаждаются на различные поверхности, загрязняя растительность, почву, воду.

Кроме того результаты различных физических явлений природного и техногенного происхождения могут быть охарактеризованы как выбросы инородного вещества в окружающую атмосферу и иметь серьезные последствия с точки зрения экологии и безопасности [5–7].

Результаты исследований

Рассмотрим горючий газ, истекающий в атмосферу через круглое отверстие диаметром D со скоростью U_0 в течение времени t_r. Смешение выбрасываемого газа с окружающим воздухом может быть охарактеризовано некоторым характерным временем t_{mix}. Если выброс происходит практически мгновенно (за время $t_r \le t_{mix}$), в атмосфере возникает переобогащенное топливом облако, сгорающее при зажигании в диффузионном режиме в виде огненного шара. Напротив, если продолжительность выброса значительно превосходит характерное время турбулентного смешения газа с окружающим воздухом t_{mix}, в атмосфере сформируется квазистационарная струя, зажигание которой ведет к образованию горящего факела.

Чтобы получить количественный критерий, позволяющий классифицировать выбросы конечной продолжительности, рассмотрим два типичных вида выброса при разгерметизации газовых емкостей — облако конечной массы, выпущенное с направленным начальным импульсом, и развивающуюся нестационарную струю, возникающую при резком включении источника массы и импульса. В каждом случае в качестве характерного времени смешения принимается время, за которое объемная концентрация выброшенного газа падает до верхнего концентрационного предела горения (ВКП), что дает временной масштаб процессов перемешивания, делающих газовую смесь горючей. Отметим, что используется не нижний (НКП),

а верхний предел горения, поскольку целью является описание переобогащенного топливом облака, которое при зажигании горит в диффузионном режиме. Расчет линий уровня концентрации, соответствующих НКП, обычно производят для оценки количества газа, находящегося в пределах горения, который может в случае зажигания сгорать во взрывном режиме или детонировать. Движение газа считается осесимметричным, кроме того, принимается, что время установления автомодельных распределений скорости и концентрации намного меньше характерного времени разбавления газа до ВКП. Это обусловлено тем, что при струйном истечении автомодельные распределения устанавливаются на расстояниях порядка нескольких диаметров выходного отверстия, тогда как разбавление газа до ВКП происходит на значительно больших расстояниях. Следовательно, основная часть времени разбавления приходится на автомодельную стадию. Эволюция облака мгновенного выброса может быть описана интегральной моделью.

Облако аппроксимируется конусом, размеры которого возрастают по мере движения из-за смешения с окружающим воздухом. Динамика движения облака и изменение его объема находятся интегрированием законов сохранения массы, энергии и количества движения.

Коэффициент вовлечения $\alpha C,$ равный среднему тангенсу угла расширения облака, находится в диапазоне от 0,16 до 0,58, причем большой разброс данных обусловлен внутренне присущей нерегулярностью турбулентного облака. Ниже используется наиболее типичное значение коэффициента вовлечения, принятое в литературе $\alpha C \approx 0,25.$ Увеличение объема облака за счет смешения с воздухом вполне удовлетворительно описывается формулой

$$\frac{V}{V_0} - \left(8\alpha_c \frac{\rho_r}{\rho_a} \cdot \frac{U_0 t}{D} \right)^{3/4} \approx \left(2 \frac{\rho_r}{\rho_a} \cdot \frac{U_0 t}{D} \right)^{3/4}, \qquad (1)$$

где V — текущий, V_0 — начальный объемы облака, ρ — плотность газа, индексы a и r здесь и ниже относятся к окружающему воз духу и газу на уровне выходного отверстия соответственно.

Поскольку общая масса горючего газа в облаке есть величина постоянная, его средняя объемная концентрация падает с увеличением объема как $c = \rho_b V_0 m_a / \rho_a V m_g$ (где m_a и m_g — молекулярные массы воздуха и газа), отсюда время, необходимое для разбавления газа до ВКП оценивается как

$$t_c = \frac{D}{2U_0} \cdot \left(\frac{\rho_r}{\rho_0} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{m_a}{m_g} \right)^{4/3} \cdot C_{UFL}^{-4/3}, \qquad (2)$$

где C_{UFL} — объемная концентрация, соответствующая ВКП.

Процесс смешения газа с воздухом в нестационарной (развивающейся) струе при резком включении источника может быть описан следующим образом. Как показывают эксперименты, развивающаяся струя состоит из головной части и следующей за ней конической части, которая подобна установившейся напорной струе. Аппроксимируем распределение концентрации в развивающейся струе модельным, заменив головную часть резким фронтом, находящимся на расстоянии H_j от виртуального источника, причем перед фронтом будем считать концентрацию нулевой, а за фронтом будем использовать поле концентрации в стационарной осесимметричной струе с гиперболическим законом затухания осевой концентрации и гауссовым законом распределения концентрации в радиальном направлении при $z \le H_j$:

$$C(z,r) = C_{ax}(z) \exp\left(-(r / a_j z)^2 \right),$$

$$C_{ax}(z) = B_j \frac{D}{z} \left(\frac{\rho_r}{\rho_a} \right)^{1/2} \left(\frac{m_a}{m_g} \right), \qquad (3)$$

где C_{ax} — осевая объемная концентрация, B_j — эмпирическая константа, значение которой по данным различных экспериментов находится в диапазоне от 4,0 до 5,9.

Заключение

Подводя итог проведенному анализу можно заключить, что предложенный подход позволяет правильно определять тип выброса, исходя только из геометрических параметров D, V_0, физико-химических свойств вещества C_{UFL}, m_g и начального давления P_0. Критерий представлен в виде связи (1)–(3) между безразмерными параметрами δ и ξ, что придает ему весьма широкую общность. Конечно, более детальные экспериментальные исследования с использованием различных веществ и условий истечения необходимы для всесторонней оценки точности и границ применимости данного критерия, однако уже приведенные выше сопоставления позволяют заключить, что критерий дает вполне разумные результаты.

Литература

1. *Пантелеев И. Н., Пантелеев А. И.* Математическое моделирование распространения облаков тяжелых газов при техногенных авариях // Сб. трудов VI межд. конф. ПМТУКТ-2013. – Воронеж : изд-во ВГУ, 2013. – С. 184–185.

2. *Пантелеев И. Н., Пантелеев А. И.* Моделирование распространения облаков тяжелых газов при техногенных авариях // Сб.ст. VIII Междунар. научн.-техн. конф. АЧМ-2013. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. – С. 184–188.

3. *Пантелеев И. Н., Пантелеев А. И.* Анализ взрывоопасности облаков газовоздушных смесей после техногенных аварий // Материалы IX Межд. научно-практ. конф. «Обеспечение безопасности в ЧС». – Воронеж : ВГТУ, 2013. – Ч. 1. – С. 78–83.

4. *Пантелеев И. Н., Пантелеев А. И.* Моделирование аварийного разрушения сосудов с газом под давлением // В сб. «Материалы XIII международного семинара ФММС». – Воронеж, 2015. – Ч. 2. – С. 123–128.

5. *Пантелеев И. Н.* Математическое моделирование экологического ущерба при выбросе загрязняющих веществ в атмосферу // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016». – Воронеж : Изд-во «Научная книга», 2016. – С. 261–264.

6. *Пантелеев И. Н.* Стохастический анализ загрязнений воды примесями с поверхности речного бассейна // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016». – Воронеж : Изд-во «Научная книга», 2016. – С. 264–265.

7. *Пантелеев И. Н.* Механизмы распространения загрязняющих веществ после аварийных выбросов на промышленных объектах // Современные технологии обеспечения гражданской обороны и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций: сб. ст. по материалам VIII Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. уч. 2017 г. – ФГБУ ВПО Воронежский институт ГПС МЧС России. – Воронеж, 2017. – № 1(2). – С. 428–430.

УДК 004.94

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ОБРАБОТКИ АНАЛИЗА ВИДЕОРЯДА ДИНАМИКИ ТРОПИЧЕСКОГО ЦИКЛОНА

А. А. Парамонов[1], А. В. Калач[1,2], К.А. Кузнецова[2]

[1]МИРЭА – Российский технологический университет
[2]Воронежский институт ФСИН России

Аннотация. В рамках сферы техносферной безопасности до сих пор является актуальной задача прогнозирования появления и развития природных явлений, являющихся ключевыми при создании ЧС, которые вызывают сопутствующие риски для жизни людей и разрушения объектов результата человеческого труда.

В результате работы алгоритма были выявлены характерные почти периодические значения облачной структуры тропического циклона. Полученные результаты анализа динамики развития циклона позволяют на основе выявленных значений почти периодов на ранних стадиях формирования, делать прогнозные оценки о поведении развития зон покрытия представленной динамической природной системы.

Ключевые слова: почти период, анализ данных, обработка изображений, техносферная безопасность, чрезвычайная ситуация, стихийные явления, тайфуны, тропические циклоны, динамические системы, данные с упорядоченным аргументом.

Введение

В статье [1] представлено математическое и численное моделирование течения газа в придонной части торнадо и тропического циклона. Моделирование позволяет рассчитать кинетическую энергию вихря. В работе представлен математический метод определения газодинамических параметров, разработан численный метод определения газодинамических параметров потока и кинетической энергии для различных типов торнадо по шкале Фуджиты. Реализованы эффективные алгоритмы нахождения радиуса втекания и кинетической энергии восходящих вихревых потоков. Проведен ряд вычислительных экспериментов по моделированию стационарного течения газа в придонной части потока, формирующегося у поверхности Земли. Для представленных вычислительных экспериментов рассчитана кинетическая энергия вихря. Значения кинетической энергии потока могут быть использованы для борьбы с опасными природными явлениями.

За последние пять лет в работе [2] приводятся результаты исследования тропических циклонов северо-западной части Тихого океана с акцентом на те явления, которые повлияли на погоду Дальнего Востока России. Подробно рассмотрен тайфун Лайонрок из-за его уникальной и нестандартной траектории перемещения, заметно затруднённую для прогнозирования. Было проведено моделирование пространственно-временного распределения ключевых метеорологических величин тайфуна Лайонрок с использованием мезомасштабной модели WRF-ARW. По итогам проделанной работы сделан вывод, о достаточно точной воспроизводимости моделью основных метеорологических величин изучаемого тропического циклона как в пространстве, так и во времени.

Приводятся результаты исследования тропических циклонов северо-западной части Тихого океана в [3]. Особое внимание уделяется петляющим тропическим циклонам, которые имеют нехарактерную траекторию перемещения. Исследовано влияние рассматриваемых тропических циклонов друг на друга при их взаимодействии, которое отмечалось как с помощью спутникового анализа, так и путем математического моделирования. В результате проведенного исследования удалось сделать вывод о том, что применяемая численная модель WRF-ARW

достаточно точно воспроизводит основные изучаемые метеорологические величины исследуемых тропических циклонов в пространстве и во времени, благодаря чему можно говорить о действительном взаимном влиянии природных явлений друг на друга.

В работе [4] автор показывает зависимость влияния тропической конвекции на формирование тропического циклона. Сжатие тропической конвекции задерживает и уменьшает образование тропического циклона. Это сокращение укорачивает сезоны тропических циклонов, поскольку задерживает миграцию межтропической зоны конвергенции в направлении полюсов. В сезонные пики активности циклонов экваториальные и внеэкваториальные компоненты этого сжатия связаны с изменениями окружающей среды, препятствующими образованию вихрей.

В работе [5] стоит цель продемонстрировать возможности почти периодического анализа при помощи реализованных алгоритмов, основанных на классе сдвиговых функций. Данный подход к анализу эффективен и при анализе больших объёмов данных, которые возникают, в частности, при накоплении данных о погоде.

В данной статье в качестве объекта анализа был взят тропический циклон «Нанмандол», обрушившийся на юго-западный берег Японии. Тайфун «Нанмадол» (Джози) образовался к востоку от Японии в сентябре 2022 года. Возмущение достигло стадии тропического шторма 15 сентября, а 16 сентября стадии супертайфуна. Минимальное давление в урагане составило 910 гПа — самое низкое в сезоне 2022 года. 18 сентября, находясь в фазе перехода с пиковой формы развития к стадии расформирования, тайфун «Нанмадол» обрушился на юг Японии на остров Кюсю. Тайфун вызвал большое количество осадков, повлекших за собой затопление улиц, разрушение стен зданий и ЛЭП. Метеорологической службой Японии было опубликовано, что порывы ветра в эпицентре тайфуна достигали 195 км/ч (55 м/с). Согласно официальной статистики урона от шторма в Японии, по меньшей мере, 2 человека погибли, еще 70 человек получили ранения. Без электричества остались более 200 тысяч человек. В Южной Корее ветры и дождь, вызванные тайфуном, также нанесли значительный урон. Согласно данным из открытых источников, пострадал один человек, более 700 человек были эвакуированы из своих домов, а некоторые населенные пункты страны остались без электричества [6].

1. Материалы и методы

Динамика тайфуна представлена видеорядом данных с момента формирования циклона, 15 сентября, до фазы начала разрушения структуры, 18 сентября, утром 19 сентября циклон уже потерял свою структуру. Видеозаписи проводились с рассвета до заката, пока спутниковая камера позволяла визуально фиксировать изменения в атмосфере при солнечном свете. Данные получены из открытого источника спутниковых данных [7].

Алгоритм обработки изображений включает кадрирование видеоряда; обработку и перевод изображения в изображения в чёрно-белый формат и определение центра тропического циклона; преобразование в полярные координаты; обработку обобщённой сдвигово функцией значений радиус-векторов при фиксированных полярных углах; отображение найденных почти периодов на исходных данных.

В ходе обработки значений радиус-векторов при фиксированных углах, получаем результаты закономерностей, выявленные почти периодическим анализом, результаты которого отображаются на исходных данных, представленные кадрами видеоряда. Почти периодический анализ основывается на обобщённой сдвиговой функции:

$$a(\tau,\Delta t)=\frac{1}{n-\tau-2\Delta t}\cdot\sum_{t=1}^{n-\tau-2\Delta t}\left|\ln\left(\frac{y_{t-\Delta t+\tau}\cdot y_{t+\Delta t-\tau}}{y_{t+\tau}^2}\right)-\ln\left(\frac{y_{t-\Delta t}\cdot y_{t+\Delta t}}{y_t^2}\right)\right|, \quad (1)$$

где n — общее число отсчётов функции $y(t)$;

t — целые положительные и отрицательные числа, включая ноль;

Δt — целое положительное число, сдвиг по аргументу;

τ — целое положительное число, значения почти периодов.

Применение данной функции даст возможность определить характерные почти периодические составляющие структуры исследуемого ряда с упорядоченным аргументом [8]. На основе выявленных значений почти-периодов на изображении возможно отобразить соответствующие области с выявленными радиус-векторами.

2. Результаты и обсуждение

В качестве данных для обработки выступили спутниковые видеозаписи динамики тропического тайфуна «Нинмандол». Количество анализируемых видеозаписей равно четырём. Видеозаписи проводились с момента рассвета до захода солнца, после чего, в ночное время, визуальная съёмка не проводилась. Первый шаг алгоритма обработки изображений представляет собой кадрирование исследуемого видеоряда. Пример результата обработки, представлен на рис. 1, в виде кадра с начальной структурой тайфуна.

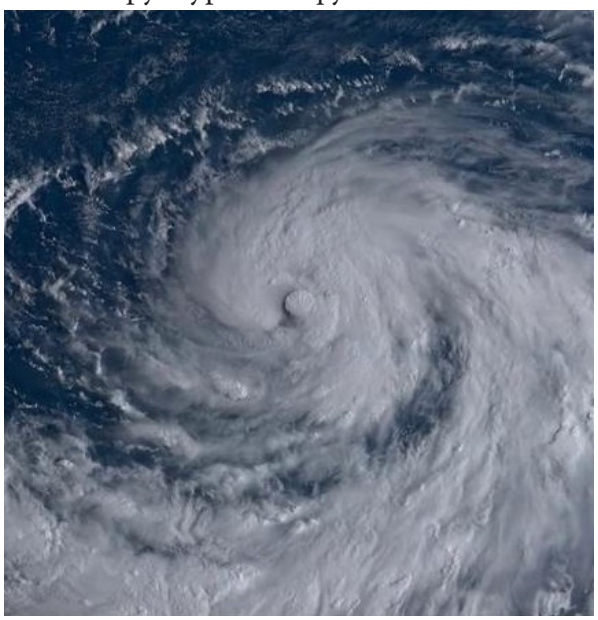


Рис. 1. Кадр из обработанного видеоряда

Следующим шагом была произведена обработка изображения по переводу его в чёрно-белый формат с размеченным центром урагана (рис. 2). Следующим шагом для анализа, являлся перевод изображения в полярные координаты (рис. 3), для возможности анализа структуры изменения значений радиус-векторов критических зон структуры тайфунов при фиксированных значениях полярных углов.

Четвёртым этапом алгоритма является обработка вектора значений при фиксированном полярном угле. Пример результата расчёта сдвиговой функции для значений радиус-векторов при фиксированном сдвиге Δt представлен на рис. 4. По полученным результатам можно заметить набор характерных минимумов, подозрительных на почти периоды. В качестве демонстрации реализации полученных почти периодов проведём отображение найденных значений кратных радиус-векторов.

Окружности, с радиусами, кратными ярко выраженному почти периоду 62, представлены на рис. 4. Как можно заметить первые два кольца от центра, выделяют наиболее плотные облачные зоны циклона. Третье кольцо характеризуется свободной зоной изменения облаков, за которым дальше тянется остальной «хвост» спирали, образованной после этого кольца тропического циклона.

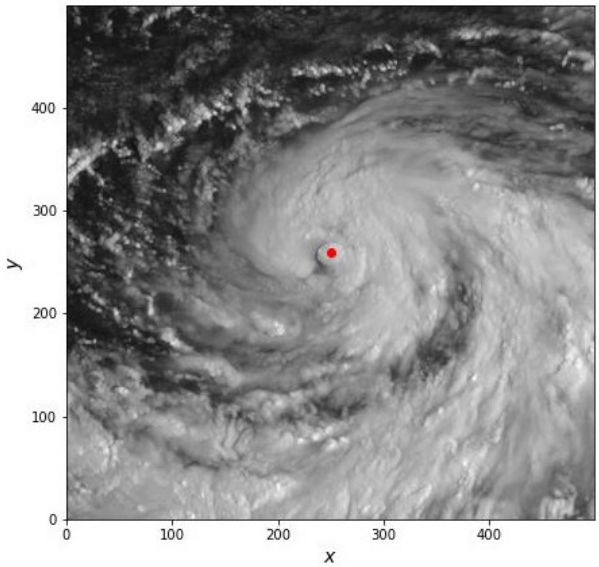


Рис. 2. Перевод изображения в чёрно-белый формат и определение центра тайфуна

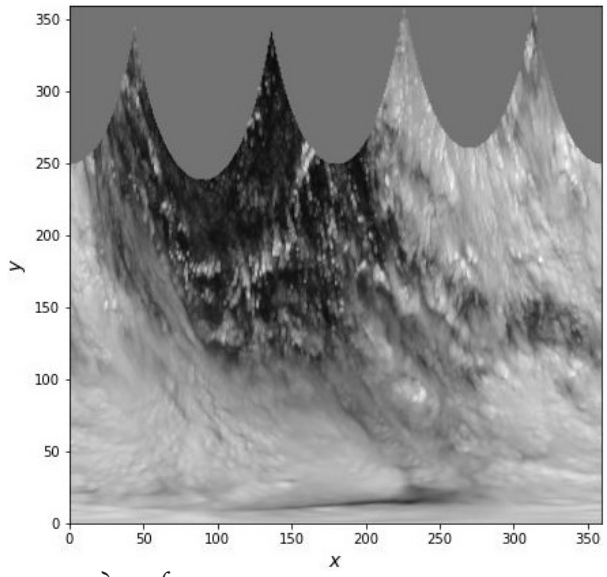


Рис. 3. Начальная стадия формирования циклона в полярных координатах

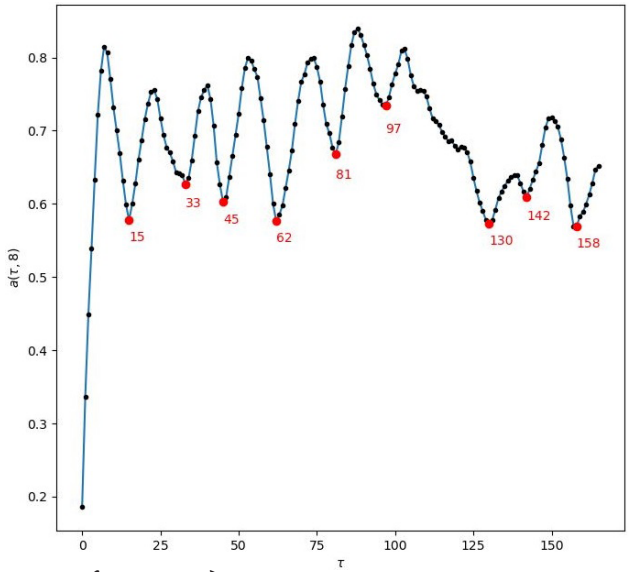


Рис. 4. Сдвиговая функция для вектора значений при угле 135 градусов

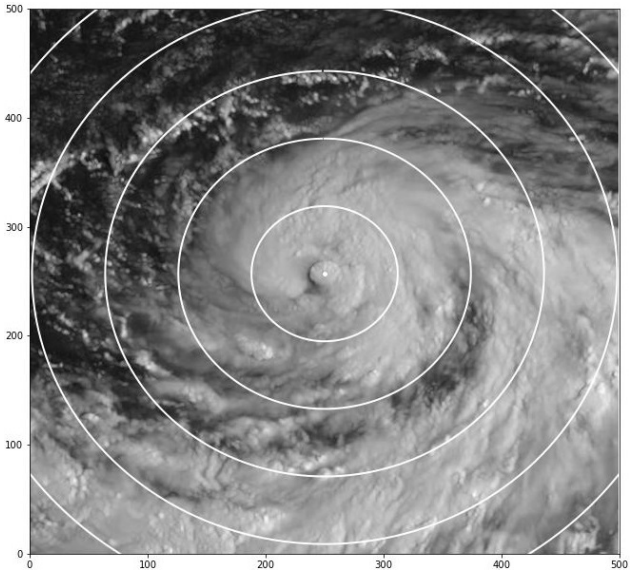


Рис. 5. Отображение кратных, почти периоду 62, радиусов на структуре тайфуна

Таким образом, выявляемые почти периодические значения радиусов зон тропического циклона в ходе анализа результатов сдвиговых функций, позволяют разделить анализируемую структуру циклона на разные зоны активности, на основе анализа облачных структур.

В ходе дальнейшего анализа представленных видео данных получены почти периоды порядка 62, 52 и 75, последние из которых представлены на рис. 6 и рис. 7.

В результате применения представленного алгоритма были обработаны четыре видео ряда с динамикой развития тропического циклона «Нанмандол» и выявлены характерные почти периодические значения, которые структурно разделяют зоны облачной активности. Наличие найденных значений почти периодов было показано на исходных данных при помощи разделения зон от центра активности тайфуна окружностями, радиусы которых кратны почти периодам.

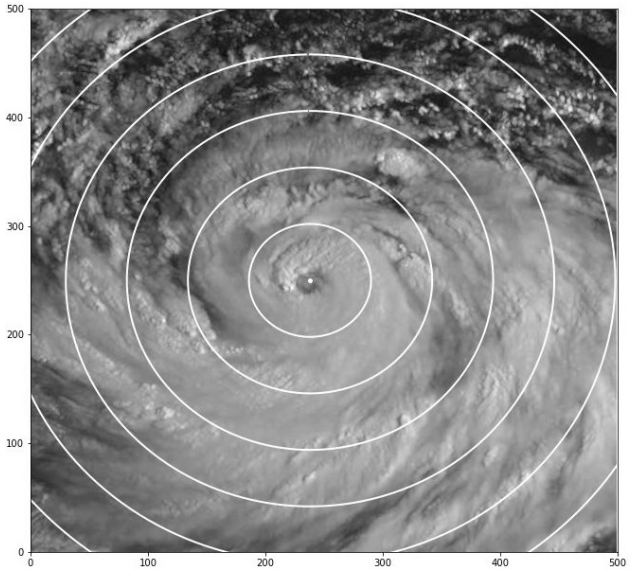


Рис. 6. Отображение кратных, почти периоду 52, радиусов на структуре тайфуна, на второй день наблюдений

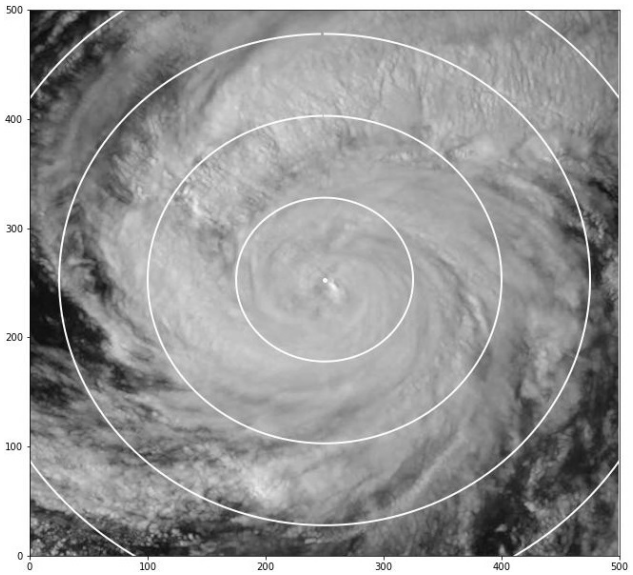


Рис. 7. Отображение кратных, почти периоду 75, радиусов на структуре тайфуна, на четвёртый день наблюдений

Заключение

Таким образом, в результате работы были выявлены характерные почти периодические значения облачной структуры тропического циклона, продолжавшегося четверо суток. Почти периодический анализ на основе сдвиговых функций показал возможности выявления критических уровней структуры тропических циклонов, результаты проиллюстрированы отрисовкой кратных почти периодам радиусов на исходном изображении. Примечательными почти периодическими радиусами на структуре тайфунов стали значения порядка 52, 62 и 75. Представленный алгоритм обработки видеоряда тропических циклонов с целью анализа структуры динамического природного явления и выявления в нём характерных почти периодических зависимостей, по полученным результатам исследования показал свою работоспособность и эффективность. Полученные результаты анализа динамики развития циклона позволяют на основе выявленных значений почти периодов на ранних стадиях формирования, делать прогнозные оценки о поведении развития зон покрытия представленной динамической природной системы.

Литература

1. *Opryshko O. V.* Numerical Simulation of Nea-Bottom Parts Of A Tornado And A Tropical Cyclone In A Stationary Case // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2023. – Vol. 10, No 1. – P. 30–43. – DOI 10.14529/jcem230104.

2. *Озерова Н. А.* Исследования тропических циклонов северо-западной части Тихого океана // Современные тенденции и перспективы развития гидрометеорологии в России: Материалы V Всероссийской научно-практической конференции, Иркутск, 23–25 ноября 2022 года / Отв. редактор Е.Н. Сутырина. – Иркутск: Иркутский государственный университет, 2023. – С. 253–257.

3. *Озерова Н. А.* Исследование особенностей эволюции тропических циклонов, влияющих на погоду Дальнего Востока России // European Journal of Natural History. – 2023. – № 1. – С. 29–34.

4. *Zhang G.* Warming-induced contraction of tropical convection delays and reduces tropical cyclone formation // Nature Communications. – 2023. – Vol. 14, No. 1. – P. 6274. – DOI 10.1038/s41467-023-41911-5.

5. *Парамонов А. А.* Современные аспекты анализа больших данных с упорядоченным аргументом / А. А. Парамонов, Т. Е. Смоленцева, А. В. Калач // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04–06 декабря 2023 года. – Воронеж: Общество с ограниченной ответственностью «Вэлборн», Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 609–613.

6. Аэрокосмос [Электронный ресурс]. – URL: http://www.aerocosmos.info/news/detail.php?ELEMENT_ID=6199 (дата обращения: 02.10.2024).

7. Himawari-8 in real time [Электронный ресурс]. – URL: https://himawari8.nict.go.jp/ (дата обращения: 02.10.2024).

8. *Крынецкий Б. А., Данилова В. А., Парамонов А. А., Смоленцева Т. Е., Калач А. В.* «Программа для определения почти-периодов в эмпирических данных с упорядоченным аргументом на основе сдвиговой функции» – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024663550 Российская Федерация. Сдвиговая функция на основе мультипроцессорной обработки: № 2024663550: заявл. 21.05.2024: опубл. 07.06.2024; заявитель Федеральное казенное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский институт Федеральной службы исполнения наказаний».

УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО РАЗРЕШЕНИЮ СИГНАЛОВ В НЕРЕГУЛЯРНОМ ОКЕАНИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ ГОЛОГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

С. А. Переселков[1], В. М. Кузькин[2], И. М. Косенко[1], А. С. Переселков[1]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Институт общей физики им. А. М. Прохорова Российской академии наук

Аннотация. Представлены результаты численного эксперимента по разрешению сигналов источников в случайно-неоднородной океанической среде голографическим методом. Описан голографический метод разрешения сигналов от различных источников. В рамках численного эксперимента показано, что результирующая голограмма сигналов нескольких источников представляет собой сумму голограмм сигналов, формирующихся невозмущёнными и возмущёнными полями. Результаты численного моделирования представлены для случая двух источников в присутствии интенсивных внутренних волн, вызывающих горизонтальную рефракцию мод звукового поля. Продемонстрирован метод очищения голограммы от возмущённых полей. Предложены критерии разрешения сигналов.
Ключевые слова: голографическая обработка, неоднородная среда, спектральная плотность, разрешение сигналов, интенсивные внутренние волны.

Введение

Одна из актуальных, но слабо изученных проблем в обработке гидроакустических сигналов связана с обеспечением высокой устойчивости к помехам в условиях, когда свойства среды изменяются как в пространстве, так и во времени. Дополнительной сложностью является необходимость адаптации методов к изменяющимся условиям распространения звуковых волн. Применяемые в гидроакустике подходы не учитывают устойчивую структуру интерференционной картины, создаваемой широкополосными источниками. Недавние теоретические исследования, а также натурные и численные эксперименты показали, что эффективным решением может стать использование голографических подходов обработки гидроакустических сигналов [1–3]. Этот подход позволяет сосредоточить спектральную плотность сигнала в ограниченной области голограммы, что существенно снижает влияние помех и повышает общую устойчивость метода. Голографический метод открывает новые возможности в анализе сигналов малошумных источников, опираясь на особенности интерференции. Разработанные методы продемонстрировали свою эффективность при работе в неоднородных волноводах, где пространственно-временные возмущения, такие как интенсивные внутренние волны, существенно влияют на распространение звукового поля [4–8]. Ключевая особенность голографического подхода заключается в разделении на голограмме областей, соответствующих невозмущённым и возмущённым компонентам поля. Это позволяет устранить или минимизировать искажения, связанные с нерегулярностью. Такой эффект впервые был зафиксирован в эксперименте SWARM-95 [4, 5], где внутренняя волновая активность вызывала горизонтальную рефракцию и взаимодействие мод акустического поля.

Голографическая обработка гидроакустических сигналов предоставляет эффективные инструменты для решения важных задач, таких как обнаружение слабошумных источников [9–11], определение их местоположения и пеленга [12–17]. Кроме того, модовая голография [18–20] обеспечивает возможность выделения отдельных мод звукового поля.

Одним из значимых приложений голографического подхода является разрешение нескольких шумовых сигналов с использованием одного приёмного устройства. Впервые решение

этой задачи было предложено в [21] на основе численного моделирования, выполненного для регулярного волновода с интенсивными помехами, маскирующими сигналы.

В данной работе представлены результаты численного эксперимента по разрешению сигналов от нескольких источников в условиях нестабильной океанической среды с использованием голографического метода. Предложен алгоритм, позволяющий эффективно восстанавливать сигналы с минимальными искажениями на фоне неоднородностей среды. Разработаны критерии разрешения сигналов при использовании одного приёмника. Представленные результаты численного моделирования демонстрируют разрешение двух шумовых сигналов при наличии внутренних волн, вызывающих горизонтальную рефракцию мод звукового поля, а также оценены параметры движущихся источников.

1. Голографический метод разрешения голограмм сигналов

На голограмме спектральные плотности шумовых сигналов, обусловленные невозмущенным и возмущенным волновыми полями, локализованы в разных областях, которые практически не пересекаются. В результате появляется возможность получения голограмм незначительно искаженных шумовых сигналов при наличии неконтролируемых неоднородностей среды. Очищение голограммы от возмущений среды основано на вырезании спектральной плотности на временном интервале $2\delta\tau = 2/\Delta f$ вдоль оси частоты ν. Метод очистки не требует предварительного знания о характере возмущения и сигналов. Если теперь к очищенной голограмме применить двумерное обратное преобразование Фурье, то восстановленная интерферограмма преимущественно будет представлять собой муаровую картину из локализованных полос отдельных сигналов, сформированных невозмущенным полем. Очищенную от возмущения голограмму можно использовать для разрешения шумовых сигналов, мало искаженных неоднородностями среды. Под разрешением сигналов понимается их раздельное обнаружение и определение параметров источников. В качестве критерия разрешающей способности принимается точность, с которой параметры (пеленг, радиальная скорость, удаление, глубина) каждого источника определяются при наличии других источников. Механизм разрешения сигналов основан на том, что результирующая голограмма приближенно рассматривается как линейная суперпозиция голограмм отдельных сигналов.

Разрешение сигналов осуществляется следующим образом. Вначале на голограмме выделяется область локализации спектральной плотности наиболее мощного сигнала. Она вырезается и по отношению к очищенной голограмме применяется обратное двумерное преобразование Фурье по восстановлению интерферограммы. Выделяя последовательно на голограмме области локализации отдельных сигналов и вырезая их, будем получать голограммы и интерферограммы менее интенсивных сигналов. Возможности очистки ограничены входным отношением с/п. С каждым шагом очистки восстанавливаемая голограмма сигнала будет все больше отличаться от оригинала его голограммы в отсутствие возмущения среды. Это обусловлено тем, что при вырезании локализованной области одного из сигналов частично могут вырезаться и спектральные плотности других, менее интенсивных сигналов. Эффект преимущественно будет проявляться в областях расположения малых номеров фокальных пятен, т. е. будут ослабляться и искажаться низкочастотные компоненты. Механизм очистки может приводить к искажению голограммы и соответственно к повышению погрешности определения параметров источников при увеличении шага очистки. Так как вырезание изменяет только распределение спектральной плотности, то оно должно незначительно влиять на положение максимумов фокальных пятен и форму интерферограммы. Для повышения точности восстановления параметров источников следует использовать фокальные пятна высших номеров. В качестве критерия разрешения сигналов положим требование, чтобы их спектральные плотности на голограмме не пересекались. Для выполнения этого условия достаточно потребовать

не пересечения спектральных плотностей их первых фокальных пятен. Если спектральные плотности сигналов расположены в разных квадрантах голограммы (радиальные скорости источников имеют разные знаки), то возможности разделения сигналов улучшаются.

2. Численный эксперимент

В рамках численного моделирования рассмотрим разрешение двух шумовых сигналов с применением одиночного приемника на фоне интенсивных внутренних волн (ИВВ), вызывающих горизонтальную рефракцию мод звукового поля. Распределение скорости звука по глубине приведено на рис. 1. Диапазон частот $\Delta f = 100 - 120$ *Гц*. Параметры жидкого поглощающего дна: отношение плотности грунта и воды $\rho = 1.8$, комплексный показатель преломления $n = 0.84(1 + 0.03i)$. Поле формируется $M = 4$ модами. Постоянные распространения мод $h_m(f_0)$ и их производные по частоте $dh_m(f_0)/df$ на средней частоте спектра $f_0 = 110$ *Гц* приведены в табл. 1.

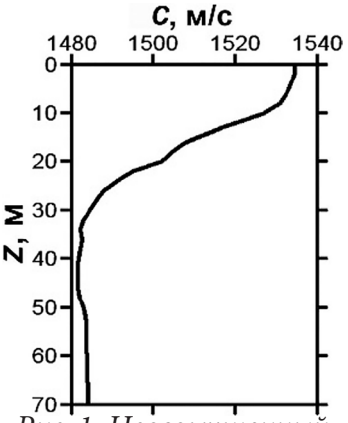


Рис. 1. Невозмущенный профиль скорости звука

Таблица 1

Параметры мод при частоте $f_0 = 110$ *Гц*

Номера мод, m	1	2	3	4
h_m, $м^{-1}$	0.4635	0.4557	0.4450	0.4310
$(dh_m/df)/10^{-3}$, $с/м$	2.4015	2.4177	2.4504	2.5172

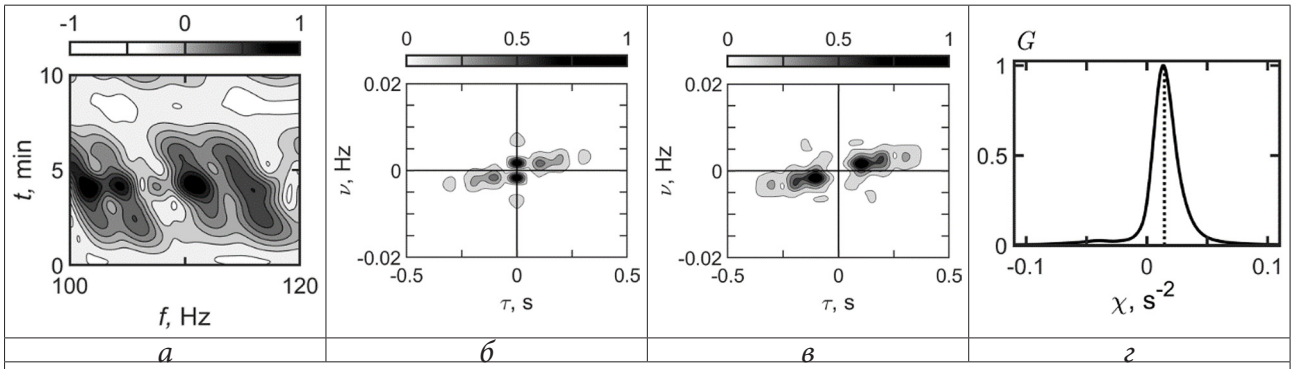
В начальный момент времени $t_0 = 0$ расстояние между источниками и приемником $r_{0(1,2)} = 12$ *км*. Радиальные скорости источников: $w_{(1)} = -1$ *м/с*, $w_{(2)} = -4$ *м/с*. Источники расположены на глубине $z_{(1,2)} = 15$ *м*, одиночный приемник — на глубине $z_q = 65$ *м*. Равномерный спектр шумоизлучения, интенсивность одинаковая. Шумовые реализации длительностью $T = 4$ *с* звукового давления регистрируются с периодичностью $T_* = 5$ *с*. Модель возмущения: цуг ИВВ, состоящий из трех одинаковых солитонов. Параметры солитона: амплитуда $A = 20$ *м*, ширина $\eta = 200$ *м*, скорость $u = 0.7$ *м/с*. Период между солитонами $\Lambda = 250$ *м*. Ширина фронта возмущения превышает длину трассы. Время наблюдения $\Delta t = 10$ *мин*.

Результаты голографической обработки в отсутствие ИВВ по сигналам отдельных источников и суммарному сигналу двух источников представлены на рис. 2–4. Угловые коэффициенты наклона интерференционных полос: $\delta f_{(1)}/\delta t_{(1)} = -0.015\,c^{-2}$ (рис. 2а); $\delta f_{(2)}/\delta t_{(2)} = -0.062\,c^{-2}$ (рис. 3а). Координаты пиков первых фокальных пятен: $\tau_{1(1)} = 0.075$ *с*, $\nu_{1(1)} = 0.0019$ *Гц* (рис. 2б); $\tau_{1(2)} = 0.077$ *с*, $\nu_{1(2)} = 0.0068$ *Гц* (рис. 3б). Восстановленные параметры источников: $w_{(1)} = -1.12$ *м/с*, $r_{0(1)} = 12.21$ *км*; $w_{(2)} = -3.93$ *м/с*, $r_{0(2)} = 12.53$ *км*. Положения максимумов функций обнаружения: $\varepsilon_{(1)} = 0.015$ c^{-2} (рис. 2в); $\varepsilon_{(2)} = 0.062$ c^{-2} (рис. 3в). Ширина полосы функции обнаружения на уровне 0.5 от максимума: $\Delta\chi_{(1)} = 0.018$ c^{-2}; $\Delta\chi_{(2)} = 0.037$ c^{-2}.

На интерферограмме суммарного поля (рис. 4а) прослеживаются перекрывающиеся интерференционные полосы сигналов двух источников, т.е. сигналы источников не интерферируют между собой. На голограмме (рис. 4б) спектральные плотности сигналов практически не накладываются друг на друга, поэтому координаты фокальных пятен, определяющие коорди-

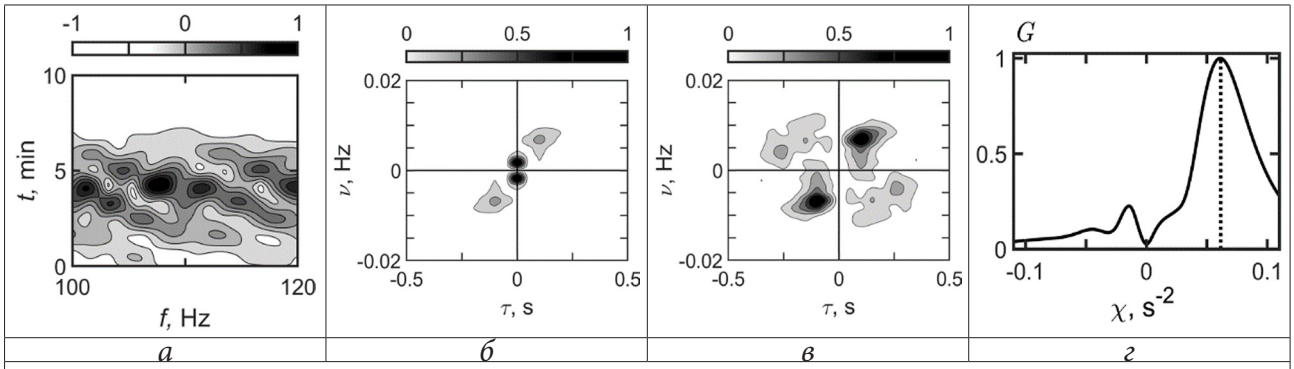
наты источников, не изменяются. Максимумы функций обнаружения (рис. 4в) приходятся на значения угловых коэффициентов, отвечающих отдельным сигналам. При равной мощности излучения, как видно из рис. 4в, максимум функции обнаружения, отвечающий первому сигналу, в 1.93 раза превышает максимум, второго сигнала. Это различие связано с увеличением ширины полосы функции обнаружения. Таким образом, в отсутствие ИВВ сигналы двух источников разрешаются.

Результаты голографической обработки при наличии ИВВ показаны на рис. 2–4. ИВВ вызывают размытие интерференционных полос отдельных сигналов. Угловые коэффициенты наклона локализованных полос $\delta f_{(1)} / \delta t_{(1)} = -0.014\, c^{-2}$ (рис. 2а); $\delta f_{(2)} / \delta t_{(2)} = -0.063\, c^{-2}$ (рис. 3а).



а *б* *в* *г*

Рис. 2. Нормированные интерферограмма (а), модуль неочищенной голограммы (б), модуль голограммы после очистки (в) и функция обнаружения очищенной голограммы (г) в присутствии ИВВ. Источник двигается с радиальной скоростью $w_{(1)} = -1$ *м/с*



а *б* *в* *г*

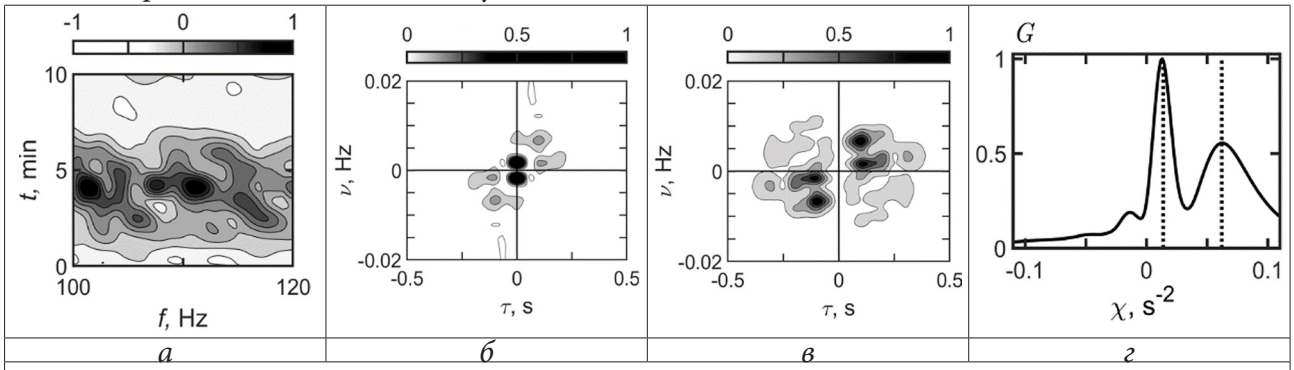
Рис. 3. Нормированные интерферограмма (а), модуль неочищенной голограммы (б), модуль голограммы после очистки (в) и функция обнаружения очищенной голограммы (г) в присутствии ИВВ. Источник двигается с радиальной скоростью $w_{(2)} = -4$ *м/с*

Изменение угла наклона интерференционных полос по сравнению со случаем отсутствия ИВВ не заметно. На оси частоты неочищенных голограммах (рис. 2б, 3б) наблюдаются спектральные плотности в форме фокальных пятен, обусловленных интерференцией волн возмущенного поля. Интенсивность этих спектральных пятен существенно превышает интенсивность фокальных пятен невозмущенных сигналов, что обусловлено большим временем наблюдения. Очищенные от ИВВ спектральные плотности голограмм вдоль оси частоты представлены на рис. 2в, 3в. Координаты пика первых фокальных пятен: $\tau_{1(1)} = 0.077\, c, \nu_{1(1)} = 0.0017$ *Гц* (рис. 2в); $\tau_{1(2)} = 0.077$ *c*, $\nu_{1(2)} = 0.0070$ *Гц* (рис. 3в). Восстановленные параметры источников: $w_{(1)} = -0.96$ *м/с*, $r_{0(1)} = 12.53$ *км*; $w_{(2)} = -4.06$ *м/с*, $r_{0(2)} = 12.53$ *км*.

Как видно, при очистке голограмм ИВВ практически не влияют на восстановленные параметры отдельных источников. Положения максимумов функций обнаружения: $\varepsilon_{(1)} = 0.015\, c^{-2}$ (рис. 2г); $\varepsilon_{(2)} = 0.061\, c^{-2}$ (рис. 3г). Ширина полосы функции обнаружения на уровне 0.5 от мак-

симума: $\Delta\chi_{(1)} = 0.020\ c^{-2};\ \Delta\chi_{(2)} = 0.051\ c^{-2}$. В области отрицательных значений χ для второго сигнала наблюдается незначительный максимум функции обнаружения, отвечающий интерференции невозмущенных и возмущенных волновых полей источника. Максимум в 4.14 раза меньше пика невозмущенного сигнала.

Интерферограмма суммарного поля (рис. 4а) представляет собой совокупность фокальных пятен на фоне размытой интерференционной картины. На неочищенной голограмме (рис. 4б), как и в случае отдельных сигналов источников (рис. 2б, 3б), на оси частоты регистрируются фокальные пятна возмущенного поля, которые по интенсивности намного превышают интенсивность фокальных пятен невозмущенных сигналов.



а *б* *в* *г*

Рис. 4. Нормированные интерферограмма (а), модуль неочищенной голограммы (б), модуль голограммы после очистки (в) и функция обнаружения очищенной голограммы (г) в присутствии ИВВ, сформированные сигналами двух источников

На очищенной голограмме (рис. 4в) координаты пиков первых фокальных пятен совпадают с координатами пиков фокальных пятен отдельных сигналов. Восстановленные параметры источников идентичны параметрам отдельных источников. Положения максимумов функции обнаружения сигналов: $\varepsilon_{(1)} = 0.015\ c^{-2},\ \varepsilon_{(2)} = 0.063\ c^{-2}$ (рис. 4г). Максимум первого сигнала в 1.81 раз превышает максимум второго сигнала. Максимум, обусловленный интерференцией невозмущенных и возмущенных полей источников, лежащий в области отрицательных значений χ, в 2.91 раза меньше максимума второго сигнала. Сигналы двух источников разрешаются, восстанавливаемые параметры источников обнаруживают весьма слабую чувствительность к присутствию ИВВ при большом времени наблюдения.

Заключение

Представлены результаты численного эксперимента по разрешению сигналов источников в случайно-неоднородной океанической среде голографическим методом. Описан голографический метод разрешения сигналов от различных источников. В рамках численного эксперимента показано, что в условиях пространственно-временной изменчивости океанической среды голограмма, созданная несколькими шумовыми сигналами, представляет собой совокупность голограмм отдельных сигналов, формирующихся за счёт невозмущённых и возмущённых полей. Голограммы каждого источника формируются компонентами невозмущённого и возмущённого поля с чётко выраженными фокусировками, расположенными в разных областях итоговой голограммы. Кроме того, на голограмме присутствует слабоконтрастный размазанный фон, образуемый интерференцией этих двух полей. На голограмме спектральная плотность сигналов, обусловленная возмущённым полем, концентрируется в узкой полосе вдоль оси частот, ширина которой определяется частотным диапазоном. В то же время спектральная плотность сигналов, вызванная невозмущённым полем, локализуется в узких полосах, ширина которых зависит от времени наблюдения, а наклон определяется параметрами

движения источников. Такая конфигурация спектральных плотностей позволяет с высокой точностью фиксировать голограммы отдельных сигналов и на их основе восстанавливать радиальные скорости и расстояния до источников.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/.

Литература

1. *Переселков С. А.* Голографическая обработка широкополосных гидроакустических сигналов / С. А. Переселков, В. М. Кузькин. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2023. – 183 с.

2. *Pereselkov S. A.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization / S. A. Pereselkov, V. M. Kuz'kin // J. Acoust. Soc. Am. – 2022. – Vol. 151, № 2. – P. 666–676.

3. *Ehrhardt M.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water / M. Ehrhardt, S. A. Pereselkov, V. M. Kuz'kin, I. Kaznacheev, P. Rybyanets // J. Sound Vibr. – 2023. – Vol. 544. – P. 117388.

4. *Kuz'kin V. M.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, V. G. Zvyagin, Yu. A. Malykhin, D. Yu. Prosovetskiy // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 160–167.

5. *Badiey M.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II / M. Badiey, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskiy, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, № 4. – P. 313–319.

6. *Kaznacheeva E. S.* Interferometric processing of hydroacoustic information in the presence of intense internal waves / E. S. Kaznacheeva, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov // Phys. Wave Phenom. – 2021. – Vol. 29, № 3. – P. 278–284.

7. *Pereselkov S.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction / S. Pereselkov, V. Kuz'kin, M. Ehrhardt, S. Tkachenko, P. Rybyanets, N. Ladykin // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11, № 10. – P. 1922.

8. *Kuz'kin V. M.* Robustness of holographic processing of hydroacoustic signals in the presence of intense internal waves / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, M. Badiey, N. V. Ladykin, A. Yu. Malykhin, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2023. – Vol. 31, № 5. – P. 346–354.

9. *Казначеев И. В.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником / И. В. Казначеев, Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2018. – Т. 64, № 1 – С. 33–45.

10. *Кузькин В. М.* Обнаружение источника в диспергирующих средах / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, Ю. В. Матвиенко, С. А. Ткаченко // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344

11. *Kuz'kin V. M.* Range of detection of underwater sound source / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, S. A. Tkachenko, Yu. V. Matvienko, Yu. A. Khvorostov // Phys. Wave Phenom. – 2023. – Vol. 31, № 5. – P. 339–345.

12. *Кузнецов Г. Н.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море / Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

13. *Kuznetsov G. N.* Interferometric method for estimating the velocity of a noise sound source and the distance to it in shallow water using a vector-scalar receiver / G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, I. V. Kaznacheev, V. A. Grigor'ev // Phys. Wave Phenom. – 2017. – Vol. 25, № 4. – P. 299–306.

14. *Kuz'kin V. M.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, G. N. Kuznetsov, I. V. Kaznacheev // Phys. Wave Phenom. – 2018. – 26, № 1. – P. 63–73.

15. *Kuznetsov G. N.* finding of a noise sound source / G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskiy// Phys. Wave Phenom. – 2019. – T. 27, № 3. – P. 237–241.

16. *Кузькин В. М.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, П. В. Рыбянец // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 2. – С. 197–204.

17. *Кузькин В. М.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, Н. В. Ладыкин, М. В. Куцов // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2023. – Т.15, № 3. – С. 317-326.

18. *Kuz'kin V. M.* Mode selection in oceanic waveguides / V. M. Kuz'kin, Yu. V. Matvienko, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskii, E. S. Kaznacheeva // Phys. Wave Phenom. – 2022. – Vol. 30, № 2. – P. 111–118.

19. *Kuz'kin V. M.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves / V. M. Kuz'kin, Yu. V. Matvienko, S. A. Pereselkov, E. S. Kaznacheeva, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2022. –Vol. 30, № 5. – P. 314–320.

20. *Кузькин В. М.* Выделение мод шумового источника в мелком море методом голографической интерферометрии в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, П. В. Рыбянец // РЭНСИТ: Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. –Т.14, № 3. – С. 279–286.

21. *Kuz'kin V. M.* Resolving power of the interferometric method of source localization / V. M. Kuz'kin, G. N. Kuznetsov, S. A. Pereselkov, V. A. Grigor'ev // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 150–159.

УДК 519.635.1

СРАВНЕНИЕ НЕЯВНЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ

М. И. Попов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе сравниваются два подхода к построению неявных конечно-разностных схем для неоднородного бигармонического уравнения в задаче об изгибе прямоугольной пластины, защемленной по контуру. В первом, производные аппроксимируются центральными разностями, со вторым порядком погрешности, образуя 13-точечный шаблон. Во втором, посредством введения приведенного момента, бигармоническое уравнение распадается на систему двух уравнений Пуассона. Производные в каждом из уравнений заменяются центральными разностями, со вторым порядком погрешности, образуя 5-точечный крест. На тестовом примере сравниваются абсолютные погрешности обеих схем.

Ключевые слова: изгиб пластины, бигармоническое уравнение, уравнение Пуассона, конечно-разностная схема, аппроксимация производной.

Введение

Неоднородное бигармоническое уравнение возникает при моделировании изгиба пластин, а также свободной конвекции ньютоновской жидкости в кондуктивно-ламинарном режиме [1]. Существуют аналитические решения в виде рядов для некоторых постановок. Плохая сходимость тригонометрических рядов заставляет учитывать большое количество членов ряда для приемлемой точности. Поскольку в выражения для коэффициентов ряда входят тригонометрические и гиперболические функции, в расчетах требуются сотни десятичных разрядов. Эти два обстоятельства существенным образом увеличивают время расчета. В связи с этим для решения подобных задач становится актуальным использование численных методов [2, 3].

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую жесткую прямоугольную пластину. На каждой границе пластина защемлена, а во внутренних точках действует сила $q(x,y)$ (рис. 1). Прогиб пластины $w(x,y)$ в данных условиях, как известно, описывается уравнением Софи-Жермен. Таким образом, получаем следующую краевую задачу в области $\Omega = [0;a]\times[0;b]$ [4]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2} = \frac{q(x,y)}{D}. \tag{1}$$

$$w(0,y) = w(a,y) = w(x,0) = w(x,b) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w(0,y)}{\partial x} = \frac{\partial w(a,y)}{\partial x} = \frac{\partial w(x,0)}{\partial y} = \frac{\partial w(x,b)}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость.

Уравнение (1) содержит 3 производные 4 порядка. Для обеспечения 2 порядка точности, четвертые производные по x и y необходимо аппроксимировать, используя как минимум 5 точечный шаблон, смешанную производную — 9 точечный. Это несколько усложняет конечно-разностную схему, так как приходится решать систему линейных уравнений с более плотной матрицей. Для упрощения схемы понизим порядок уравнения. Представим уравнение (1) в виде:

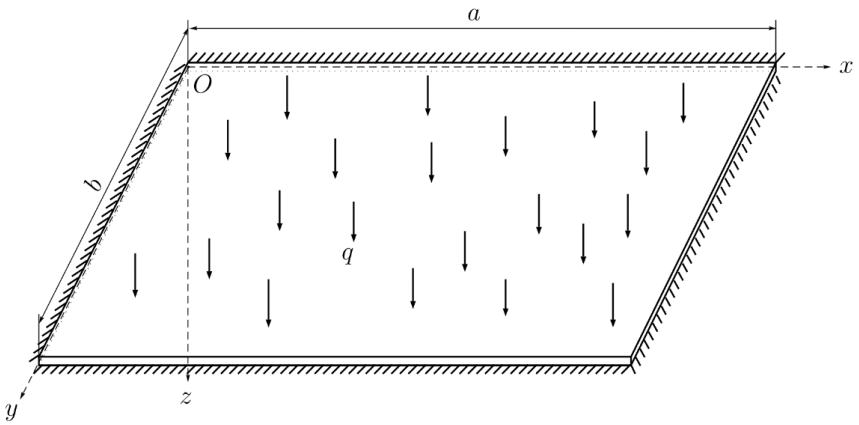


Рис. 1. Изгибаемая пластина

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\frac{q}{D}. \tag{4}$$

Определим приведенный момент M [5]:

$$M=\frac{M_x+M_y}{1+\nu}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

где M_x, M_y — изгибающие моменты.

Подставив приведенный момент в уравнение (4), получим:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}=-q.$$

Таким образом, уравнение (1) эквивалентно системе 2 уравнений Пуассона:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\dfrac{M}{D},\\[2ex] \dfrac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 M}{\partial y^2}=-q.\end{cases} \tag{5}$$

2. Разностная схема для бигармонического уравнения

Составим конечно-разностную схему 2 порядка точности для краевой задачи (1)–(3). Для этого непрерывную область Ω, заменим сеткой с шагами Δx, Δy, $\grave{U}_{\Delta x,\Delta y}=\{(x_i,y_j)=(i\Delta x, j\Delta y)\}$, $i=0,..,n$, $j=0,..,m$. Конечно-разностный аналог частной производной четвертого порядка $\partial^4 u/\partial x^4$ получим с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа построенного в узлах $w_{i+2,j}$, $w_{i+1,j}$, $w_{i,j}$, $w_{i-1,j}$, $w_{i-2,j}$ [6]:

$$\left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right|_{i,j}=\frac{w_{i+2,j}-w_{i+1,j}+6w_{i,j}-4w_{i-1,j}+w_{i-2,j}}{\Delta x^4}+O\left(\Delta x^2\right).$$

Аналогично получим разностное выражение для $\partial^4 u/\partial y^4$:

$$\left.\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right|_{i,j}=\frac{w_{i,j+2}-w_{i,j+1}+6w_{i,j}-4w_{i,j-1}+w_{i,j-2}}{\Delta y^4}+O\left(\Delta y^2\right).$$

Применив центральные разности дважды по соответствующим переменным, составим разностное выражение для смешанной производной:

$$\left.\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y^2}\Big(w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j+1} + 4w_{i,j} - 2w_{i,j-1} +$$

$$+ w_{i-1,j+1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j-1}\Big) + O\left(\Delta x^2, \Delta y^2\right).$$

Подставив в уравнение (1) аппроксимации производных и отбросив слагаемые второго порядка малости, получим разностное уравнение:

$$\frac{w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}}{\Delta x^4} + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2}\Big(w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j+1} +$$

$$+4w_{i,j} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j+1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j-1}\Big) + \frac{w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}}{\Delta y^4} = \frac{q_{i,j}}{D}. \quad (6)$$

Граничные условия отсутствия прогибов на границе (2), накладываемые на искомую функцию приобретут вид:

$$w_{0,j} = w_{n,j} = w_{i,0} = w_{i,m} = 0. \quad (7)$$

Граничное условие (3) аппроксимируем левосторонней и правосторонней разностями второго порядка [7]:

$$\frac{-3w_{0,j} + 4w_{1,j} - w_{2,j}}{2\Delta x} = \frac{3w_{n,j} - 4w_{n-1,j} + w_{n-2,j}}{2\Delta x} =$$

$$= \frac{-3w_{i,0} + 4w_{i,1} - w_{i,2}}{2\Delta y} = \frac{3w_{i,m} - 4w_{i,m-1} + w_{i,m-2}}{2\Delta y} = 0.$$

Откуда

$$w_{i,2} = 4w_{i,1},\ w_{i,m-2} = 4w_{i,m-1},\ w_{2,j} = 4w_{1,j},\ w_{n-2,j} = 4w_{n-1,j}. \quad (8)$$

Таким образом, непрерывная краевая задача (1)–(3) свелась к конечно-разностной схеме (6)–(8). Для удобства назовем ее схема 1. Построенная схема имеет неявный характер, поэтому абсолютно устойчива.

3. Разностная схема для системы уравнений с приведенным моментом

Для краевой задачи (5), (2), (3) также составим конечно-разностную схему 2 порядка точности. Аппроксимацию вторых производных прогиба и приведенного момента получим, применив центральные разности второго порядка:

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right),\ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O\left(\Delta y^2\right),$$

$$\left.\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right|_{i,j} = \frac{M_{i+1,j} - 2M_{i,j} + M_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right),\ \left.\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{M_{i,j+1} - 2M_{i,j} + M_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O\left(\Delta y^2\right).$$

Подставив эти выражения в систему (5) и отбросив слагаемые второго порядка малости, получим систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \dfrac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -\dfrac{M_{i.j}}{D}, \\ \dfrac{M_{i+1,j} - 2M_{i,j} + M_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \dfrac{M_{i,j+1} - 2M_{i,j} + M_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -q_{i,j}. \end{cases} \quad (9)$$

Граничные условия на прогибы выражаются равенствами (7) и (8). Граничные условия на приведенный момент отсутствуют, что компенсируется двумя граничными условиями на прогибы пластины. Схему (9), (8), (7) для удобства назовем схемой 2.

4. Решение тестовых задач

Для сравнения разностных схем проведем численные эксперименты. Для простоты рассмотрим безразмерную квадратную пластину. В области $\Omega = [0;1]\times[0;1]$ введем равномерную сетку с шагами $\Delta x = \Delta y = h$.

На рис. 2 изображены расчетные шаблоны для схем 1 и 2. Желтые круги — узлы разностного уравнения. Розовые — узлы граничного условия равенства нулю производных. Цифры внутри кругов — весовые коэффициенты.

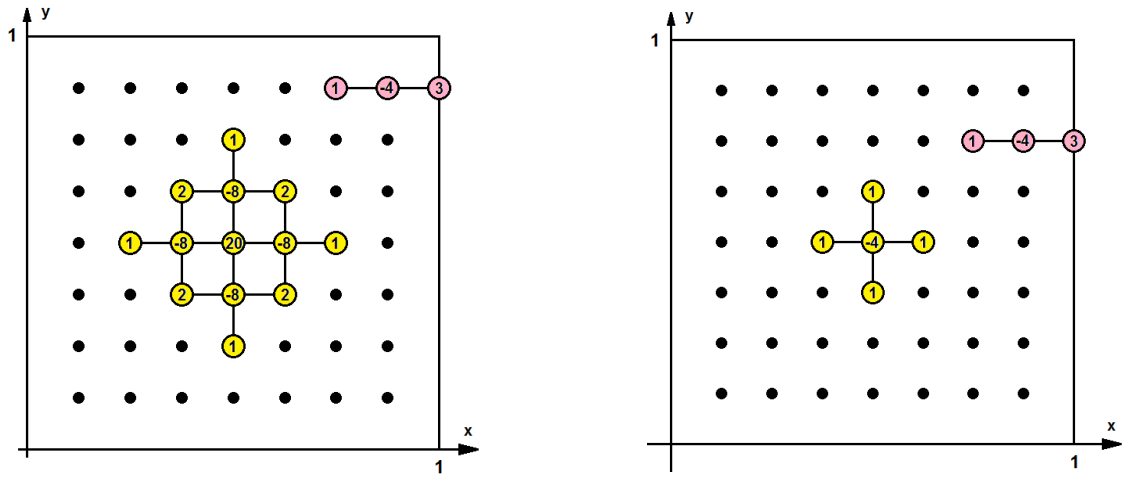


Рис. 2. Расчетные шаблоны: слева для схемы 1, справа для схемы 2

В качестве тестовой функции для прогибов рассмотрим синусоидальную $w(x,y) = \frac{1}{32}\sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y)$ функцию. Нетрудно увидеть, что она удовлетворяют граничным условиям, а также условиям, при которых пластину можно считать тонкой и жесткой. Данная функция имеет единственный максимум в центре квадрата.

Сравнивать разностные схемы будем по двум параметрам: максимальная абсолютная погрешность и время расчета. Максимальная абсолютная погрешность достигается в центре квадрата. В табл. 1 приведены максимальные абсолютные погрешности и время расчета обеих схем для различных значений шага сетки.

Таблица 1

Расчет прогибов для тестовой функции

Шаг сетки	Максимальная абсолютная погрешность		Время выполнения программы, с	
	Схема 1	Схема 2	Схема 1	Схема 2
1/10	9,18E-4	9,18E-4	2	4
1/20	3,76E-4	3,76E-4	3	13
1/30	1,88E-4	1,88E-4	14	47
1/40	1,11E-4	1,11E-4	98	225
1/50	7,34E-5	7,34E-5	174	398
1/60	5,2E-5	5,2E-5	369	884
1/70	3,87E-5	3,87E-5	818	1675
1/80	3E-5	3E-5	1552	3003
1/90	2,39E-5	2,39E-5	3123	5108
1/100	1,95E-5	1,94E-5	5156	8341

Согласно табл. 1 обе схемы имеют одинаковую погрешность в центральной точке и отличаются лишь временем расчета. Лучшую скорость показывает 1 схема. Относительная погрешность в центральной точке составляет всего лишь 0,06 % при значении шага сетки 0,01. Столь малая погрешность свидетельствует об эффективности применяемых для решения задачи конечно-разностных схем.

Заключение

В тестовых расчетах оба подхода показали одинаковую погрешность вычисления. Размерность системы линейных уравнений в схеме с понижением порядка в 2 раза больше, но матрица системы более разряжена. Удвоенная размерность матрицы, несмотря на разряженность, в среднем в 2 раза увеличивает время расчета. Учитывая очень малую погрешность расчетов, рассмотренные подходы можно успешно использовать для решения задач об изгибе прямоугольных пластин.

Литература

1. *Попов М. И.* Приближенное аналитическое решение внутренней задачи кондуктивно-ламинарной свободной конвекции / М. И. Попов, Е. А. Соболева // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2016. – № 4(70). – С. 78–84. – DOI 10.20914/2310-1202-2016-4-78-84. – EDN XWESHF.

2. *Ряжских В. И.* О численном интегрировании нестационарного неоднородного бигармонического уравнения в задачах кондуктивной свободной конвекции / В. И. Ряжских, М. И. Попов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2014. – Т. 10, № 1. – С. 56–62. – EDN RWUBRH.

3. *Попов М. И.* Интегрирование бигармонического уравнения по неявной схеме / М. И. Попов // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2018. – Т. 80, № 2(76). – С. 114–118. – DOI 10.20914/2310-1202-2018-2-114-118. – EDN YBECBV.

4. *Ермоленко А. В.* К решению неоднородного бигармонического уравнения / А. В. Ермоленко, Н. В. Кожагельдиев // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 3(44). – С. 64–78. – DOI 10.34130/1992-2752_2022_3_64. – EDN LUGCEY.

5. *Монахов В. А.* Теория пластин и оболочек: учеб. пособие по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» / В. А. Монахов. – Пенза : ПГУАС, 2016. – 252 с.

6. *Куксенко С. П.* Электромагнитная совместимость: численные методы решения задач электростатики: учеб. пособие для студентов техн. направлений подготовки / С. П. Куксенко. – Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2020. – 268 с.

7. Численные методы решения задач об изгибе квадратной пластины / М. Ю. Смирнов, М. И. Попов, А. В. Скрыпников [и др.] // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Материалы. Конструкции. Технологии. – 2021. – № 3. – С. 111–124. – DOI 10.25686/2542-114X.2021.3.111. – EDN TAHDBL.

УДК 004.932

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ОДНОВРЕМЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ И КАРТОГРАФИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДЫ СИМУЛЯЦИИ GAZEBO ДЛЯ РОБОТА ROIN RTS 100

Н. С. Пугачев

Воронежский государственный университет

Аннотация. Во многих случаях задача автономного вождения может быть решена путем составления карты местности с последующей локализацией робота на этой карте. Это позволяет роботу принимать решения о движении, учитывая предыдущий опыт. Однако процесс составления карты местности и локализации представляет собой слаженную работу нескольких программных комплексов, отвечающих за перемещение робота, его восприятие окружающей среды через показания сенсоров и последующее агрегирование этих данных. В этой статье приведен опыт разработки подобной системы.
Ключевые слова: компьютерное зрение, автономное вождение, робот, SLAM, Gazebo, ROS 2, камеры глубины, облака точек, RTAB-MAP.

Введение

В процессе движения современный робот может собирать достаточно большое количество информации о среде в которой он перемещается. Это могут быть как команды оператора, так и, например, показания акселерометра и гироскопа, отображающие то насколько эффективно эти команды были исполнены. Кроме того, если робот оснащен инфракрасными камерами глубины (которые находят все большее применение не только в сфере робототехники, но и в современных смартфонах), появляется не только возможность оценивать расстояние до объектов и выделять семантическое содержание сцены, но и обрабатывать эту информацию с помощью алгоритмов одновременной локализации и картографии. Результатом работы этих алгоритмов является карта местности, позволяющая роботу затем использовать ее для принятия решений во время автономного движения.

Целью этой работы является разработка программного комплекса, позволяющего применять методы локализации и картографии для робота ROIN RTS 100, просматривать результаты работы этих методов, вычислять визуальную одометрию и сохранять полученные карты.

1. Симуляция Gazebo

В предыдущей публикации [1] был рассмотрен процесс построения цифрового двойника ROIN RTS 100, на основе системы ROS 2 [2] и симуляции Gazebo [3] (рис. 1). В настоящей работе рассмотрена агрегация данных полученных во время работы симуляции.

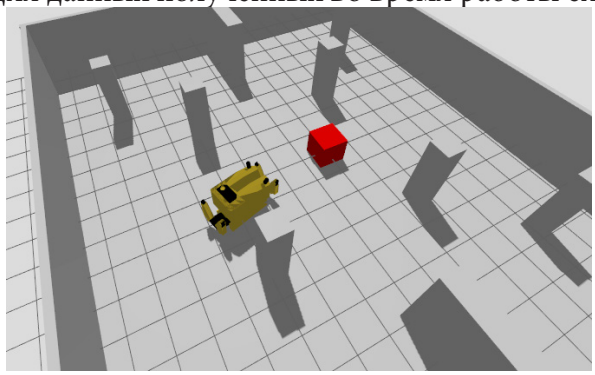


Рис. 1. Робот Roin RTS 100 в среде симуляции Gazebo

1.1. Одометрия

В робототехнике *одометрией* называется метод оценки положения робота на основе данных о движении его приводов. Помимо этого, поскольку одометрия не является точным положением робота, а только его оценкой, для улучшения точности этой оценки учитывают данные получаемые с IMU сенсора. *IMU-сенсор* представляет собой комбинацию из акселерометра (для определения ускорения по осям), гироскопа(для измерения поворота объекта вокруг собственных осей), барометра (определение высоты подъема). Кроме того, существуют и другой метод вычисления одометрии на основе визуальных признаков, извлекаемых из последовательности изображений, снятых с камер установленных на роботе. В среде симуляции Gazebo был настроен сбор данных показаний IMU датчика, так же была настроена публикация данных одометрии.

1.2. Камера глубины

В среде симуляции Gazebo есть возможность эмулировать камеры глубины. Благодаря камерам глубины можно получать изображение в формате RGB D, где D — расстояние до объекта, соответствующего каждому пикселю изображения. Зная информацию о глубине изображения, положение и ориентацию камеры в пространстве можно рассчитать положение каждого пикселя относительно начала координат, таким образом получив трехмерный скан. Такой скан в трехмерной системе координат называется *облаком точек* (рис. 2).

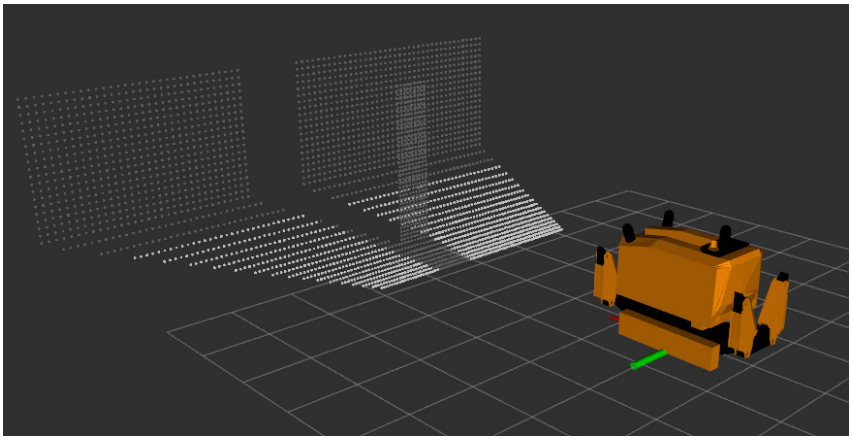


Рис. 2. Визуализация облака точек в системе Rviz, вычисленного на основе снятых камерой глубины изображений и информации о положении робота в пространстве

2. Одновременная картография и локализация

2.1. Алгоритм Rtab-map для картографии и визуальной одометрии

Как только налажен сбор данных, можно приступать к их агрегации. Целью агрегации данных является построение трехмерной карты местности. Семейство алгоритмов выполняющих эту задачу называется SLAM (одновременная локализация и построение карты). В качестве программной реализации SLAM был выбран подход из библиотеки RTAB-map[4]. RTAB-map представляет из себя набор алгоритмов решения задачи SLAM, с поддержкой камер глубины, стерео камер и лидаров. Rtab-map использует алгоритм Bag of words для сопоставления новых визуальных признаков с уже имеющимися в базе, что позволяет запоминать облака точек в каждый заданный момент времени, сопоставлять их между собой, составляя карту местности. Помимо этого, Rtab-map позволяет извлекать из признаков, полученных во время считывания

изображений и карт глубины, информацию о визуальной одометрии, что крайне полезно, как дополнительный источник уточнения оценки позиционирования робота.

2.2. Решение проблемы совместимости

Хотя библиотека Rtab-map совместима с системой ROS 2, рассчитана она на получение данных с реальных устройств, в нашем же случае используется симуляция. Специфика симуляции Gazebo состоит в том что она имеет свою, отдельную систему описания робота и среды в которую он помещен. Фактически библиотека Rtab-map не поддерживает форматы данных Gazebo, даже при учете их перевода в ROS 2 формат. Было выявлены следующие причины такого поведения:

1. Для создания экземпляра робота его оригинальное описание переводится из формата URDF в формат SDF, при этом меняются как оригинальные названия составных частей, так и сама структура этого описания;

2. Система координат симуляции и система координат используемая при описании робота в системе ROS 2 отличаются;

3. При инициализации датчиков в системе Gazebo создаются дополнительные составные части, которые из-за специфики именования не могут быть автоматически сопоставлены с первоначальными частями робота из формата URDF

4. В Gazebo при инициализации сенсоров и датчиков создаются отдельные составная части.

Таким образом создается два древовидных описания робота, одно в Gazebo, а другое в ROS 2. Из чего следует, что необходимо не только наладить мост, передающий данные из симуляции в ROS 2, но и провести дополнительные корректировки направленные на сопоставление двух моделей.

Для решения проблемы правильной локализации и корректного отображения данных полученных из симуляции необходимо на стадии запуска двух систем добавить в ROS 2 дополнительные ноды, обеспечивающие трансформацию координат датчиков созданных в Gazebo относительно соответствующих частей робота описанного в формате URDF. Для этого можно воспользоваться инструментом *tf2_tools*.

2.3. Построение карты местности

Так как проблема совместимости систем решена, можно осуществить передачу данных, полученных из симуляции Gazebo, в алгорит Rtab-map для их последующей агрегации. Полная схема потока данных выглядит следующим представлена ниже (рис. 3). На ней представлены следующие ключевые ноды (отдельные элементы публикующие и обрабатывающие данные):

1. */camera_left_depth, /imu и /roin_model* — данные с камеры глубины и данные о позиции робота в симуляции;

2. */ros_gz_bridge* — программный комплекс передачи данных из Gazebo в ROS 2;

3. */rtab_map и /rtab_map_viz* — ноды отвечающие за обработку облаков точек, полученных из показаний камеры глубины и нода визуализации составленной карты местности.

Разработанный программный комплекс имеет визуальный интерфейс представлен на рис. 4.

В процессе работы Rtab-map осуществляет запоминание облаков точек в форме графа, в затем проводит сравнение новых данных с уже имеющимися в графе для его оптимизации и обновления составленной карты. Обновление происходит на основе визуальных признаков, извлекаемых из RGB изображения, таким образом не только обновляется карта в соответствии с изменением окружающей среды, но и происходит постоянно уточнение вычисленной на основе визуальных признаков одометрии. Визуализацию работы Rtab-map можно увидеть на рис. 5.

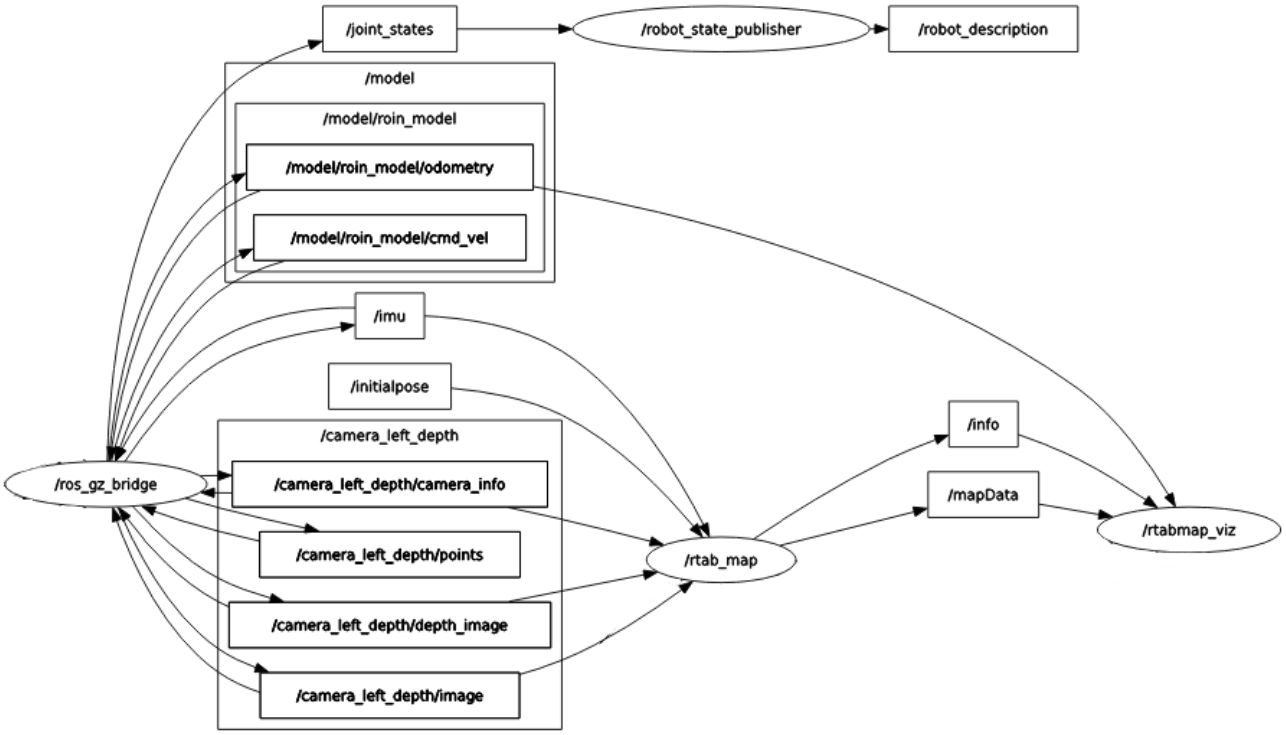


Рис. 3. Визуализация связи данных в разработанной системе

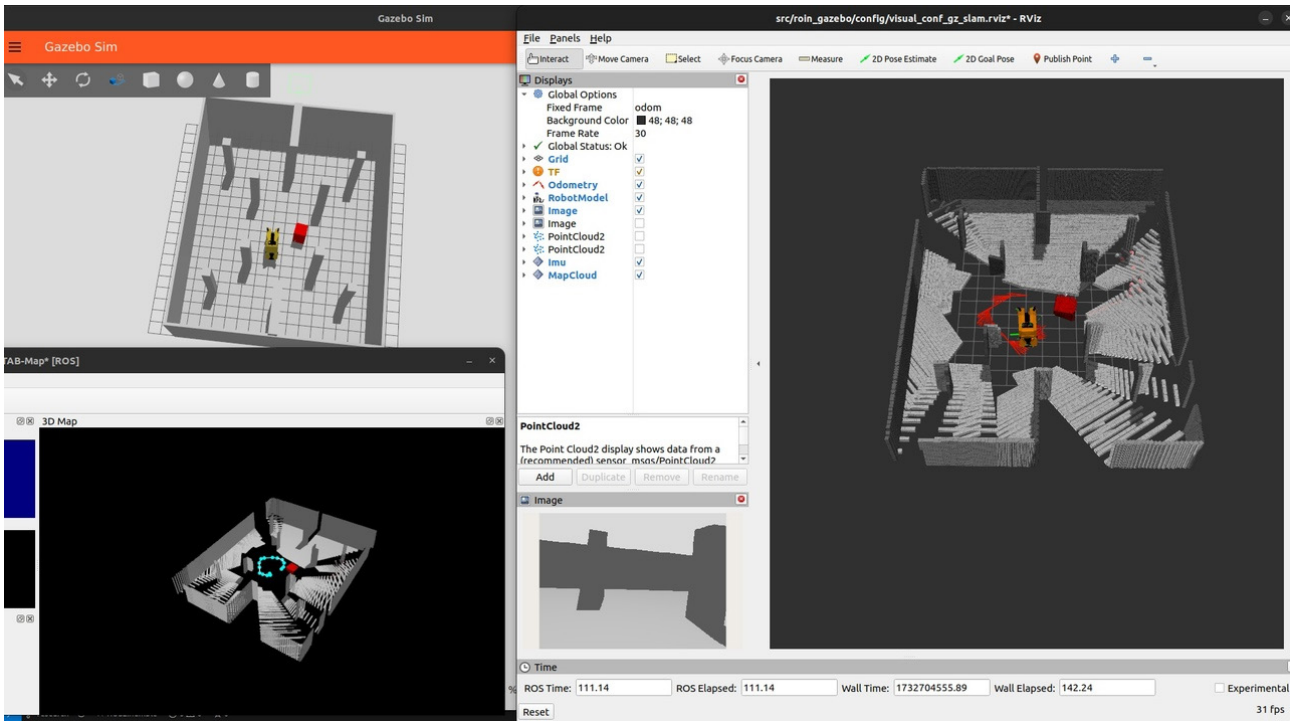


Рис. 4. Интерфейс системы. Слева сверху симуляция робота в Gazebo. Слева снизу агрегированное облако точек и визуальная одометрия полученные с помощью алгоритма Rtab-map. Справа визуализация всех полученных системой ROS 2 данных, включающая в себя данные одометрии, карту местности, положение робота и всех его составных частей

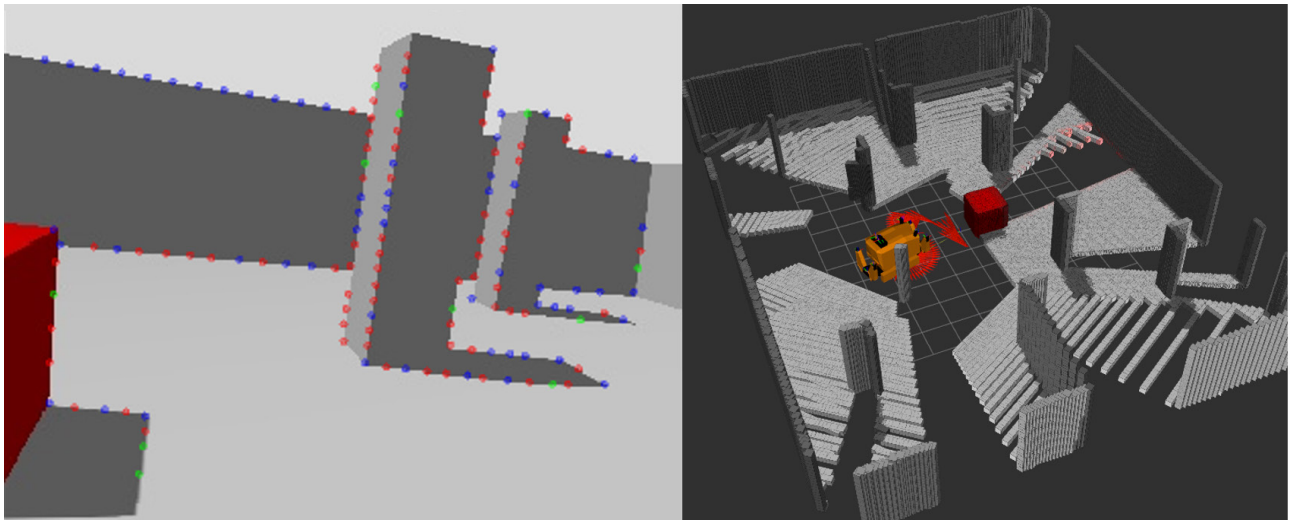


Рис. 5. Слева извлеченные визуальные признаки, где зеленым отмечены те признаки которые удалось сопоставить с уже имеющимися в базе данных, а красные новые. Справа изображение составленной карты местности, сделанное с помощью системы визуализации Rviz

Полученное во время проведения эксперимента представление карты и визуальной одометрии в формате графа, так как измерения происходят стабильно с определенной частотой, можно представить этот граф в табличном виде и сохранить его в формате базы данных. Далее полученный файл может быть визуализирован (рис. 6) как в режиме реального времени, так и после окончания эксперимента. Кроме того, при старте системы можно загрузить карту из этого файла, для дальнейшей работы с ней.

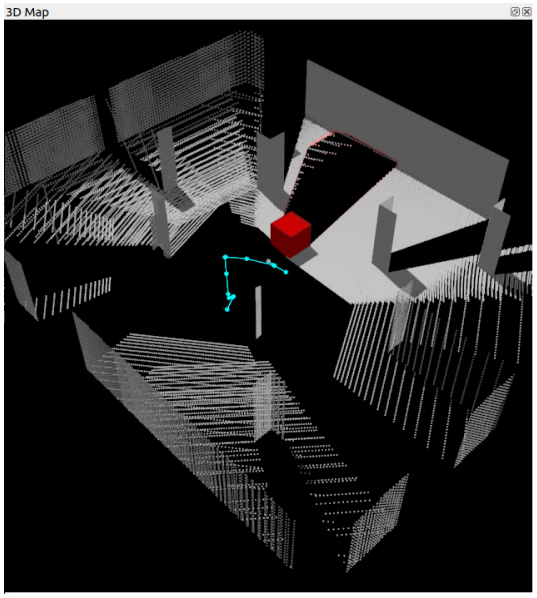


Рис. 6. Визуализация сохраненной карты местности и визуальной одометрии с помощью системы RTAB-map

Заключение

В ходе проделанной работы был реализован функционал работы с камерами глубины, налажены корректный импорт и визуализация облаков точек в системе ROS 2. Кроме того, была рассмотрена библиотека RTAB-map как практическая реализация SLAM-алгоритма. Таким образом, получено решение задачи картографии и локализации. Стоит отметить, что

данная библиотека совместима с системой ROS 2 и при определенных манипуляциях может использовать данные, полученные из симуляции, что позволяет осуществлять локализацию и картографирование, не выходят за пределы системы ROS 2. Это преимущество позволит в дальнейшем использовать SLAM от RTAB-map вместе с модулем навигации NAV 2[5], что даст возможность использовать модули установки целевых локаций, подключения GPS системы и планирования оптимальных траекторий перемещения.

Более того, дополнительный функционал, такой как визуальная одометрия, алгоритмы калибровки камер глубины и лидаров и сохранение карт в формате баз данных с возможностью их загрузки, позволит собирать датасеты карт, обрабатывать их модулем навигации и проводить тестирование различных конфигураций робота при выборе навесного оборудования.

Литература

1. *Пугачев Н. С.* Построение цифрового двойника робота ROIN-RTS-100 / Н. С. Пугачев // Математика, информационные технологии, приложения: сборник трудов Межвузовской научной конференции молодых ученых и студентов (Воронеж, 24–25 апреля 2024 г.) – Воронеж : Научная книга, 2024. – 738 с.

2. Оффициальная документация ROS 2: https://docs.ros.org/en/iron/index.html. – (Дата обращения: 01.06.2024).

3. Оффициальный сайт Gazebo: https://gazebosim.org/home. – (Дата обращения: 15.05.2024).

4. RTAB-Map as an Open-Source Lidar and Visual SLAM Library for Large-Scale and Long-Term Online Operation https://arxiv.org/pdf/2403.06341. – (Дата обращения: 15.10.2024).

5. Оффициальная документация NAV 2: https://docs.nav2.org/index.html. – (Дата обращения: 01.08.2024).

УДК 681.5.075; 004.942

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОКАРДИОСТИМУЛЯТОРОМ

Р. И. Рахимова

Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова

Аннотация. В работе рассмотрена задача математического и компьютерного моделирования системы управления кардиостимулятором. Построена дискретная стохастическая модель в пространстве состояний. Исследованы свойства полной управляемости и полной наблюдаемости модели в зависимости от модельного параметра. Для ускорения и автоматизации расчетов разработан скрипт на языке Maple 2022, который позволяет получить символьное представление матриц модели, а также матриц управляемости и наблюдаемости. Компьютерная модель разработана на языке Python.
Ключевые слова: система управления кардиостимулятором, дискретная модель в пространстве состояний, управляемость, наблюдаемость, компьютерная модель.

Введение

В настоящее время одной из важных задач является вопрос о правильной интерпретации данных ЭКГ пациентов, которым имплантированы постоянные электрокардиостимуляторы, которые являются миниатюрными компьютеризированными системами с большим количеством программируемых параметров и стимуляционных алгоритмов.

При разработке новых моделей кардиостимуляторов целесообразно проводить предварительные исследования с помощью математических моделей с целью выявления преимуществ и недостатков разрабатываемого программного обеспечения.

Целью данной работы является построение дискретной стохастической системы управления кардиостимулятором, представленной разностными уравнениями в пространстве состояний, исследовании свойств полной управляемости и наблюдаемости полученной модели, а также в разработке и программной реализации соответствующей компьютерной модели на языке Python.

В качестве исходных данных рассмотрим замкнутую динамическую систему, включающую в себя кардиостимулятор и датчик частоты сердечных сокращений [1, стр. 300].

1. Построение дискретной математической модели управления электрокардиостимулятором

1.1. Переход к непрерывной модели в пространстве состояний к дискретной модели

В работе [2] решена задача построения математической модели системы управления кардиостимулятором в пространстве состояний и в непрерывном времени. Непрерывная модель в форме стандартной наблюдаемой модели (СНМ) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12K & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \tag{2}$$

где $z(t)$ — действительная частота сердечных сокращений, $u(t)$ — заданная частота сердечных сокращений, $d(t)$ — внешнее возмущение, K — настраиваемый параметр модели. Вы-

полним переход от модели СНМ в непрерывном времени к дискретной модели, представленной разностными уравнениями в пространстве состояний.

Запишем общий вид линейного разностного матричного уравнения состояния системы с начальным условием $x(t_0) = x_0$ [3] с учетом постоянных матриц F и B:

$$x(t_i) = \Phi(\tau)x(t_{i-1}) + B_d(\tau)u(t_{i-1}), x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

где $\Phi(\tau)$ — переходная матрица состояния, которая может быть найдена согласно выражению

$$\Phi(\tau) \div \Phi(s) = (Is - F)^{-1}, \tag{4}$$

Для перехода к дискретной модели найдем $\Phi(\tau)$, где $\tau = t_{i+1} - t_i$. Из выражения (1) вычислим

$$(Is - F)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+12}{s^2+12K+12s} & \dfrac{1}{s^2+12K+12s} \\ \dfrac{-12K}{s^2+12K+12s} & \dfrac{s}{s^2+12K+12s} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

Обратное преобразование Лапласа для элементов матрицы (5) найдем с помощью специально разработанного скрипта в интерактивной среде Maple 2022. Для удобства введем обозначения для элементов матрицы $\Phi(\tau)$:

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(\tau) & \varphi_{12}(\tau) \\ \varphi_{21}(\tau) & \varphi_{22}(\tau) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Для удобства в решении заменим $A := \sqrt{9-3K}$.

Запишем найденные значения элементов матрицы (7):

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{e^{-6\tau}\left(\cosh(2\tau A)A + 3\sinh(2\tau A)\right)}{A}$$

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{2}\frac{e^{-6\tau}\sinh(2\tau A)}{A}$$

$$\varphi_{21}(\tau) = \frac{-6Ke^{-6\tau}\sinh(2\tau A)}{A}$$

$$\varphi_{22}(\tau) = \frac{e^{-6\tau}\left(\cosh(2\tau A)A + 3\sinh(2\tau A)\right)}{A}.$$

Далее вычислим значения матрицы $B_d(\tau)$. Общий вид выражения для вычисления этой матрицы будет следующий:

$$B_d(\tau) = \int_0^\tau \Phi(\tau - t)Bdt.$$

Для удобства обозначим элементы матрицы B_d как

$$\hat{\mathbf{A}}_d(\tau) = \begin{bmatrix} Bd_{11}(\tau) & Bd_{12}(\tau) \\ Bd_{21}(\tau) & Bd_{22}(\tau) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

С помощью разработанного скрипта найдем и запишем полученные значения для элементов матрицы (7):

$$Bd_{11}(\tau) = -\frac{1}{2}\frac{-2A + Ae^{2A\tau-6\tau} + 3e^{2A\tau-6\tau} + Ae^{-2\tau(A+3)} - 3e^{-2\tau(A+3)}}{A}$$

$$Bd_{12}(\tau) = -\frac{1}{4}\frac{-4A - Ke^{2A\tau-6\tau} + 2Ae^{2A\tau-6\tau} + 6e^{2A\tau-6\tau} + Ke^{-2(A+3)} + 2Ae^{-2\tau(A+3)} - 6e^{-2\tau(A+3)}}{KA}$$

$$Bd_{21}(\tau)=\frac{3K\left(e^{4\tau A}-1\right)e^{-2\tau(A+3)}}{A}$$

$$Bd_{22}(\tau)=\frac{1}{2}\frac{-2A+Ae^{2A\tau-6\tau}+Ae^{-2\tau(A+3)}+3e^{2A\tau-6\tau}-3e^{-2\tau(A+3)}}{A}$$

Утверждение 1. *Дискретная модель электрокардиостимулятора, представленная линейными разностными уравнениями в пространстве состояний, имеет следующий вид:*

$$x(t_i)=\Phi(\tau)x(t_{i-1})+B_d(t_{i-1})u(t_{i-1}),x(t_0)=x_0, \tag{8}$$

$$z(t_i)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t_i), \tag{9}$$

в которой матрицы $\Phi(\tau)$ *и* $B_d(\tau)$ *есть (7) и (8). Отдельно рассмотрим случай, когда* $K=3$.

С помощью специально разработанного скрипта в интерактивной среде Maple 2022, найдем значения элементов матрицы $\Phi(\tau)$ из выражения (6):

$$\Phi(\tau)=\begin{bmatrix}e^{-6\tau} & 0\\ 0 & e^{-6\tau}\end{bmatrix}. \tag{10}$$

Далее вычислим значения матрицы $\mathrm{B}_d(\tau)$. Из выражения (3):

$$\mathrm{B}_d(\tau)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6}-\frac{e^{-6\tau}}{6}\\ 6-6e^{-6\tau} & 0\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Из (10) видно, что компоненты вектора состояния при $K=3$ являются независимыми.

1.2. Анализ свойств полной управляемости и наблюдаемости для построенной дискретной модели

Исследуем свойства управляемости и наблюдаемости построенной дискретной модели.

1) Анализ свойства полной управляемости дискретной модели (9), (10) при $K\neq 3$.

Матрица управляемости имеет вид:

$$W_{DTI}=\left[B_d\middle|\Phi\cdot B_d\right]. \tag{12}$$

Ввиду громоздкости выражения вычисленную матрицу W_{DTI} здесь не приводим.

Утверждение 2. *Дискретная модель (8), (9) полностью управляемая при любом* $K\neq 0$ *и* $K\neq 3$.

Доказательство. Поскольку для любого $K\neq 0$ и $K\neq 3$ $rank\ W_{DTI}=2,$ то по критерию полной управляемости модель (8), (9) является полностью управляемой □

2) Анализ свойства полной управляемости дискретной модели (8), (9) при $K=3$.

Вычислим матрицу управляемости вида (12):

$$W_{DTI}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6}-\frac{e^{-6\tau}}{6} & 0 & \frac{e^{-6\tau}\left(-1+e^{-6\tau}\right)}{6}\\ 6-6e^{-6\tau} & 0 & -6e^{-6\tau}\left(-1+e^{-6\tau}\right) & 0\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Утверждение 3. При $K=3$ дискретная модель (8), (9) является полностью управляемой.

Доказательство. Поскольку при $K=3$ $rank\ W_{DTI}=2,$ то по критерию полной управляемости дискретная модель (8), (9) является полностью управляемой □

3) Анализ свойства полной наблюдаемости дискретной модели при $K\neq 3$.

Матрица наблюдаемости имеет вид: $\mathrm{M}_{DTI}=\begin{bmatrix}\mathrm{H}\\ \mathrm{H}\cdot\Phi\end{bmatrix}$ Найдем матрицу M_{DTI}:

$$\mathrm{M}_{DTI}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{e^{-6\tau}\left(\cosh\left(2\tau A\right)A+3\sinh\left(2\tau A\right)\right)}{A} & \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{-6\tau}\left(\sinh\left(2\tau A\right)\right)}{A} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Утверждение 4. *Дискретная модель (8), (9) полностью наблюдаема при любом* $K \neq 3$.

Доказательство. Поскольку для любого $K \neq 3$ $rank\ \mathrm{M}_{DTI}=2,$ то по критерию полной наблюдаемости модель (8), (9) является полностью наблюдаемой □

3) Анализ свойства полной наблюдаемости дискретной модели при $K=3$.

Матрица наблюдаемости имеет вид:

$$\mathrm{M}_{DTI}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e^{-6\tau} & 0 \end{bmatrix}.$$

Утверждение 5. *Дискретная модель (8), (9) не является полностью наблюдаемой при* $K=3$.

Доказательство. Поскольку $rank\ \mathrm{M}_{DTI}=1,$ то по критерию полной наблюдаемости модель (9), (10) не является полностью наблюдаемой □

Утверждение 6. При $K \neq 3$ дискретная модель (8), (9) является полностью управляемой и полностью наблюдаемой.

Утверждение 7. При $K=3$ дискретная модель (8), (9) является полностью управляемой, но не полностью наблюдаемой.

1.3. Построение дискретной линейной стохастической модели

Перепишем непрерывную СНМ в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12K & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 12K \end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}d(t), \tag{15}$$

$$z(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x(t). \tag{16}$$

Будем считать, что $u(t)$ — управление есть детерминированная функция времени, а $d(t)$ — возмущение, которое является гауссовским белым шумом (ГБШ) с дисперсией q.

Добавим к уравнению (16) аддитивную погрешность измерений и перепишем в дискретном времени:

$$z(t_i)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x(t_i)+\nu(t_i), \tag{17}$$

где $i=1,...,K$ и $\nu(t_i)$ — ДГБШ с нулевым средним и дисперсией R.

Обозначим $B=\begin{bmatrix} 0 \\ 12K \end{bmatrix}$ и $G=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Найдем дискретные аналоги этих матриц.

Запишем полученную матрицу $\mathrm{B}_d(\tau)$:

$$B_d(\tau)=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(-2e^{2A\tau+6\tau}A+Ae^{4\tau\mathrm{A}}+3e^{4\tau A}+A-3\right)e^{-2A\tau-6\tau}}{A} \\ \dfrac{3K\left(e^{4\tau\mathrm{A}}-1\right)e^{-2A\tau-6\tau}}{A} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Далее вычислим значения матрицы ковариации Q_d дискретного шума $w_d(t_i)$. Общее выражение имеет следующий вид:

$$Q_d(\tau)=\int_0^{\tau}\Phi(\tau-t)GqG^T\Phi^T(\tau-t)dt, \tag{19}$$

Для удобства обозначим элементы матрицы Q_d как

$$Q_d(\tau)=\begin{bmatrix} Qd_{11}(\tau) & Qd_{12}(\tau) \\ Qd_{21}(\tau) & Qd_{22}(\tau) \end{bmatrix}. \tag{20}$$

С помощью разработанного скрипта найдем и запишем полученные значения для элементов матрицы (20):

$$Qd_{11}(\tau)=\frac{1}{48}\frac{q\left(2K^2e^{4\tau(A+3)}+18Ke^{4\tau(A+3)}-72e^{4\tau(A+3)}-KAe^{8\tau A}-9Ke^{8\tau A}+12Ae^{8\tau A}+36e^{8\tau A}-2K^2e^{4\tau A}+KA-9K-12A+36\right)e^{-4\tau(A+3)}}{K(-3+K)}$$

$$Qd_{12}(\tau)=-\frac{1}{8}\frac{q\left(4Ke^{4\tau(A+3)}-12e^{4\tau(A+3)}-Ke^{8\tau A}+2Ae^{8\tau A}+6e^{8\tau A}-2Ke^{4\tau A}-K-2A+6\right)e^{-4\tau(A+3)}}{-3+K}$$

$$Qd_{21}(\tau)=-\frac{1}{8}\frac{q\left(4Ke^{4\tau(A+3)}-12e^{4\tau(A+3)}-Ke^{8\tau A}+2Ae^{8\tau A}+6e^{8\tau A}-2Ke^{4\tau A}-K-2A+6\right)e^{-4\tau(A+3)}}{-3+K}$$

$$Qd_{22}(\tau)=\frac{1}{4}\frac{Kq\left(2Ke^{4\tau(A+3)}-6e^{4\tau(A+3)}+Ae^{8\tau A}+3e^{8\tau A}-2Ke^{4\tau A}-A+3\right)e^{-4\tau(A+3)}}{-3+K}$$

Утверждение 8. *Дискретная стохастическая модель электрокардиостимулятора, с параметром* $K\neq 3$, *представленная линейными разностными уравнениями в пространстве состояний, имеет следующий вид:*

$$x(t_i)=\Phi(\tau)x(t_{i-1})+B_d(t_{i-1})u(t_{i-1})+w_d(t_{i-1}),x(t_0)=x_0, \tag{21}$$

$$z(t_i)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t_i)+\nu(t_i), \tag{22}$$

для которой матрицы $\Phi(\tau)$, $B_d(\tau)$ и $Q_d(\tau)$ есть (6), (18) и (20).

2. Компьютерное моделирование дискретной стохастической модели

Все компьютерные модели разработаны на языке Python. Для вычисления оценки вектора состояния с целью снижения влияния помех в модели (21), (22) был реализован алгоритм дискретной фильтрации Калмана [4].

Проведем компьютерное моделирование на основе построенной дискретной стохастической модели сначала при $K=3$. Результаты представлены на рис. 1–3.

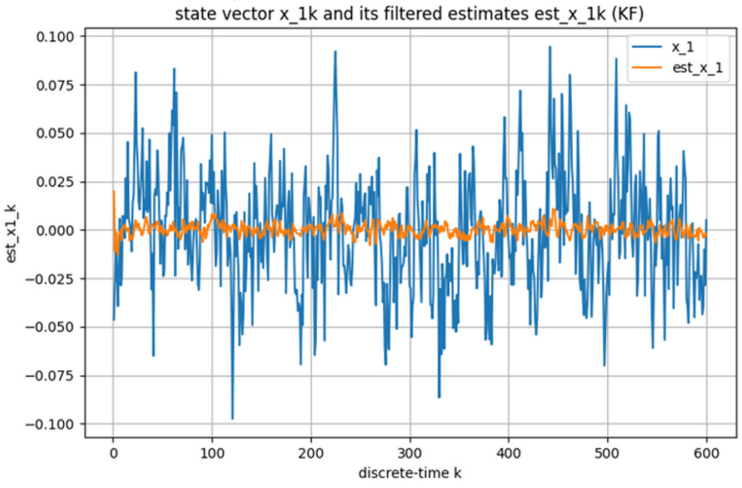


Рис. 1. Дискретная стохастическая модель при $K=3$

На рис. 3 отображено качество процесса дискретной фильтрации. Хотя дисперсия ошибки фильтрации стремится к 0, при параметре $K=3$ мы не получаем желаемый результат, а именно переход x1 с одной заданной частоты на другую.

Теперь проведем компьютерное моделирование на основе дискретной стохастической модели при $K<3$. Результаты представлены на рис. 4–6.

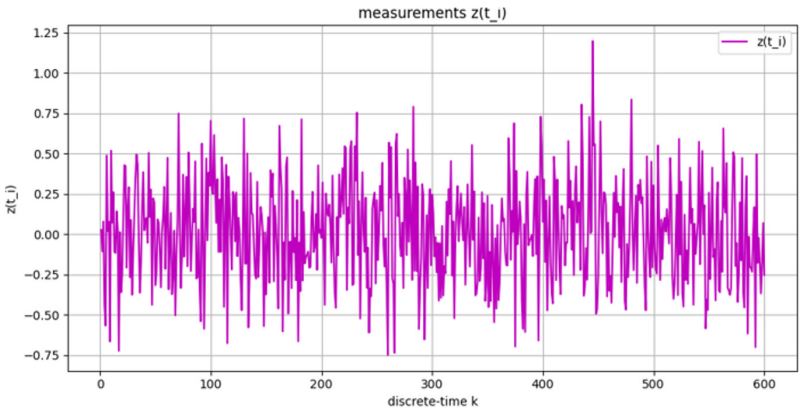


Рис. 2. Дискретная стохастическая модель. Измерения выходного сигнала с помехой

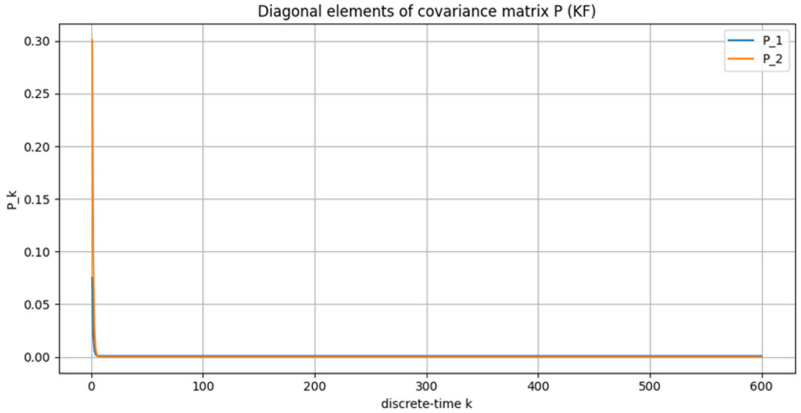


Рис. 3. Дискретная стохастическая модель. Качество работы алгоритма фильтрации

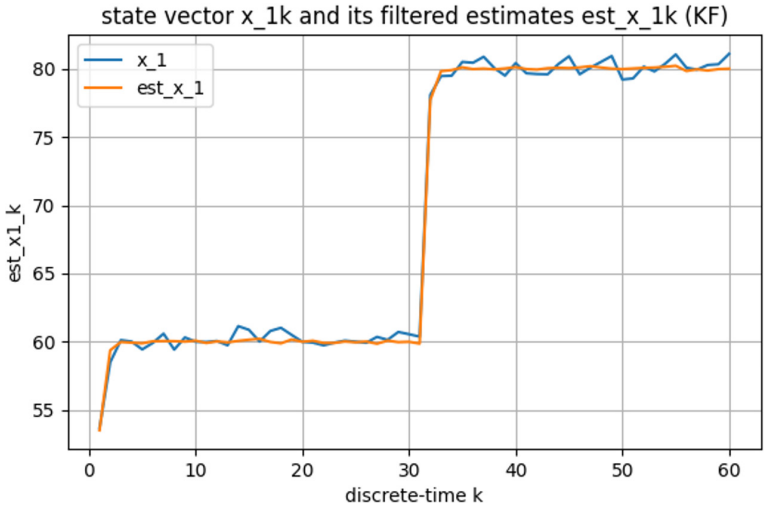


Рис. 4. Дискретная стохастическая модель при $K < 3$

Проанализировав получившийся график (см. рис. 4), можно сделать вывод о том, что при изменении входного сигнала происходит переход на желаемую частоту сердечных сокращений примерно в течение одной минуты, что с медицинской точки зрения является приемлемым результатом.

На рис. 5 видно, что частота сильно изменяется во времени за счет шума, следовательно, необходимо применять алгоритм дискретной фильтрации, чтобы устранить нежелательные помехи.

На рис. 6 отображено качество процесса дискретной фильтрации. Видно, что дисперсия ошибки фильтрации меньше 1.

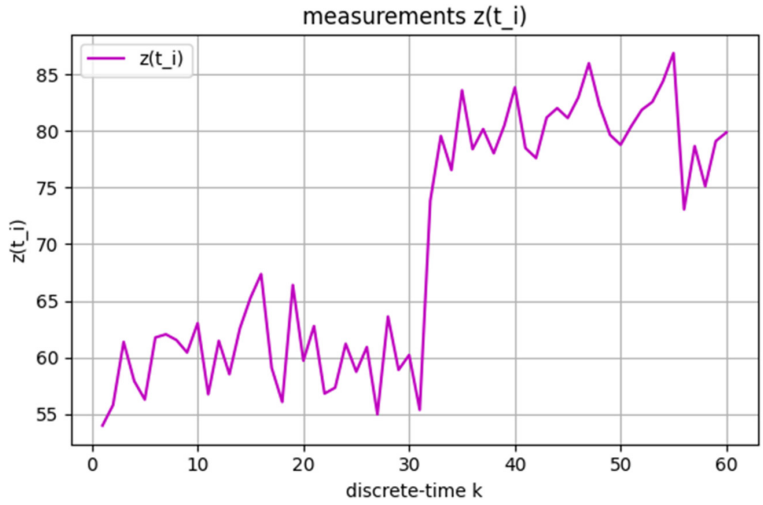


Рис. 5. Дискретная стохастическая модель при $K < 3$. Измерения выходного сигнала с помехой

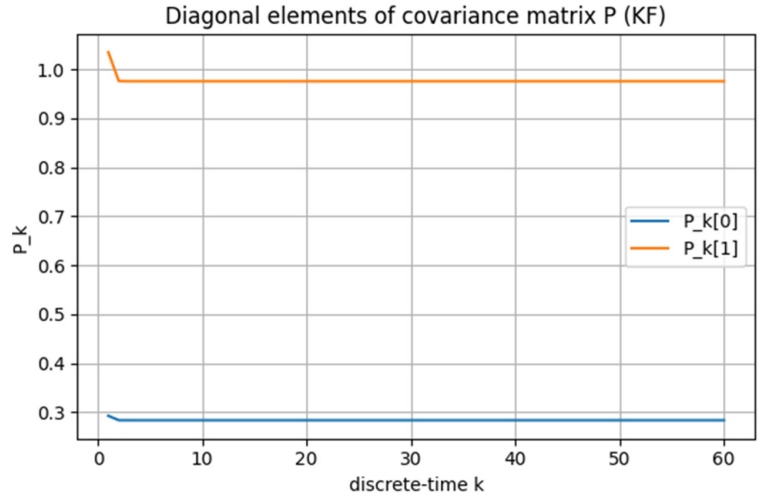


Рис. 6. Дискретная стохастическая модель при $K < 3$. Качество фильтрации

Заключение

В работе рассмотрена задача математического и компьютерного моделирования системы управления кардиостимулятором. Построена дискретная стохастическая модель в пространстве состояний. Исследованы свойства полной управляемости и полной наблюдаемости модели в зависимости от модельного параметра K. Для ускорения и автоматизации расчетов разработан скрипт на языке Maple 2022, который позволяет получить символьное представление матриц модели, а также матриц управляемости и наблюдаемости. Компьютерная модель разработана на языке Python.

Результаты проведенных численных экспериментов показали, что алгоритм дискретной фильтрации Калмана позволяет существенно снизить влияние помех на моделируемую частоту сердечных сокращений.

Литература

1. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. Пер. с англ. Б. И. Копылова. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002.

2. *Рахимова Р. И., Цыганова Ю. В.* О математической модели системы управления электрокардиостимулятором // Научные исследования и разработки молодых ученых: материалы Все-

российской научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых, посвященной Дню аспиранта, Ульяновск, 21 января 2024 года. – Ульяновск : Ульяновский государственный университет, 2024. – С. 70–74.

3. *Семушин И. В., Цыганова Ю. В.* Детерминистские модели динамических систем. Методическое пособие. – Ульяновск : УлГТУ, 2007.

4. *Grewal M. S.* Kalman filtering: Theory and Practice MATLAB / M. S. Grewal, A. P. Andrews. – New Jersey : Prentice Hall, 2001.

УДК 536.2

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

И. Ю. Савельева, И. В. Кутузов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аннотация. С уменьшением характерного размера рассматриваемых тел реальные результаты теплопередачи все сильнее отклоняются от теоретических, которые основаны на гипотезе Био — Фурье. Классическая теория не учитывает влияния от более далеких частиц и эффекта запаздывания на изменение теплового потока и температуры, которые возникают в микро- и наномасштабе и называются нелокальными эффектами. В связи с этим возникает задача по созданию и исследованию макроскопических математических моделей, учитывающих нелокальность на микроуровне.
Ключевые слова: температура, нелокальность, математическая модель, микро- и наномасштаб, DPL.

Введение

Осознание в необходимости применения нелокальной термодинамики в физических науках и технике восходит к середине прошлого века и связана с попытками описать экспериментальные эффекты, не предсказанные гипотезой Био — Фурье. В связи с этим были предложены математические модели неклассической теплопроводности, такие как модель термомассы [1], двухпараметрическая нелокальная модель (dual phase lag — DPL) [2], теория температурных волн, основанная на теории инерционной энтропии [3], модель процесса стационарной и нестационарной теплопроводности [4, 5], модель теплопроводности для материалов с зернистой структурой [6] и многие другие [7, 8]. За счет введения двух тепловых задержек модель DPL дает простую и удобную макроскопическую формулировку теплопередачи на микроскопических уровнях. При рассмотрении данной модели вместо соотношения Био — Фурье тепловой поток можно представить как [2]:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t+\tau_q) = -\lambda \nabla T(\mathbf{x}, t+\tau_T),$$

где $\mathbf{q}$ — вектор плотности теплового потока, $\mathbf{x}$ — вектор пространственных координат, τ_q и τ_T — времена релаксации вектора теплового потока и градиента температуры ∇T соответственно, λ — коэффициент теплопроводности. Времена релаксации можно определить экспериментально [9] и теоретически [10].

Учету пространственной нелокальности в процессах теплообмена посвящено меньше исследований. Тепловой поток в данной точке пространства и в данный момент времени может существенно зависеть от ближайшего окружения (так называемой зоной нелокальности) и градиента температуры [11]. Например, модели учитывающие только пространственную нелокальность рассмотрены в работах [4, 5]. В работе [12] для вектора плотности теплового потока предложено следующее соотношение:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x}' \mathbf{K}(\mathbf{x}-\mathbf{x}', t-t') \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}', t'),$$

где $\mathbf{K}(\mathbf{x}', t')$ — ядро свертки, которое полностью содержит пространственно-временную память теплового потока относительно градиента температуры. В более компактном виде модель, содержащую ядро нелокальности, можно представить как следующую связь между тепловым потоком и градиентом температуры:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}+\lambda_q, t+\tau_q) = -\lambda \nabla T(\mathbf{x}, t),$$

где λ_q — радиус нелокальности.

В данной работе рассмотрен вариант объединения модели DPL с моделью, содержащей ядро нелокалькости, при котором для вектора плотности теплового потока рассмотрим следующее соотношение

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}+\lambda_q, t+\tau_q) = -\lambda^{(T)}\nabla T(\mathbf{x}, t+\tau_T). \tag{1}$$

1. Одномерная математическая модель

Для определения поля температуры с учетом пространственной и временной нелокальностями в качестве рассматриваемого тела выберем полосу ширины l, расположенную в полуплоскости $x_1 > 0$. Для упрощения данной задачи воспользуемся предположением о том, что из-за неограниченности полосы вдоль оси Ox_2, функция распределения температуры будет одинаковой вне зависимости от сечения $x_2 = \text{const}$. В итоге вместо двумерной области рассмотрим одномерный случай.

Преобразуем соотношение (1), в котором разложим тепловой поток и градиент температуры по каждой переменной в ряд Тейлора до членов первого порядка и получим:

$$q(x,t) + \lambda_q \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} + \tau_q \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = -\lambda^{(T)} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \lambda^{(T)}\tau_T \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x \partial t}. \tag{2}$$

Объединим полученное уравнение (2) с одномерным уравнением теплопроводности и получим систему, учитывающую пространственную и временную нелокальности в одномерном случае

$$\begin{cases} c_V \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial q(x,t)}{\partial x}, \\ q(x,t) + \lambda_q \dfrac{\partial q(x,t)}{\partial x} + \tau_q \dfrac{\partial q(x,t)}{\partial t} = -\lambda^{(T)} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \lambda^{(T)}\tau_T \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x \partial t}, \end{cases} \tag{3}$$

где c_V — объемная теплоемкость.

В качестве начальных и граничных условий выберем следующие:

$$T(x,t)|_{t=0} = T_0, \quad q(x,t)|_{t=0} = 0, \quad q(x,t)|_{x=0} = MAt^m \exp(-mt/\tau_T), \quad T(x,t)|_{x=l} = T_0, \tag{4}$$

где функция плотности теплового потока соответствует импульсному нагреву, $M = m^m/(m-1)!$, A — размерный коэффициент, который может иметь разные значения для различных материалов [13]. Такой вид записи начального условия на тепловой поток обеспечивает его максимум при $\overline{t} = 1$, $m \geq 1$. В данном случае выберем $m = 2$.

Для дальнейшего удобства при решении и более компактной записи уравнений введем безразмерные параметры и переменные

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{a\tau_T}}, \quad \overline{t} = \frac{t}{\tau_T}, \quad a = \frac{\lambda^{(T)}}{c_V}, \quad D_\lambda^2 = \frac{\lambda_q}{\sqrt{a\tau_T}}, \quad D_\tau^2 = \frac{\tau_q}{\tau_T},$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T^*}, \quad T^* = \frac{A\tau_T^2\sqrt{a\tau_T}}{\lambda^{(T)}}, \quad \eta = \frac{q}{\lambda^{(T)}T^*/\sqrt{a\tau_T}}.$$

Тогда система уравнений (3) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial \overline{t}} = -\dfrac{\partial \eta}{\partial \xi}, \\ \eta + D_\lambda^2 \dfrac{\partial \eta}{\partial \xi} + D_\tau^2 \dfrac{\partial \eta}{\partial \overline{t}} = -\dfrac{\partial \theta}{\partial \xi} - \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \overline{t}}, \end{cases} \tag{5}$$

а краевые условия (4) будут выглядеть следующим образом

$$\theta(\xi,\bar{t})|_{\bar{t}=0}=0,\quad \eta(\xi,\bar{t})|_{\bar{t}=0}=0,\quad \eta(\xi,\bar{t})|_{x=0}=M\bar{t}^{\,2}\exp(-2\bar{t}),\quad \theta(\xi,\bar{t})|_{x=L}=0. \tag{6}$$

где $L=l/\sqrt{a\tau_T}$.

Система (5) с краевыми условиями (6) представляет собой одномерную математическую модель нелокальной теплопроводности.

2. Численный алгоритм решения задачи

Одним из способов сведения дифференциального уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению является дискретизация пространства методом конечных разностей, оставляя при этом в уравнении все производные по времени. Этот подход позволяет в результате получить набор связанных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть решены с помощью хорошо разработанных решателей со встроенными критериями сходимости, обеспечивающими численно устойчивые решения.

При решении данной задачи воспользуемся дискретизацией пространства методом конечных разностей. Для этого разобьем пространственную область на n узлов, причем первый $(i=1)$ и последний $(i=n)$ узлы будут располагаться на левой $(\xi=0)$ и правой $(\xi=L)$ границах соответственно. Индексом i обозначим пространственный узел, расположенный в точке $\xi_i=(i-1)\Delta\xi$, где $\Delta\xi=L/(n-1)$.

Для узлов с индексами $i=2,3,\ldots,n-1$ частную производную по пространству заменим на центральную производную. Тогда система (5) примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta_i}{d\bar{t}}=-\dfrac{\eta_{i+1}-\eta_{i-1}}{2\Delta\xi},\\[2ex] \eta_i+D_\lambda^2\dfrac{\eta_{i+1}-\eta_{i-1}}{2\Delta\xi}+D_\tau^2\dfrac{d\eta_i}{d\bar{t}}=-\dfrac{\theta_{i+1}-\theta_{i-1}}{2\Delta\xi}-\dfrac{1}{2\Delta\xi}\left(\dfrac{d\theta_{i+1}}{d\bar{t}}-\dfrac{d\theta_{i-1}}{d\bar{t}}\right).\end{cases} \tag{7}$$

Для аппроксимации производной по пространству на левой и правой границах, чтобы учесть граничные условия, выберем правую и левую односторонние производные соответственно. Тогда для левой границы система (5) будет выглядеть как

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta_1}{d\bar{t}}=-\dfrac{\eta_2-\eta_1}{\Delta\xi},\\[2ex] \eta_1+D_\lambda^2\dfrac{\eta_2-\eta_1}{\Delta\xi}+D_\tau^2\dfrac{d\eta_1}{d\bar{t}}=-\dfrac{\theta_2-\theta_1}{\Delta\xi}-\dfrac{1}{\Delta\xi}\left(\dfrac{d\theta_2}{d\bar{t}}-\dfrac{d\theta_1}{d\bar{t}}\right),\end{cases}$$

где $\eta_1=4\bar{t}^{\,2}\exp(-2\bar{t})$, а для правой примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta_n}{d\bar{t}}=-\dfrac{\eta_n-\eta_{n-1}}{\Delta\xi},\\[2ex] \eta_n+D_\lambda^2\dfrac{\eta_n-\eta_{n-1}}{\Delta\xi}+D_\tau^2\dfrac{d\eta_n}{d\bar{t}}=-\dfrac{\theta_n-\theta_{n-1}}{\Delta\xi}-\dfrac{1}{\Delta\xi}\left(\dfrac{d\theta_n}{d\bar{t}}-\dfrac{d\theta_{n-1}}{d\bar{t}}\right),\end{cases}$$

где $\theta_n=0$.

Решение нелокального случая будем сравнивать с решение локальной постановки, соответствующей классической теплопроводности

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\theta}{\partial\bar{t}}=-\dfrac{\partial\eta}{\partial\xi},\\[2ex] \eta=-\dfrac{\partial\theta}{\partial\xi},\end{cases}$$

с краевыми условиями (6).

3. Анализ результатов

На рис. 1 изображено действие импульсного нагрева в качестве безразмерного теплового потока η на левой границе рассматриваемого тела в зависимости от времени. На данном графике хорошо видно, что из-за подбора параметра M, максимум интенсивности действия теплового потока достигается в момент времени $\bar{t} = 1$.

На рис. 2 представлено распределение безразмерной температуры θ на левом конце с течение времени. Из данного графика видно, что при всех рассмотренных значениях параметров D_λ^2 и D_τ^2 наибольшие отклонения от локального случая (кривая отмечена красными точками) происходят в начальные моменты времени; с течением времени отклонения от классического решения исчезают. Также можно заметить, что наибольшее отклонение значений температуры от классического решения (при прочих равных) соответствует меньшему значению коэф-

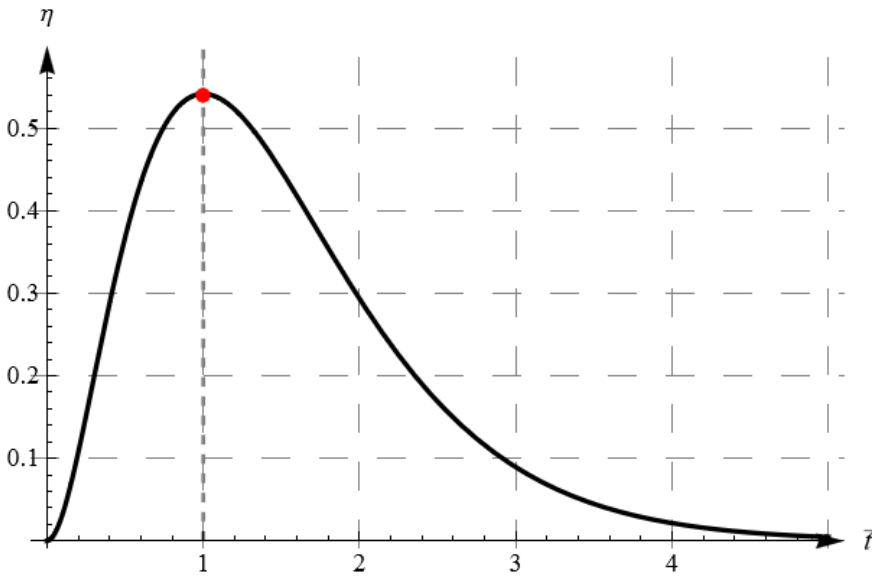


Рис. 1. График действия теплового потока η в зависимости от времени при $\xi = 0$

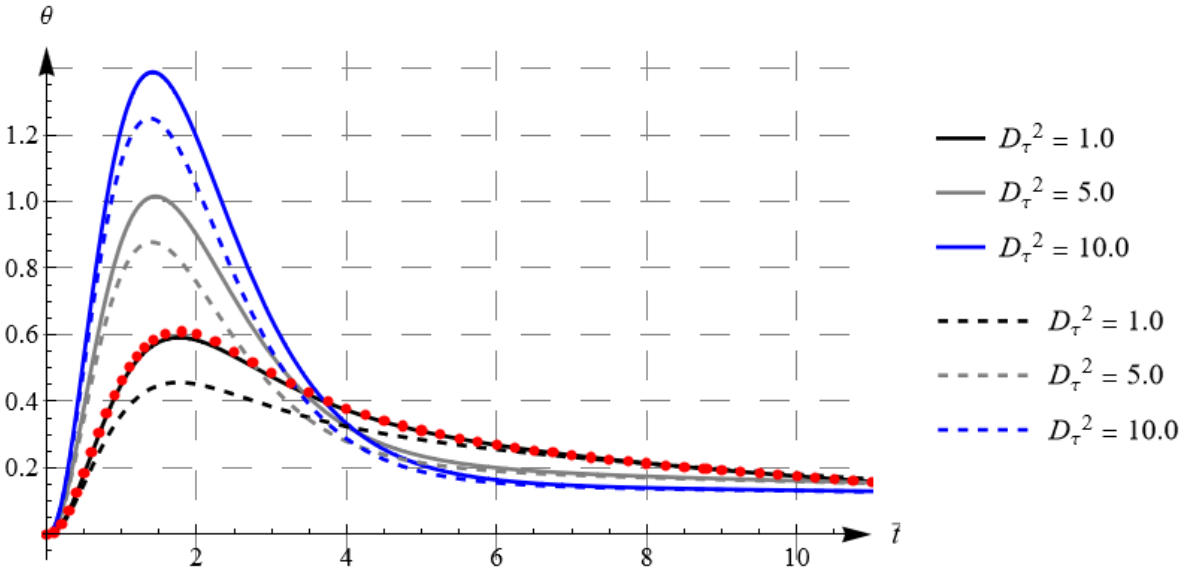


Рис. 2. График распределения безразмерной температуры θ на левом конце рассматриваемого тела; сплошные линии — $D_\lambda^2 = 0.1$; пунктирные линии — $D_\lambda^2 = 1.0$; точками отмечено решение локального случая

фициента D_λ^2, который отвечает за пространственную нелокальность. Обратную зависимость решения можно наблюдать при изменении коэффициента D_τ^2, который обратно пропорционален скорости распространения теплоты. Наибольшему отклонению значений температуры от классического решения соответствует наибольшее значение D_τ^2.

На рис. 3 и на рис. 4 представлены распределения безразмерной температуры θ в зависимости от пространственной переменной ξ для двух моментов времени $\bar{t} = 0.5$ и $\bar{t} = 2.0$ соответственно. На данных графиках видно, что при меньшем значении коэффициента большее количество тепловой энергии концентрируется около левого конца, где происходит импульсный нагрев. Для коэффициента D_τ^2 снова противоположная. Чем меньше значение D_τ^2 при неизменном значении D_λ^2, тем больше тепловой энергии проникает вглубь тела и тем меньше ее концентрации в области, близкой к точке нагрева.

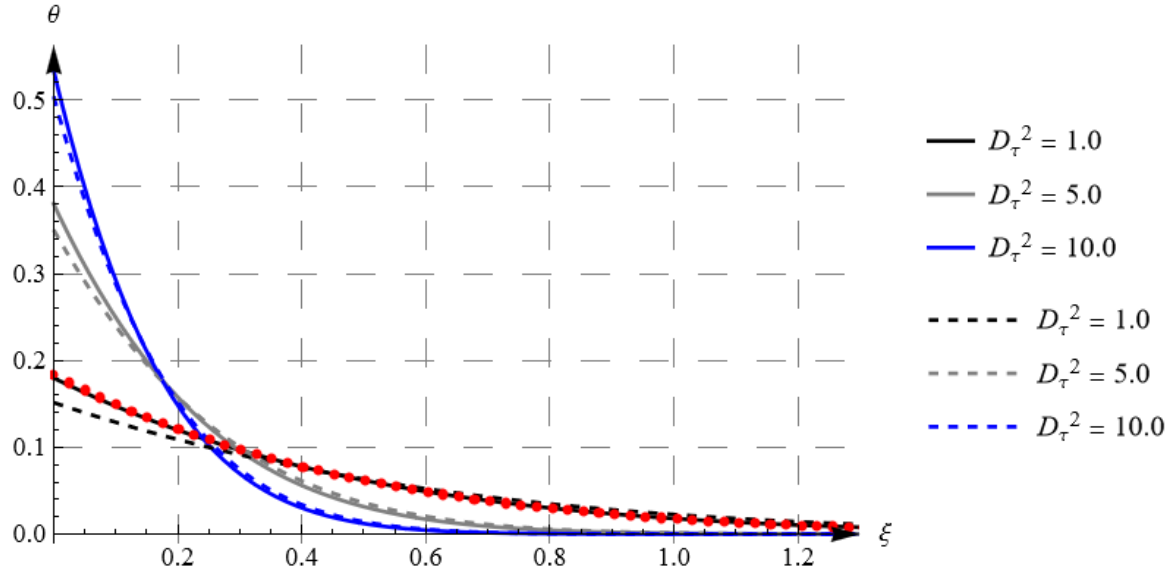


Рис. 3. График распределения безразмерной температуры θ по длине тела при $\bar{t} = 0.5$; сплошные линии — $D_\lambda^2 = 0.1$; пунктирные линии — $D_\lambda^2 = 1.0$; точками отмечено решение локального случая

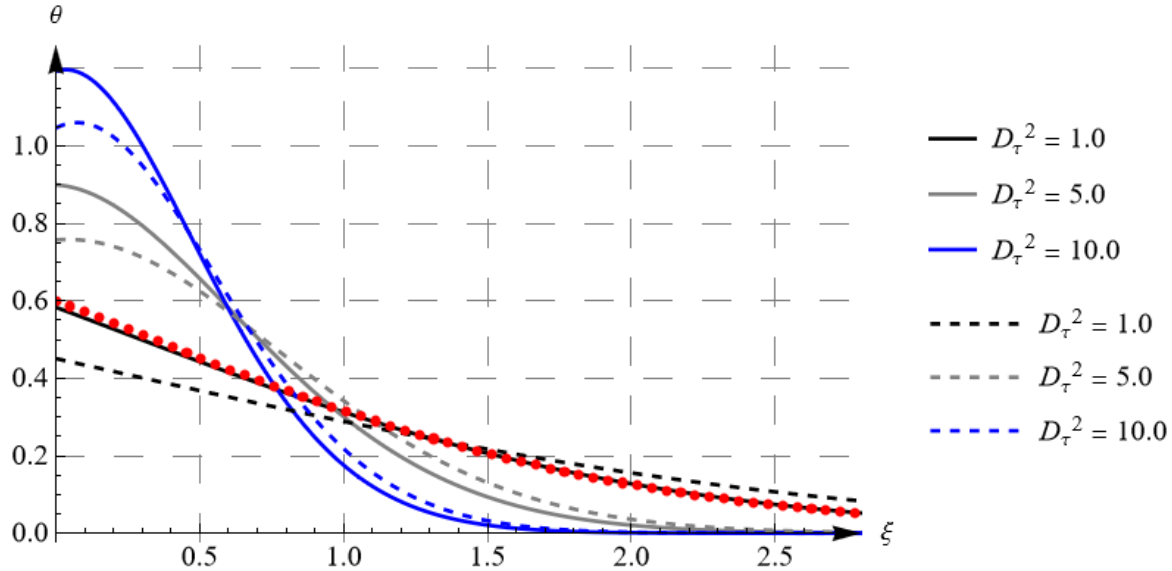


Рис. 4. График распределения безразмерной температуры θ по длине тела при $\bar{t} = 2.0$; сплошные линии — $D_\lambda^2 = 0.1$; пунктирные линии — $D_\lambda^2 = 1.0$; точками отмечено решение локального случая

Заключение

В данной работе рассмотрена модель для теплопроводности, учитывающая вклад от нелокальных эффектов по времени и пространству. Получено численное решение для одномерной задачи. Проведено сравнение с локальным случаем. Проанализировано влияние параметров, отвечающих за нелокальные эффекты, на поле температуры.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFN-2024-0004).

Литература

1. *Cao B. Y., Guo Z. Y.* Equation of motion of a phonon gas and non-Fourier heat conduction // Journal of Applied Physics. – 2007. – V. 102. – Article 053503.

2. *Tzou D. Y.* The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1995. – V. 38. – P. 3231–3240.

3. *Kuang Z. B.* Discussions on the temperature wave equation // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2014. – V. 71. – P. 424–430.

4. *Савельева И. Ю.* Вариационная формулировка математической модели процесса стационарной теплопроводности с учетом пространственной нелокальности // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Естественные науки». – 2022. – № 2(101). – С. 68–86.

5. *Kuvyrkin G. N., Savel'eva I. Yu., Kuvshinnikova D. A.* Nonstationary heat conduction in a curvilinear plate with account of spatial nonlocality // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2019. – V. 92. – P. 603–613.

6. *Kuvyrkin G. N., Savel'eva I. Yu., Kuvshinnikova D. A.* One mathematical model of heat conduction in nonlocal medium // AIP Conference Proceedings. – 2019. – DOI: 10.1063/1.5114388

7. *Sobolev S. L.* Nonlocal two-temperature model: Application to heart transport in metals irradiated by ultrashort laser pulses // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2016. – V. 94. – P. 138–144.

8. *Chengyun Hua Lucas Lindsay*. Space-time dependent thermal conductivity in nonlocal thermal transport // Physical Review B. – 2020. – DOI: 10.1103/PhysRevB.102.104310

9. *Roetzel W., Putra N., Das S. K.* Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure // International Journal of Thermal Sciences. – 2003. – V. 42. – P. 541–552.

10. *Basirat Tabrizi H., Andarwa S.* A method to measure time lag constants of heat conduction equations // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2009. – V. 36. – P. 186–191.

11. *Mahan G. D., Claro F.* Nonlocal theory of thermal conductivity // Physical Review B. – 1988. – V. 38 (3). – P. 1963–1969.

12. *Vermeersch B., Shakouri A.* Nonlocality in microscale heat conduction. – URL: https://arxiv.org/abs/1412.6555 (дата обращения 16.06.2024)

13. *Кувыркин Г. Н.* Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. – М. : Изд-во МГТУ, 1993. – 142 с.

УДК 536.21

СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В СОСТАВНОМ КОЛЬЦЕВОМ СЛОЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТИ

И. Ю. Савельева, А. А. Соколов, М. М. Евсеева

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аннотация. В данной статье рассмотрен стационарный режим теплопроводности с учетом эффекта пространственной нелокальности в составном кольцевом слое. Моделирование процесса теплопроводности в специфических областях даже в рамках классической теории требует тщательного анализа геометрии. При рассмотрении неклассических теорий, учитывающих эффекты нелокальных взаимодействий, исследование температурного поля в зависимости от геометрических особенностей области играет решающую роль для получения адекватных и полезных с практической точки зрения моделей. В данной работе было исследовано распределение температуры в кольцевом сплошном и составном слоях, произведено сравнение классической теплопроводности и неклассической с учетом эффекта пространственной нелокальности на примере задачи Дирихле.
Ключевые слова: стационарная теплопроводность, неклассическая модель, пространственная нелокальность, составной кольцевой слой, симметрия, задача Дирихле.

Введение

Моделирование теплопроводности актуально для высокотехнологичных инженерных приложений [1]. Востребованным в современной науке направлением является моделирование композитов — многокомпонентных материалов, обладающих улучшенными физическими характеристиками по сравнению с характеристиками отдельных их составляющих. Особое место в таких моделях занимают нанокомпозиты. Например, используемые в современных микро- и наноэлектромеханических системах (NEMS/MEMS) нанокомпозитные материалы должны обладать особенными физическими свойствами, необходимыми для корректной работы этих систем [2, 3].

В последние годы нанокомпозиты привлекли к себе значительное внимание именно благодаря своей настраиваемой структуре [1, 4]. Интеграция различного рода включений в матрицы материалов стала значимой областью исследований. Одними из широко используемых типов нанокомпозитных материалов являются слоистые материалы с нанопокрытиями [4]. В качестве модели для описания таких объектов удобно рассматривать составные, в том числе кольцевые, слои.

Моделирование теплопроводности в моделях малого масштаба или, например, в многомасштабных моделях [5] на таких специфических составных геометриях требует особого подхода к учёту физических свойств материалов и взаимодействий между их частями. Экспериментальные наблюдения за температурным полем на границах разделов материалов дали основание для развития и применения теорий нелокальной термодинамики [6], описывающих в моделях макромасштаба явления, происходящие на микро- и наноуровнях за счет учета нелокализованных по пространству взаимодействий между частицами материала.

В данной статье рассмотрена неклассическая математическая модель теплопроводности в составном кольцевом слое с учётом эффекта пространственной нелокальности на примере задачи Дирихле.

1. Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричный составной кольцевой слой с двумя концентрическими частями (рис. 1), выполненными из различных однородных изотропных теплопроводящих материалов с коэффициентами теплопроводности λ_1 и λ_2. Области внутреннего и внешнего материалов ограничены радиусами R_1 и R_2 соответственно, толщина слоя $h = R_2 - R_1$. На границе раздела материалов (по радиусу R') предполагаем выполнение условий идеального теплового контакта.

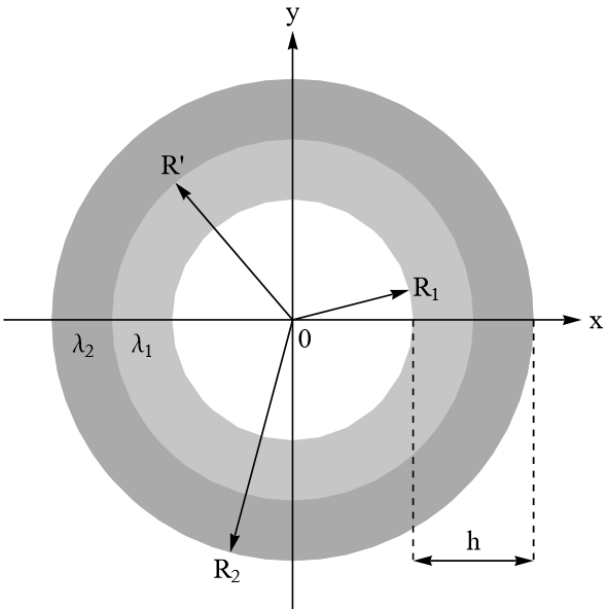


Рис. 1. Составной кольцевой слой

В замкнутой области $S \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей ∂S стационарное уравнение теплопроводности без внутренних источников или стоков теплоты имеет вид [7]:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} = 0, \tag{1}$$

где $\nabla_{\mathbf{x}} = \partial / \partial x_i \, \mathbf{e}_i$ — дифференциальный оператор набла; $\mathbf{e}_i, i = \overline{1,2}$ — единичные орты координатных осей; $x_i, i = \overline{1,2}$ — компоненты вектора $\mathbf{x}$; $\mathbf{q}$ — вектор плотности теплового потока.

Для учета эффекта пространственной нелокальности используем следующую гипотезу о виде вектора плотности теплового потока [8–10]:

$$\mathbf{q} = -\lambda \left(p_1 \nabla_{\mathbf{x}} T + p_2 \iint\limits_{S'(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'} T dS'(\mathbf{x}) \right), \tag{2}$$

где λ — коэффициент теплопроводности; $T = T(\mathbf{x})$ — температура; $p_1 > 0$ и $p_2 \geq 0$ — весовые доли локальных и нелокальных составляющих соответственно, такие, что $p_1 + p_2 = 1$; $S'(\mathbf{x})$ — область нелокального влияния, характеризуемая радиусом нелокальности r_{nl}; φ — нормированная положительная в области $S'(\mathbf{x})$ функция нелокального влияния, обладающая свойством монотонного убывания относительно центра области $S'(\mathbf{x})$.

В выражении (2) первое слагаемое отвечает классическому представлению о процессе теплопроводности согласно гипотезе Био — Фурье [7], причем модель допускает непосредственное рассмотрение классической постановки в случае $p_1 = 1$, $p_2 = 0$. Интегральное слагаемое реализует учет нелокального воздействия точек пространства $\mathbf{x}' \in S'(\mathbf{x})$ на рассматриваемую точку $\mathbf{x} \in S$.

Дальнейшие соотношения для удобства будем рассматривать в полярной системе координат $(r, \tilde{\varphi})$. Отметим, что для анализа эффекта пространственной нелокальности на установив-

шееся распределение температуры в кольцевом слое целесообразно обезразмерить основные расчетные параметры модели [10]. Будем считать, что:

$$r = \tilde{r}/R,\ T = \tilde{T}/T_0,\ \lambda = \tilde{\lambda}/\lambda_0,$$

где $\tilde{r}$, $\tilde{T}$, $\tilde{\lambda}$ — размерные параметры некоторой исходной модели, $[\tilde{r}] = $ м, $[\tilde{T}] = $ К, $[\tilde{\lambda}] = $ Вт/(м·К); R — характерный размер области, $[R] = $ м; T_0 — нормирующий множитель для температуры, $[T_0] = $ К; λ_0 — нормирующий множитель для коэффициента теплопроводности, $[\lambda_0] = $ Вт/(м·К). Аналогичную операцию обезразмеривания применим к параметрам каждого из материалов. Остальные величины, фигурирующие в задаче, получим путем комбинации приведенных безразмерных параметров. Вид уравнения (1) при этом не изменится.

Зададим граничные условия Дирихле на внутренней и внешней границах рассматриваемой области. Тогда полная постановка с учетом уравнения (1) и условия идеального теплового контакта материалов примет вид:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{q}_1 = 0, \quad R_1 \le r \le R', \\ \nabla \cdot \mathbf{q}_2 = 0, \quad R' \le r \le R_2, \\ T_1\big|_{r=R_1} = \theta_1, \\ T_2\big|_{r=R_2} = \theta_2, \\ T_1\big|_{r=R'} = T_2\big|_{r=R'}, \\ \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}\big|_{r=R'} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}\big|_{r=R'}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ — векторы плотности тепловых потоков во внутреннем и внешнем материалах соответственно, заданные в виде (2); T_1, T_2 — функции, описывающие соответствующие материалам температурные поля; θ_1, θ_2 — заданные температуры на границах; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности контакта материалов.

2. Результаты расчетов

Численное решение задачи получено с использованием программного комплекса NonLocFEM [11], в котором реализован нелокальный метод конечных элементов.

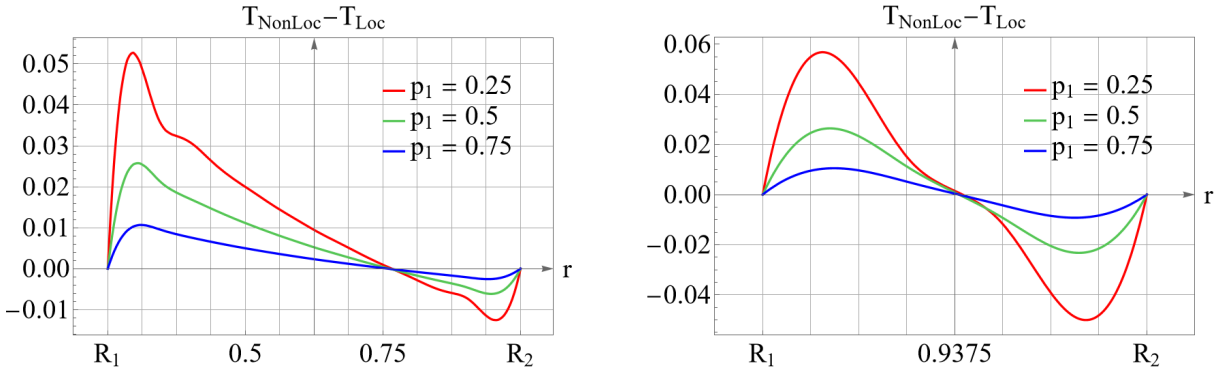
2.1. Случай сплошного кольцевого слоя

Рассмотрим случай, когда R' совпадает с одной из границ R_1 или R_2, т. е. материал кольцевого слоя является однородным: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Система уравнений (3) может быть упрощена, классическое решение (при $p_1 = 1$) в данном случае имеет вид:

$$T(r) = \theta_1 + \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{\ln\left(R_2/R_1\right)} \ln\left(r/R_1\right), \quad R_1 \le r \le R_2.$$

Расчет проведен при следующих параметрах: $R_2 = 1$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 1$. Толщину кольцевого слоя посредством выбора R_1 и параметры нелокальной модели будем варьировать. Влияние эффекта пространственной нелокальности на распределение температуры в слое можно проследить по разности нелокального и классического решений $\Delta T = T_{NonLoc} - T_{Loc}$ в зависимости от радиальной координаты r при различных значениях весового параметра p_1 (рис. 2).

Как и в классической постановке задачи, распределение температуры в случае присутствия нелокальных эффектов одинаково во всем угловым сечениям и симметрично по отношению к осям симметрии рассматриваемого кольцевого слоя. По графикам, представленным на рис. 2, видно, что при увеличении веса локальной составляющей p_1 решение приближается к классическому, что соответствует физическому смыслу весовых параметров p_1 и p_2.



а) *б)*

Рис. 2. Графики отклонения нелокального решения относительно классического в сечении кольцевого слоя при различных значениях весового параметра p_1; параметры моделей: а) $h = 0.75$, $r_{nl} = 0.1$; б) $h = 0.125$, $r_{nl} = 0.05$

Можно заметить, что по мере уменьшения толщины кольцевого слоя распределение ΔT симметризуется относительно среднего радиуса $r = (R_2 + R_1)/2$. Для анализа данного эффекта введем центрированную и нормированную радиальную координату: $\rho = (r - R_1)/h$, $\rho \in [0,1]$, в качестве модельных параметров примем $r_{nl} = 0.05$, $p_1 = 0.5$. На рис. 3 продемонстрированы графики отклонений нелокального решения относительно классического в зависимости от координаты ρ при различных толщинах кольцевого слоя.

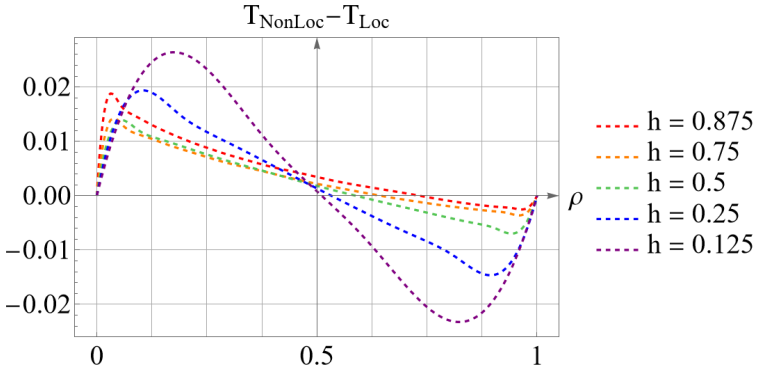


Рис. 3. Графики отклонения нелокального решения относительно классического в зависимости от нормированной и центрированной координаты при различных толщинах слоя

По мере уменьшения внутреннего радиуса R_1 кольцевого слоя, при фиксированном значении внешнего радиуса R_2 и радиуса нелокальности r_{nl}, асимметрия решения становится более заметной. Она проявляется в виде увеличенных отклонений нелокальных решений относительно классических в окрестности внутреннего радиуса, что характеризует выраженный кромочный эффект [8]. Также можно наблюдать смещение вправо находящейся внутри слоя точки совпадения решений.

Симметричное распределение разности решений наблюдается в случае прямоугольной пластины [8]. Можно отметить, что присутствие симметрии при достаточно больших внутренних радиусах объяснимо приближением геометрии кольцевого слоя к прямоугольной: при увеличении внутреннего радиуса R_1 и фиксированном внешнем радиусе R_2 кривизны в каждой промежуточной точке рассматриваемого кольцевого слоя становятся близкими по величине, а в прямоугольной пластине кривизна в каждой точке постоянна. Таким образом, эффекты от кривизны области при уменьшении толщины слоя нивелируются, а сама кривизна играет существенную роль в распределении поля температуры при учете нелокальных эффектов.

С другой стороны, можно отметить увеличение отклонения относительно классического решения при уменьшении толщины кольцевого слоя. Это можно объяснить усилением нелокальных взаимодействий за счет пересечения областей влияния точек друг на друга.

2.2. Случай составного кольцевого слоя

Рассмотрим случай составного кольцевого слоя. Из системы уравнений (3) классическое решение (при $p_1 = 1$) может быть получено аналитически в виде:

$$T(r) = \begin{cases} \theta_1 + \dfrac{\lambda_2(\theta_2 - \theta_1)}{\lambda_1 \ln(R_2/R') + \lambda_2 \ln(R'/R_1)} \ln(r/R_1), & R_1 \le r \le R', \\ \theta_2 + \dfrac{\lambda_1(\theta_2 - \theta_1)}{\lambda_1 \ln(R_2/R') + \lambda_2 \ln(R'/R_1)} \ln(r/R_2), & R' \le r \le R_2. \end{cases}$$

Зададим геометрические параметры и граничные условия: $R_1 = 0.5$, $R' = 0.75$, $R_2 = 1$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 1$, примем $r_{nl} = 0.1$. Физические свойства материалов и веса в нелокальной модели будем варьировать. Результаты численного моделирования продемонстрированы на рис. 4.

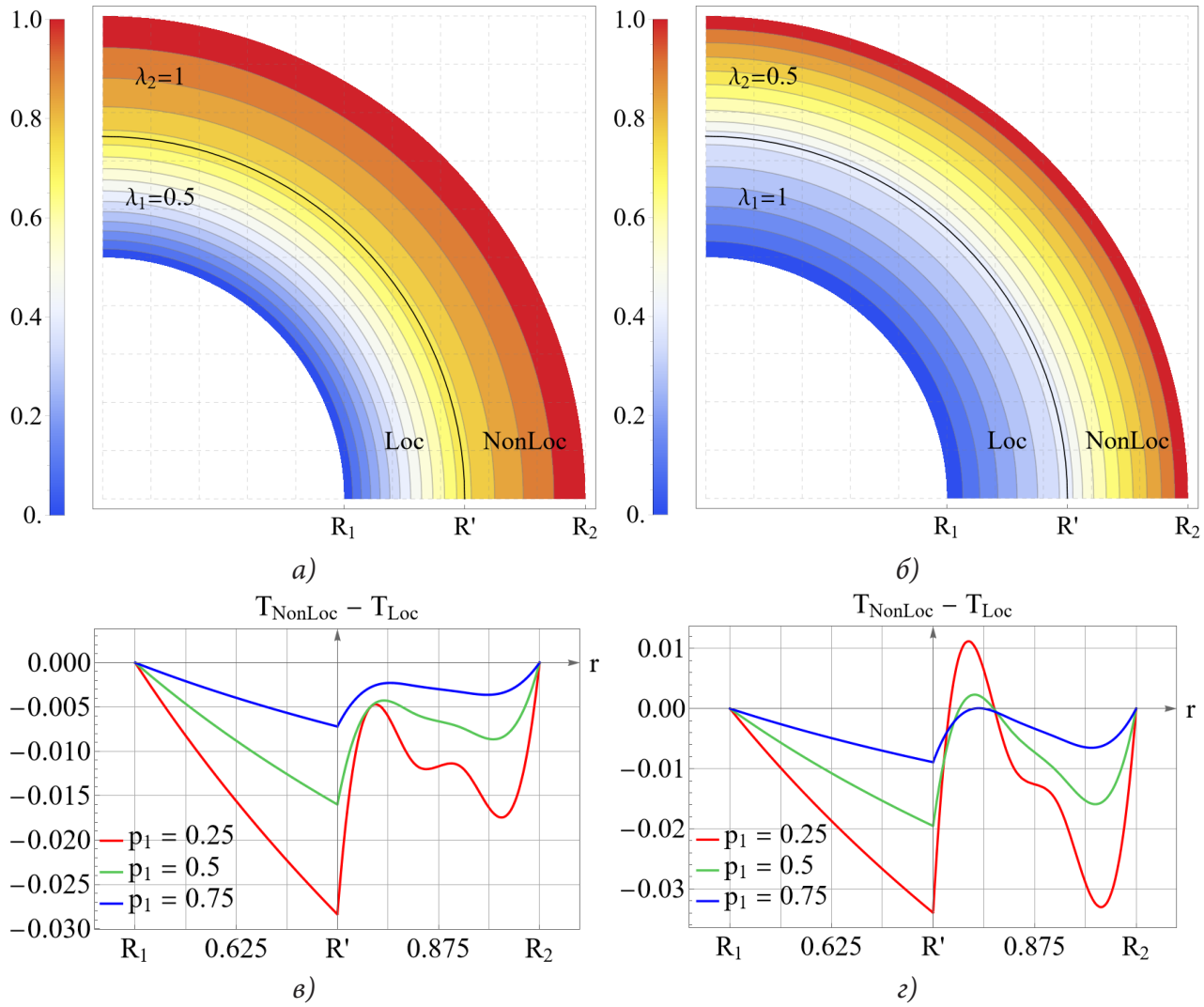


Рис. 4. Изотермические линии в четверти кольцевого слоя при значении весового параметра $p_1 = 0.5$ и графики отклонения нелокального решения относительно классического в сечении слоя при различных значениях весового параметра p_1; а), в) $\lambda_1 < \lambda_2$; б), г) $\lambda_1 > \lambda_2$

По графикам, представленным на рис. 4, в данной модели составного кольцевого слоя на границе раздела материалов характерно уменьшение температуры по сравнению с классическим решением. Отметим также, что по рис. 4 можно проследить похожую на случай сплошного кольцевого слоя симметризацию разности решений в области материала, обладающего пространственной нелокальностью.

Заключение

В рамках исследования стационарной теплопроводности в составном кольцевом слое с учетом пространственной нелокальности проведено сравнение аналитического решения в классической постановке задачи и полученных в результате численного моделирования решений в нелокальной постановке. Расчеты демонстрируют, что нелокальная модель стационарной теплопроводности для кольцевого слоя имеет ряд особенностей, связанных с геометрией: проявляются различного рода асимметрии, обусловленные кривизной области, а также можно отметить выраженное усиление нелокальных эффектов в окрестности внутреннего радиуса.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFN-2024-0004)

Литература

1. *Bouthaina El Aoud, Saad Althobaiti, A.F. Aljohani, Mahmoud M. Selim, Mohamed Boujelbene, Sherain M.Y. Mohamed, Ibrahim Mahariq*. Micromechanical modeling of thermal conductivities of unidirectional carbon fiber/epoxy composites containing carbon nanotube/graphene hybrids // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2024. – Vol. 157. – Art. 107726.

2. *Berman D., Krim J.* Surface science, MEMS and NEMS: Progress and opportunities for surface science research performed on, or by, microdevices // Progress in Surface Science. – 2013. – Vol. 88, No 2. – P. 171–211.

3. *Yang W. D., Kang W. B., Wang X.* Thermal and surface effects on the pull-in characteristics of circular nanoplate NEMS actuator based on nonlocal elasticity theory // Applied Mathematical Modelling. – 2017. – Vol. 43. – P. 321–336.

4. *Huang H., Song K.* Modulation of heat flux and thermal stress at the double interface by nanocoating thickness // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. – 2024. – Vol. 75, No 20.

5. *Nieminen R. M.* From atomistic simulation towards multiscale modelling of materials // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2002. – Vol. 14, No 11. – P. 2859–2876.

6. *Luo P., Li X., Tian X.* Nonlocal thermoelasticity and its application in thermoelastic problem with temperature-dependent thermal conductivity // European Journal of Mechanics - A/Solids. – 2021. – Vol. 87. – Art. 104204.

7. *Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. – 512 с.

8. *Савельева И. Ю.* Разработка и анализ математических моделей термомеханики структурно-чувствительных материалов: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 1.2.2 / Савельева Инга Юрьевна; Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет). Москва, 2023. 375 с.

9. *Кувыркин Г. Н., Савельева И. Ю., Кувшинникова Д. А.* Нестационарная теплопроводность в криволинейной пластине с учетом пространственной нелокальности // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92, № 3. – С. 631.

10. *Kuvyrkin G. N., Savelyeva I. Y., Safronov Y. A., Sokolov A. A.* Mathematical modeling of insulating coating of thermal conductivity including body's own radiation and non-local spatial effects // Journal of Physics: Conference Series. – 2024. – Vol. 2817, No 1. – P. 12–28.

11. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. NonLocFEM / Соколов А. А.; Соколов А. А., Савельева И. Ю. № 2021661966; заявл. 20.07.2021; опубл. 22.09.2022, РД040930 (Рос. Федерация).

УДК 519.6

АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ ЦВЕТОВЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ШУМОПОДАВЛЕНИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ

И. А. Седых, А. Е. Харитонов

Липецкий государственный технический университет

Аннотация. В статье рассматривается эффективность работы цветовых пространств RGB, HSV, HSL, YCbCr, Lab при шумоподавлении изображения. Работа выполнена при помощи скрипта, написанного на языке Python. Скрипт позволяет получить такие метрики для сравнения изобрадений, как среднеквадратическая ошибка (MSE), пиковое отношение сигнал-шум (PSNR), индекс структурного сходства (SSIM), а также размер полученных файлов. Представлены результаты исследования с помощью метрик в табличном виде и сделан вывод о проделанной работе.

Ключевые слова: цветовые пространства, шум, шумоподавление, размытие по Гауссу, медианный фильтр, билатериальный фильтр, компьютерная графика, обработка изображений, среднеквадратическая ошибка, индекс структурного сходства, пиковое отношение сигнал-шум.

Введение

Технический прогресс зашел очень далеко, и большое количество информации представлено визуально, например, с помощью различных изображений или видео (прямоугольная матрица, состоящая из пикселей) [1]. Когда речь заходит про обработку изображений, то под словом «обработка» может подразумеваться изменение разрешения, кадрирование, замена цвета, удаление объектов, наложение нескольких изображений друг на друга и прочее.

Одним из способов обработки изображений является шумоподавление. Очень часто «шум» может проявляться в изображениях, полученных в условиях низкой освещенности, из-за чего, в основном, в темных участках появляются заметные артефакты. Очистка изображения от шума является крайне важным способом обработки: в некоторых ситуациях использование дополнительных источников освещения является невозможным, или может быть допущена ошибка при выставлении настроек в камере, или же этот способ может оказаться проще и быстрее в определенных условиях съёмки.

На сегодняшний день замена цветового пространства при обработке используется, например, при распознавании лиц на видео или для подготовки изображения к печати, однако применение данного способа при работе с шумоподавлением не рассматривалось. Актуальность данной работы обусловливается тем, что при переходе в другое цветовое пространство изображение считывается и воспринимается системой иначе, чем в привычном RGB пространстве, а значит и результат работы при шумоподавлении в ином пространстве может кардинально отличаться.

Целью работы является исследование и реализация методов классического шумоподавления при работе в разных цветовых пространствах, таких как RGB, HSV, HSL, YCbCr [2] и Lab [3], их влияние на обработку изображений и приведен анализ полученных метрик в результате работы программного обеспечения, а также будет произведено сравнение размера полученных файлов.

1. Шум и методы шумоподавления

1.1. Шум

Под шумом в изображении подразумевается искажение передачи сигнала с матрицы камеры, что приводит к появлению на картинке пикселей, отличающихся по цвету и интенсивно-

сти света. Присутствие шума наиболее заметно в темных участках изображения, например, когда вместо однотонного черного цвета мы наблюдаем цветные вкрапления.

Операция шумоподавления направлена на то, чтобы убрать полученные цифровые артефакты и привести изображение в более аккуратный, точный или реалистичный вид. Рассмотрим такие классические методы шумоподавления, как размытие по Гауссу, медианная фильтрация и билатериальный фильтр.

В области компьютерной графики использование размытия в изображении играет большую роль, а функционал для применения крайне разнообразен. Например, это может быть использовано для улучшения визуальной картинки путём удаления шумов, царапин или других незначительных дефектов, выделение объекта, для привлечения большего к нему внимания, или наоборот, если нужно скрыть объект из соображений цензуры. Кроме того, размытие может применяться и для устранения излишних деталей, что часто применяют при ретуши портрета, когда возникает необходимость скрыть дефекты кожи.

1.2. Размытие по Гауссу

Размытие по Гауссу — это линейный фильтр, который преобразует пиксели, используя функцию нормального распределения. Данная функция будет иметь вид:

$$G_{\sigma_s}[m,n] = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} e^{-\frac{(m^2+n^2)}{2\sigma_s^2}},$$

где G_{σ_s} — полученное изображение, m и n — координаты пикселя, σ_s^2 — пространственный коэффициент размытия.

Применяя данный фильтр для изображения, функция перераспределяет «вес» пикселей, за что отвечает параметр σ. Чем больше значение σ, тем большая площадь захватывается для перераспределения значений, что в свою очередь отражается на большей степени размытия. Визуальное представление функции Гаусса (рис. 1)

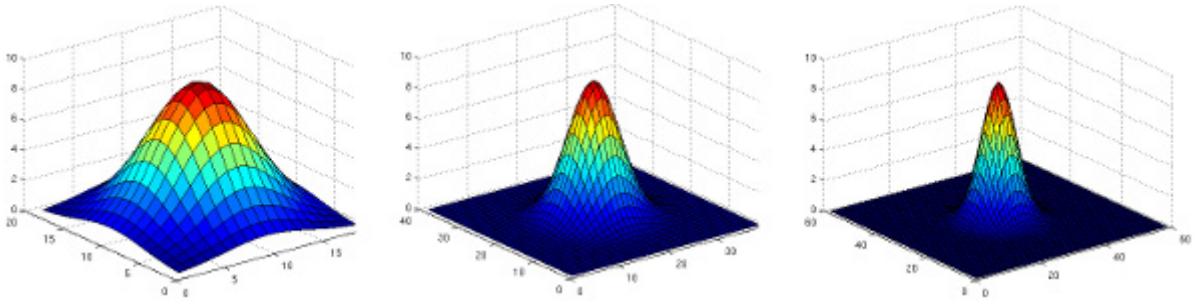


Рис. 1. Функция Гаусса для $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

1.3. Медианный фильтр

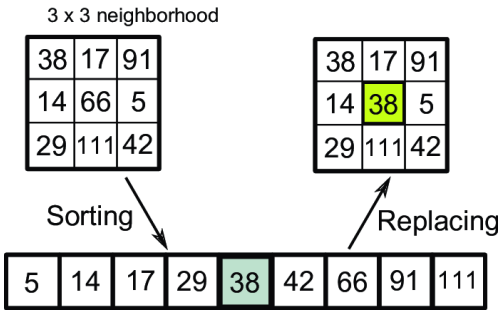


Рис. 2. Принцип работы медианного фильтра

Еще одним методом шумоподавления является медианная фильтрация [4]. Принцип работы такого фильтра заключается в том, что для каждого пикселя рассматривается значения соседних, сортируются в порядке возрастания и результирующим будет медианное значение (рис. 2).

Важно обратить внимание на то, что данный фильтр является нелинейным, где значение выходного пикселя не является средней величиной суммы всех остальных. Преимущество данного метода, в сравнении с размытием по Гауссу заключается в том, что данный фильтр менее чувствителен к сильным перепадам в числовых значениях. Данный метод помогает сохранить некоторую резкость в изображении и позволяет различить границы между объектами изображения.

1.4. Билатериальный фильтр

Принцип работы билатериального фильтра очень похож на размытие по Гауссу, где выбирается некоторое среднее значение, однако отличие заключается в том, что билатериальный фильтр тоже позволяет сохранить границы объектов, учитывая расстояние между значениями взятой области для фильтрации. Функция имеет следующий вид:

$$W_{sr}[m,n] = \sum_{m}^{1}\sum_{n}^{1} f\left[m,n\right] n_{\sigma_s}\left[i-m, j-n\right] n_{\sigma_r}\left(f\left[m,n\right]-f\left[i,j\right]\right),$$

$$n_{\sigma_s}\left[m,n\right] = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} e^{-\frac{\left(m^2+n^2\right)}{2\sigma_s^2}},$$

$$n_{\sigma_r}\left[k\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r} e^{-\frac{k^2}{2\sigma_r^2}}.$$

Визуально работу билатериального фильтра можно представить на рис. 3

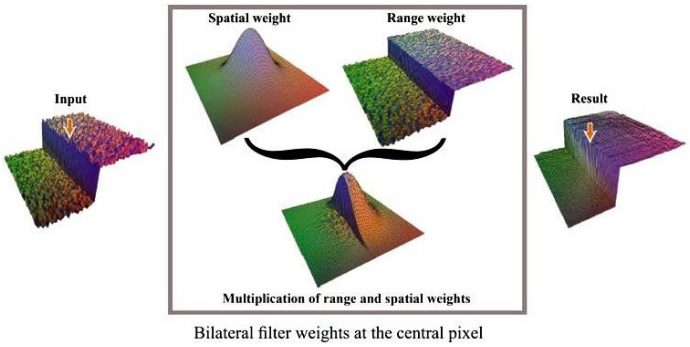


Рис. 3. Принцип работы билатериального фильтра

2. Метрики сравнения изображений

Для проведения сравнения изображений используется скрипт, реализованный на языке Python, который позволяет переконвертировать их в другое цветовое пространство, произвести работу шумоподавление, и получить метрики для сравнения результатов. Критериями оценки будут являться такие величины, как среднеквадратическая ошибка (Mean Square Error или MSE), пиковое отношение сигнал-шум (Peak Signal to Noise Ratio или PSNR) [1] и индекс структурного сходства (Structure Similarity или SSIM) [5], также будут сравниваться размеры полученных файлов.

Формулы метрик имеют следующий вид:

$$MSE = \frac{1}{mn}\sum_{x=0}^{m-1}\sum_{y=0}^{n-1}\left|I\left(x,y\right)-K\left(x,y\right)\right|^2,$$

$$PSNR = 20\ln\left(\frac{MAX_I}{\sqrt{MSE}}\right),$$

$$SSIM(x,y)=\frac{(2\mu_x\mu_y+c_1)(2\sigma_{xy}+c_2)}{(\mu_x^2\mu_y^2+c_1)(\sigma_x^2+\sigma_y^2+c_2)},$$

где m, n — длины сторон изображения; x, y — координаты пикселя; $I(x,y)$, $K(x,y)$ — исходное и полученное изображения; MAX_I — максимальное значение, принимаемое пикселем (для 8 бит $MAX_I = 255$); μ_x, μ_y — средние значения по x и y; σ_x, σ_y — дисперсии x и y; σ_{xy} — ковариация x и y; c_1, c_2 — константы.

3. Результаты работы

Для работы были выбраны реальные фотографии размером 1500×1000 пикселей, сделанные самостоятельно. Пример одной из фотографий приведен на рис. 4.

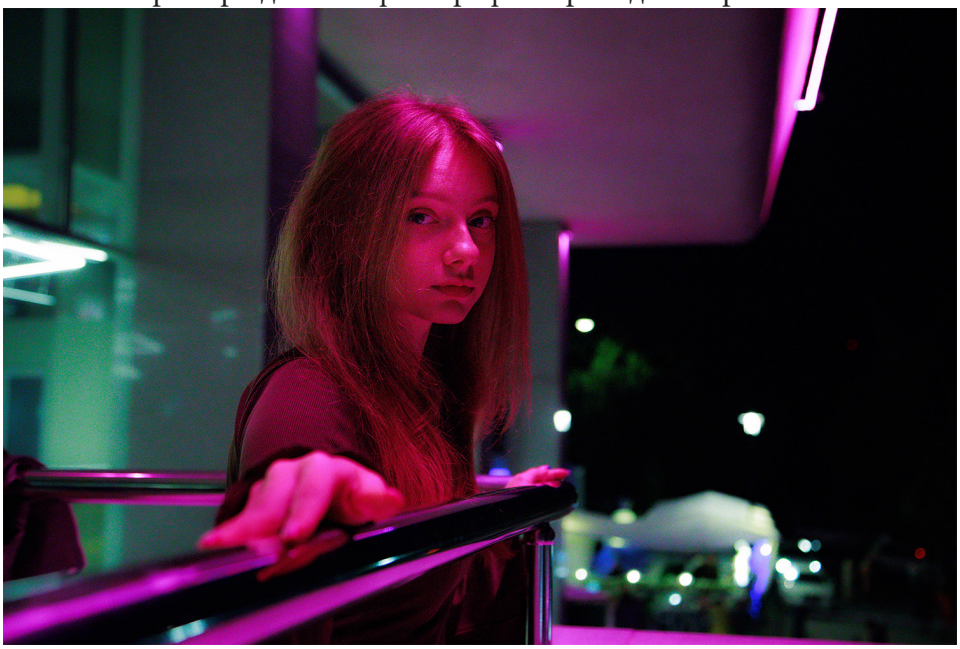


Рис. 4. Пример фотографии до обработки

Для проведения анализа работы шумоподавления в разных цветовых пространствах была составлена таблица со значениями всех необходимых метрик. Сравнение происходило между неким эталонным вариантом после обработки через Adobe Lightroom и результатом работы скрипта. Результаты приведены в табл. 1–5.

Таблица 1

Значения метрик после обработки изображений в пространстве HSV

Color Space	Method	Metrics	Image 1	Image 2	Image 3	Image 4	Image 5	Image 6
HSV	Gaussian Blur	PSNR	25,986	24,572	27,566	17,991	34,610	31,105
		SSIM	0,752	0,764	0,787	0,476	0,947	0,918
		MSE	491,581	680,655	341,633	3097,59	67,477	151,242
		Size (bites)	318186	412837	434665	799701	286576	352334
	Median Filter	PSNR	29,721	28,583	28,042	36,877	34,284	31,291
		SSIM	0,885	0,890	0,793	0,982	0,943	0,935
		MSE	208,02	270,291	306,153	40,032	72,739	144,901
		Size (bites)	261278	324492	401550	244414	260593	308338

	Bilaterial Filter	PSNR	31,314	27,668	28,699	25,095	34,780	31,718
		SSIM	0,900	0,853	0,833	0,908	0,948	0,942
		MSE	144,130	333,722	263,165	603,535	64,883	131,325
		Size (bites)	279823	381797	475761	417107	224951	277873

Таблица 2

Значения метрик после обработки изображений в пространстве HSL

Color Space	**Method**	**Metrics**	**Image 1**	**Image 2**	**Image 3**	**Image 4**	**Image 5**	**Image 6**
HSL	Gaussian Blur	PSNR	25,733	24,636	27,566	17,991	34,610	31,105
		SSIM	0,748	0,757	0,787	0,476	0,947	0,918
		MSE	521,075	670,748	341,633	3097,590	67,477	151,242
		Size (bites)	321669	414404	434665	799701	286576	352334
	Median Filter	PSNR	29,572	28,404	28,042	36,877	34,284	31,291
		SSIM	0,882	0,880	0,793	0,982	0,943	0,935
		MSE	215,255	281,663	306,153	40,032	72,739	144,901
		Size (bites)	263594	321736	401550	244414	260593	308338
	Bilaterial Filter	PSNR	30,516	27,330	28,699	25,095	34,780	31,718
		SSIM	0,891	0,840	0,833	0,908	0,948	0,942
		MSE	173,189	360,692	263,165	603,535	64,883	131,325
		Size (bites)	284687	385710	475761	417107	224951	277873

Таблица 3

Значения метрик после обработки изображений в пространстве YCbCr

Color Space	**Method**	**Metrics**	**Image 1**	**Image 2**	**Image 3**	**Image 4**	**Image 5**	**Image 6**
YCbCr	Gaussian Blur	PSNR	31,882	29,981	28,765	37,995	35,626	33,398
		SSIM	0,943	0,903	0,840	0,988	0,956	0,956
		MSE	126,470	195,930	259,220	30,949	53,406	89,208
		Size (bites)	212886	280539	393460	223535	271755	318210
	Median Filter	PSNR	30,389	29,896	28,025	37,551	34,269	31,309
		SSIM	0,929	0,913	0,792	0,989	0,943	0,936
		MSE	178,325	199,764	307,400	34,279	72,995	144,297
		Size (bites)	206485	257965	395079	198495	253848	302311
	Bilaterial Filter	PSNR	32,352	30,245	28,158	37,606	34,077	31,070
		SSIM	0,93	0,911	0,807	0,988	0,944	0,939
		MSE	113,494	184,352	298,130	33,850	76,293	152,470
		Size (bites)	170924	205944	313106	152122	190302	229722

В ходе анализа метрик можно сделать вывод, что лучшим пространством при обработке является RGB с использованием билатериального фильтра. На втором месте находится пространство YCbCr, так как оно уступает по MSE, PSNR и SSIM, однако размер полученных файлов после работы в YCbCr меньше, чем для всех других пространств. Хуже всего себя показали пространства HSV и HSL в сочетании с размытием по Гауссу и медианным фильтром: на изображениях присутствует заметный брак в виде цветных пятен, то есть обработка происходит некорректно и изображения непригодны для дальнейшего использования (рис. 5). При обработке с билатериальным фильтром данной проблемы замечено не было.

Таблица 4

Значения метрик после обработки изображений в пространстве Lab

Lab	Gaussian Blur	PSNR	31,609	29,451	28,464	37,533	35,489	33,363
		SSIM	0,905	0,903	0,830	0,985	0,953	0,955
		MSE	134,681	221,332	277,790	34,421	55,119	89,930
		Size (bites)	217227	275248	392056	233209	276945	321777
	Median Filter	PSNR	30,244	29,345	28,016	37,162	34,190	31,290
		SSIM	0,892	0,908	0,787	0,984	0,940	0,935
		MSE	184,407	226,832	307,971	37,493	74,320	144,914
		Size (bites)	219292	278575	400091	228046	263425	308628
	Bilaterial Filter	PSNR	32,535	29,584	27,909	37,564	33,938	31,102
		SSIM	0,903	0,913	0,799	0,985	0,942	0,939
		MSE	108,808	214,678	315,672	34,177	78,771	151,341
		Size (bites)	185042	215554	317684	174144	200779	240491

Таблица 5

Значения метрик после обработки изображений в пространстве RGB

RGB	Gaussian Blur	PSNR	31,893	30,008	28,777	38,061	35,665	33,440
		SSIM	0,944	0,906	0,842	0,988	0,956	0,956
		MSE	126,132	194,679	258,475	30,480	52,921	88,336
		Size (bites)	214042	282472	393973	225720	272658	319357
	Median Filter	PSNR	30,498	29,974	28,062	37,616	34,312	31,338
		SSIM	0,930	0,916	0,793	0,990	0,944	0,937
		MSE	173,915	196,235	304,772	33,768	72,265	143,340
		Size (bites)	206878	266872	390005	204326	252070	298098
	Bilaterial Filter	PSNR	34,918	30,562	30,015	38,037	36,118	34,017
		SSIM	0,950	0,918	0,866	0,988	0,955	0,960
		MSE	62,856	171,374	194,368	30,653	47,680	77,345
		Size (bites)	194860	232448	422174	158158	212980	277494



Рис. 5. Результат после работы в пространстве HSV с размытием по Гауссу и билатериальным фильтром

Заключение

В ходе работы было рассмотрено влияние смены цветового пространства на очистку изображения от шумов. Для данного исследования был реализован скрипт на языке Python, который позволяет вычислить необходимые метрики для сравнения обработанного изображения с эталонным вариантом. Для обработки были использованы три базовых метода шумоподавления для пяти разных цветовых пространств, применяемых к шести фотографиям.

Исходя из полученных метрик можно сказать, что пространство RGB занимает первое место. Хуже всего себя показывают пространства HSV и HSL, так как кроме метрик было замечено сильное проявление артефактов в виде цветных пятен и вкраплений. Однако, кроме пространства RGB, интерес вызывает и пространство YCbCr. Для каждого изображения наименьший вес файла получается добиться именно при применении цветового пространства YCbCr и билатериального фильтра, что в некоторых ситауациях может быть критично, например, для скорости передачи файла между устройствами или для хранения большого количества файлов.

Литература

1. *Гонсалес Р.* Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – Москва : Техносфера, 2006. – 1072 с.

2. Understanding Color Models : A Review / N. A. Ibraheem, M. M. Hasan, R. Z. Khan, P. K. Mishra. – Text : immediate // India : ARPN Journal of Science, Technology. ‑ 2012. ‑ Vol. 2, № 3. ‑ С. 265‑275.

3. *Маргулис Д.* Photoshop для профессионалов : классическое руководство по цветокоррекции / Д. Маргулис ; перевод с английского. –5-е изд. – Москва : Интелбук, 2007. – 656 с.

4. *Hussein T. D. H.* A study on image noise and various image denoising techniques / T. D. H. Hussein, H. K. Omar, K. H. Jihad. – Iraq : ResearchJet Journal of Analysis and Inventions, 2021. – Vol. 2. – 42 p.

5. *Umme S.* Image Quality Assessment through FSIM / S. Umme, A. Morium, S. U. Mohammad. – Text : immediate // SSIM, MSE and PSNR-A Comparative Study. – 2019. – 240 с.

УДК 004.021

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК АЛГОРИТМОВ ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

А. В. Семенов, Т. М. Леденева

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассматриваются алгоритмы поиска кратчайшего пути Дейкстры и A*. Производится сравнение данных алгоритмов, а также поиска в ширину на случайно сгенерированных лабиринтах разной размерности. Исследование включает анализ времени работы, количества посещённых вершин и длины маршрута. Особое внимание уделяется эвристическому подходу алгоритма A*, который демонстрирует лучшие показатели по числу обработанных вершин и адаптивности.
Ключевые слова: взвешенный орграф, кратчайший путь, поиск в ширину.

Введение

Алгоритмы поиска пути — это методы компьютерной обработки данных, используемые для построения оптимального маршрута между двумя или несколькими точками в графе, матрице или пространстве.

Тема построения пути является одной из актуальных проблем современного программирования и находит свое применения во многих аспектах современного мира. К виду графа или матрицы можно привести множество практических задач, благодаря чему алгоритмы поиска пути находят свое применение в городской инфраструктуре при построении маршрутов движения общественного транспорта, проложении новых дорог, в контексте систем GPS, в бизнесе для решения проблем логистики, при разведке. С помощью алгоритмов поиска пути производится разведка и построение карт местности, они могут быть использованы при поисково-спасательных операциях. Также алгоритмы активно используются в сфере компьютерных игр и робототехнике.

Наиболее известным алгоритмом поиска кратчайшего пути является алгоритм Дейкстры [1]. Долгое время рассматривались варианты оптимизации алгоритма возникали новые итерации. Ученым Нильсом Нильсеном для создания робота, способного самостоятельно прокладывать маршрут, была предложена возможность использования эвристики, чтобы учитывать примерное расстояние от рассматриваемой точки до конечной. Затем Бертрамом Рафаэлем была предложена модификация, учитывающая помимо расстояния от рассматриваемой точки до конечной также расстояние от начальной точки до текущей. Таким образом, в 1968 году появился алгоритм, названный A* [2]. Он сохраняет основную идею алгоритма Дейкстры, однако оптимизирует процесс выбора точек, используя эвристический подход, за счет чего алгоритм изначально старается двигаться к целевой точке, благодаря чему просматривается меньшее количество вершин. В данной статье будет рассмотрено насколько велика разница между алгоритмами, путем сравнения времени их работы, подсчета количества посещаемых вершин и длины найденного пути.

1. Поиск в ширину

Алгоритм поиска в ширину является одним из простейших алгоритмов поиска кратчайшего пути. Работает по принципу последовательного обхода всех вершин графа по «уровням» («уровнем» в данном контексте называется удаленность или глубина вершины от источника).

Алгоритм можно расписать по следующим шагам:

1. Поместить в очередь начальную вершину;

2. Извлечь из очереди первую вершину, пометив ее как рассмотренную;

3. Если последняя извлеченная вершина является целью – вернуть результат;

4. Если последняя извлеченная вершина не является целью – добавить в очередь все смежные с ней непомеченные вершины;

5. Перейти к пункту 2.

В случае невзвешенного графа поиск в ширину всегда находит кратчайший путь, однако, если граф взвешенный — поиск в ширину найдет путь, проходящий через наименьшее количество вершин, не обязательно кратчайший.

Алгоритм имеет сложность $O(V + E)$, где V — количество вершин, E — количество ребер.

2. Алгоритм Дейкстры

Алгоритм Дейкстры можно описать следующим образом:

1. Для всех вершин графа выставить метку расстояния равной бесконечности;

2. Поместить в очередь начальную вершину, пометив расстояние до нее как 0;

3. Извлечь из очереди первый элемент;

4. Рассмотреть все смежные с извлеченной вершины, обновляя их метки расстояний как $l(w) = l(v) + c(v, w)$, где $l(v)$ — расстояние от начала до извлеченной вершины, а $c(v, w)$ — расстояние от извлеченной вершины до смежной);

5. Если новая метка расстояния $l(w)$ до смежной вершины меньше известной, присвоить ей новое значение метки, а вершину добавить в очередь, если ее там нет;

6. Повторять пункт 3 если очередь не пуста.

В случае поиска пути до конкретной вершины, алгоритм необходимо слегка модифицировать:

- Если извлекаемая в пункте 3 вершина является целью — необходимо запомнить расстояние до нее;
- В пункте 5, если расстояние до конечной вершины известно — добавлять новую в очередь только если ее новая метка меньше предыдущей И меньше расстояния до конечного вершины.

Таким образом, алгоритм Дейкстры позволяет для любого графа гарантированно находить кратчайший путь (при условии отсутствия переходов с отрицательным значением).

Временная сложность алгоритма зависит от реализации. При использовании матрицы смежности это $O(V^2)$, при использовании списка смежности $O(V^2 + E)$, при использовании кучи $O((V + E)\log(V))$.

3. Алгоритм A*

Алгоритм A* является модификацией алгоритма Дейкстры. При вычислении меток расстояний A* берет во внимание расстояния от рассматриваемой вершины до целевой, из-за чего движение в противоположном от искомой вершины направлении становится менее выгодным. Коэффициент расстояния зачастую называется потенциалом.

Для реализации алгоритма существует два распространенных подхода:

- Пересчитать все вершины графа, беря во внимание потенциалы, а затем использовать алгоритм Дейкстры на новом графе;
- При расчете новой метки алгоритмом Дейкстры, также добавить потенциал, рассчитываемый на основе эвристики.

Рассмотрим алгоритм A* с пересчетом меток на ходу:

1. Для всех вершин графа выставить метку расстояния равной бесконечности.

2. Для всех вершин графа выставить значение эвристической функции (потенциал) равным оценке расстояния от текущей вершины до целевой.

3. Поместить в очередь начальную вершину, пометив расстояние до нее как 0.

4. Извлечь из очереди первый элемент (вершину с наименьшим значением суммы метки расстояния и потенциала).

5. Рассмотреть все смежные с извлеченной вершины, пересчитывая их метки расстояний как (расстояние до извлеченной вершины + расстояние от извлеченной вершины до добавляемой).

6. Если новая метка расстояния до смежной вершины меньше известной, присвоить ей новое значение метки и добавить вершину в очередь если ее там нет.

7. Повторять пункт 4, если очередь не пуста.

8. Если извлеченная вершина является целевой, завершить алгоритм, сохранив путь и общее расстояние.

Сложность алгоритма зависит от эвристики. При использовании матрицы смежности имеет временную сложность $O(V^2)$, списка смежности $O(V^2 + E)$, при использовании кучи $O((V + E)\log(V))$. В худшем случае сложность совпадает со сложность алгоритма Дейкстры, однако в среднем случае A* выигрывает.

4. Вычислительный эксперимент

Для сравнения алгоритмов был проведен вычислительный эксперимент, для чего была написана реализация алгоритмов поиска в ширину, Дейкстры, A* на языке python [3]. Алгоритмы тестировались на случайно сгенерированных лабиринтах, которые затем приводятся к формату графа. Сначала в лабиринте генерируются стартовая и конечная точки, затем по периметру ставятся стены. Далее каждая из клеток лабиринта с вероятностью 30 % может стать стеной. Чтобы лабиринт гарантированно имел решение, от начальной точки строится проход в случайном направлении, пока не будет встречена конечная точка. Пример лабиринта, генерируемого программой изображен на рис. 1.

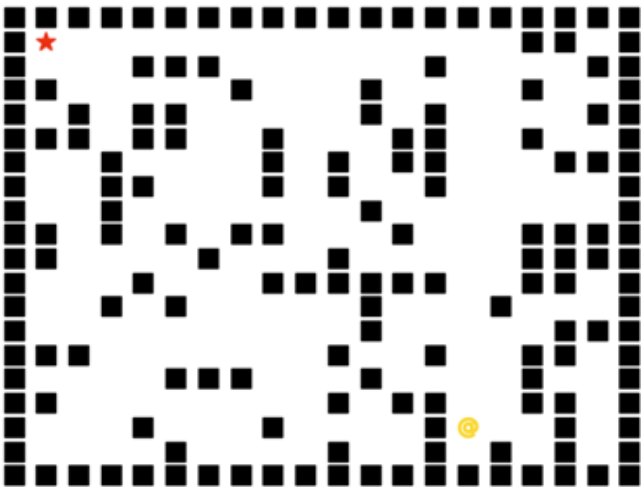


Рис. 1. Сгенерированный программой лабиринт 20×20

Сравнение каждого из алгоритмов проводилось на случайных лабиринтах размерами 20, 50 и 100. Для каждого размера было сгенерировано 100 разных лабиринтов, на каждом из которых все алгоритмы отрабатывали по 100 раз, для уменьшения погрешности, после чего высчитывались средние значения времени вычисления маршрута, длины маршрута и количества посещенных вершин. Результаты сравнения приведены в табл. 1– 3.

Таблица 1

Результаты работы алгоритмов для лабиринтов размерности 20×20

Алгоритм	Среднее время итерации (с.)	Среднее кол-во посещенных вершин	Средняя длина маршрута
A*	0.0002569088700001885	23.68	10.48
Дейкстры	0.0003562788099998215	80.55	10.48
Поиск в ширину	0.00012813708999974554	80.55	10.48

Таблица 2

Результаты работы алгоритмов для лабиринтов размерности 50×50

Алгоритм	Среднее время итерации (с.)	Среднее кол-во посещенных вершин	Средняя длина маршрута
A*	0.0017921239899995273	125.53	31.58
Дейкстры	0.003355799680000201	641.34	31.58
Поиск в ширину	0.0013166593300001294	641.34	31.58

Таблица 3

Результаты работы алгоритмов для лабиринтов размерности 100×100

Алгоритм	Среднее время итерации (с.)	Среднее кол-во посещенных вершин	Средняя длина маршрута
A*	0.007102044859999838	339.31	60.96
Дейкстры	0.01842518159999964	2733.49	60.96
Поиск в ширину	0.008042552770000204	2733.49	60.96

Ориентируясь на результаты исследования, можно сделать вывод, что каждый из рассмотренных алгоритмов справляется с задачей поиска кратчайшего пути. При этом количество посещенных вершин для алгоритмов Дейкстры и поиска в ширину совпадает, а A* в среднем посещает на 80 % меньше вершин. При этом с увеличением размерности задачи, разница увеличивается в пользу A*. По времени работы Алгоритм A* в среднем отработал на 45 % быстрее алгоритма Дейкстры и на 27 % быстрее поиска в ширину на лабиринтах размерности 100×100, однако на 36 % и 100 % медленнее для задач размерности 50×50 и 20×20 соответственно.

Чтобы выяснить тенденцию для задач большей размерности, было проведено более точное сравнение для лабиринтов размерности 1000×1000. Каждый из алгоритмов отработал по 200, итераций для уменьшения погрешности, на 500 разных лабиринтах. Результаты сравнения приведены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты работы алгоритмов для лабиринтов размерности 1000x1000

Алгоритм	Среднее время итерации (с.)	Среднее кол-во посещенных вершин	Средняя длина маршрута
A*	1.3230792510008906	16586.4	576.1
Дейкстры	6.849309896001358	280887.9	576.1
Поиск в ширину	3.0817570329993034	280887.9	576.1

На задачах большей размерности все алгоритмы также находят оптимальный маршрут. Количество посещенных вершин алгоритмом A* на 90 % меньше относительно Дейкстры и Поиска в ширину. При этом A* отрабатывает на 57 % быстрее поиска в ширину и на 80 % быстрее алгоритма Дейкстры.

Заключение

Алгоритмы поиска и построения кратчайшего пути широко применяются в современном мире: от навигационных систем и логистики до игровой индустрии и виртуальной реальности. При выборе алгоритма важно учитывать специфику задачи и особенности данных.

Алгоритм A* превосходит алгоритм Дейкстры в том, что он использует эвристику для более целенаправленного поиска, что позволяет сокращать количество обрабатываемых вершин. Однако при сравнении A* с поиском в ширину важно учитывать, что оба алгоритма имеют схожую временную сложность ($O(b^d)$, где b — фактор ветвления, а d — глубина решения) и пространственную сложность. A* потребляет больше памяти из-за необходимости хранения дополнительной информации, связанной с эвристикой. В среднем A* отрабатывает быстрее на задачах большего масштаба.

Несмотря на это, A* обладает рядом ключевых преимуществ. Во-первых, он гарантирует нахождение оптимального решения (при использовании допустимой эвристики). Во-вторых, A* учитывает уже рассчитанные значения и может адаптироваться под изменяющиеся условия системы, пересчитывая метки вершин. Это делает его особенно полезным в динамических системах. Поиск в ширину не имеет таких возможностей и не гарантирует оптимальности решения.

Литература

1. *Бабичев С. Л.* Лекции по алгоритмам и структурам данных учебное пособие / С. Л. Бабичев. – Москва : МАКС Пресс, 2019. – 342.

2. A* Search Algorithm // Geeks For Geeks URL: https://www.geeksforgeeks.org/a-search-algorithm/?ref=gcse_outind (дата обращения: 15.10.2024)

3. Python 3.13.0 documentation // Python URL: https://docs.python.org/3/index.html (дата обращения: 20.10.2024)

УДК 517.956.3, 517.955, 517.954, 517.958, 539.3(1)

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ УПРУГОЙ ДИНАМИКИ НА РАЗРЫВНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЯХ

Ю. И. Скалько[1], С. Ю. Гриднев[2,1] Н. В. Минаева[3]

[1]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
[2]Воронежский государственный технический университет
[3]Воронежский государственный университет

Аннотация. Численное моделирование распространения упругих волн в неоднородных средах с точечными источниками действующих сил, при наличии внутренних границ, на которых свойства среды или некоторые переменные математической модели могут претерпевать разрывы приводят к необходимости аппроксимации решения кусочно-гладкими базисными функциями. При построении вычислительных алгоритмов на кусочно-гладких базисных функция ключевым моментом является решение обобщённой задачи Римана с условиями на внутренних и внешних границах. В работе приведено решение обобщённой задачи Римана на внутренних и внешних границах для системы уравнений упругой динамики в случае многих пространственных переменных.
Ключевые слова: кусочно-гладкие базисные функции, обобщенные функции, обобщенная задача Римана с условиями на границе, фундаментальное решение оператора задачи, матрица-функция Грина.

Введение

Ряд актуальных прикладных задач приводят к математическим моделям, которые являются начально-краевыми задачами для системы уравнений упругой динамики. Численные алгоритмы решения таких начально-краевых задач должны обладать рядом специальных свойств. Они должны быть применимыми для ситуаций, когда в среде, где распространяется упругая волна, имеются внутренние границы, на которых свойства среды скачкообразно меняются или на этих границах соприкасающиеся части среды проскальзывают друг относительно друга. В таких случаях отдельные компоненты решения также могут претерпевать разрывы на этих внутренних границах. Также эти алгоритмы должны позволять рассчитывать ситуации, когда часть действующих внешних сил являются точечными. Должна быть возможность решения указанных начально краевых задач с различными условиями на внешних границах. Если решаются задачи с постоянно действующими источниками внешних сил, то должна быть возможность моделировать неотражающие граничные условия и численно решать задачи с такого рода условиями.

Авторами разрабатываются численные методы, обладающие указанными выше свойствами [6–12]. Эти методы основаны на построении системы уравнений в обобщённых функциях, эквивалентной исходной начально-краевой задаче. И дальнейшем приближённом решении этой системы уравнений. При этом решение системы уравнений в обобщённых функциях аппроксимируется кусочно-гладким базисными функциями.

Такой подход оказался эффективным при решении ряда прикладных задач. При этом ключевым моментом является решение обобщённой задачи Римана с условиями на внутренней или внешней границе. В случае одной пространственной переменной предложен ряд методов решения задачи Римана [1, 2]. По сути, все эти методы связаны с наличием у гиперболических систем характеристик. В случае многих пространственных переменных методы, основанные на наличии характеристик, уже не работают. И задача Римана, чаще всего, решается в предпо-

ложении, что вблизи границы решение представляет собой плоскую волну, которая движется вдоль нормали к поверхности границы [1–3, 5].

В работе будет приведено решение обобщенной задачи Римана на внешних и внутренних границах для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами, с произвольным количеством пространственных переменных

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t}+\sum_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial x_n}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in R^N \tag{1}$$

В дальнейшем будем полагать, что каждая из матриц $\mathbf{A}_n$ имеет полный набор левых собственных векторов и, следовательно, представима в виде

$$\mathbf{A}_n=\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda}_n\mathbf{\Omega}_n, \tag{2}$$

$\mathbf{\Lambda}_n$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $\mathbf{A}_n$, упорядоченных по не убыванию, $\mathbf{\Omega}_n$ — матрица, строки которой являются левыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}_n$, соответствующие собственным числам $\mathbf{\Lambda}_n$, $\mathbf{R}_n=\mathbf{\Omega}_n^{-1}$ — матрица, столбцы которой являются правыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}_n$.

Система уравнений, описывающей распространение упругих волн для случая двух пространственных переменных приведена в[3] и может быть представлена в виде (1). При этом будут выполнены соотношения (2).

1. Фундаментальное решение

Обобщенным решением для системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t}+\sum_{i}^{N}\mathbf{A}_n\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial x_n}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \tag{3}$$

будем называть обобщенную функцию $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\in \mathtt{D}'$, удовлетворяющую этому уравнению в обобщенном смысле, т. е. для произвольной основной функции $\varphi(t,\mathbf{x})\in \mathtt{D}$ выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial t},\boldsymbol{\varphi}(t,\mathbf{x})\right)+\sum_{n}^{N}\left(\mathbf{A}_n\frac{\partial \mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\partial x_n},\boldsymbol{\varphi}(t,\mathbf{x})\right)=\left(\mathbf{f}(t,\mathbf{x}),\boldsymbol{\varphi}(t,\mathbf{x})\right)$$

Фундаментальным решением оператора задачи (3) или матрицей-функцией Грина называется обобщенная матрица-функция, $\mathbf{G}(t,\mathbf{x})\in \mathtt{D}'$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}+\sum_{n}^{N}\mathbf{A}_n\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_n}=\mathbf{I}\delta(t,\mathbf{x}) \tag{4}$$

$\mathbf{I}$ — единичная диагональная матрица $(M\times M)$.

Выполнив преобразование Фурье уравнений (4) по пространственным переменным, для обобщенной функции $\mathbf{V}(t,\boldsymbol{\xi})=F_{\mathbf{x}}[\mathbf{G}]$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}-i\sum_{n}^{N}\xi_n\mathbf{A}_n\mathbf{V}=\mathbf{I}\delta(t).$$

Решение этого уравнения

$$\mathbf{V}(t,\boldsymbol{\xi})=\theta(t)\exp\left(i\sum_{n=1}^{N}\xi_n\mathbf{A}_n t\right), \tag{5}$$

Лемма. *Для произвольных квадратных матриц* $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_N$ *справедливо представление*

$$e^{i\xi_1\mathbf{A}_1t+\ldots+i\xi_N\mathbf{A}_Nt}=\prod_{n=1}^{N}e^{i\xi_n\mathbf{A}_nt}+\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|>\alpha_1,|\boldsymbol{\alpha}|\geq 2}t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\prod_{n=1}^{N}(i\xi_n)^{\alpha_n}\,e^{i\xi_n\mathbf{A}_nt}\mathbf{Z}_{|\boldsymbol{\alpha}|},$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ *— целочисленный вектор с неотрицательными составляющими* α_n *(мультииндекс),* $|\boldsymbol{\alpha}| = (\alpha_1 + ... + \alpha_N)$, $\mathbf{Z}_{|\boldsymbol{\alpha}|}$ *— однородный полином степени* $|\boldsymbol{\alpha}|$ *матриц* $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_N$.

Ввиду ограниченности статьи, доказательство Леммы здесь не приводится. Следует только отметить, что доказательство опирается на формулу Цассенхауза [4].

Учтём (2), тогда

$$\exp\left(i\xi_n \mathbf{A}_n t\right) = \mathbf{R}_n \exp\left(i\xi_n \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)\boldsymbol{\Omega}_n.$$

Следовательно на основании приведённой выше Леммы

$$\exp\left(i\sum_{n=1}^{N}\xi_n \mathbf{A}_n t\right) = \prod_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \exp\left(i\xi_n \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)\boldsymbol{\Omega}_n + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|>\alpha_1, |\boldsymbol{\alpha}|\geq 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\prod_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \left(i\xi_n\right)^{\alpha_n} \exp\left(i\xi_n \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)\boldsymbol{\Omega}_n \mathbf{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Подставляя это равенство в (5) и выполняя обратное преобразование Фурье, получим матрицу-функцию Грина

$$\mathbf{G}\left(t, \mathbf{x}\right) = \theta\left(t\right)\left(\prod_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \boldsymbol{\delta}\left(\mathbf{I}x_n - \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)\boldsymbol{\Omega}_n + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|>\alpha_1, |\boldsymbol{\alpha}|\geq 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\prod_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \frac{\partial^{\alpha_n}\boldsymbol{\delta}\left(\mathbf{I}x_n - \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)}{\partial x_n^{\alpha_n}}\boldsymbol{\Omega}_n \mathbf{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}\right).$$

Здесь $\boldsymbol{\delta}\left(\mathbf{I}x_n - \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)$ — диагональные матрицы, нумеруемые индексом n, в k-й строке которых стоит обобщенная функция $\delta(x_n - \lambda_{n,k} t)$, $\lambda_{n,k}$ — k-е собственное число матрицы $\mathbf{A}_n$.

Обозначим через $\mathbf{D}_k$ — квадратную матрицу размера $M \times M$, все элементы которой равны 0, кроме k-го элемента главной диагонали, равного 1. Тогда

$$\prod_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \boldsymbol{\delta}\left(\mathbf{I}x_n - \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)\boldsymbol{\Omega}_n = \prod_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}\mathbf{C}_{n,k}\delta\left(x_n - \lambda_{n,k} t\right),$$

где $\mathbf{C}_{n,k} = \mathbf{R}_n \mathbf{D}_k \boldsymbol{\Omega}_n$.

Если определить: $\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_N)$ — мультииндекс, целочисленный вектор с составляющими $k_n = 1 : M$, $\mathbf{C}_{\mathbf{k}} = \mathbf{C}_{1,k_1} \cdots \mathbf{C}_{N,k_N}$ — многоиндексный массив матриц, $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}} = (\lambda_{1,k_1}, \lambda_{2,k_2}, ..., \lambda_{N,k_N})$ — многоиндексный массив векторов, то

$$\prod_{n=1}^{N}\mathbf{R}_n \boldsymbol{\delta}\left(\mathbf{I}x_n - \boldsymbol{\Lambda}_n t\right)\boldsymbol{\Omega}_n = \sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}} t\right),$$

тогда

$$\mathbf{G}\left(t, \mathbf{x}\right) = \theta\left(t\right)\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}\delta\left(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}} t\right) + \theta\left(t\right)\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|>\alpha_1, |\boldsymbol{\alpha}|\geq 2} t^{|\boldsymbol{\alpha}|}\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}\mathbf{Z}_{\boldsymbol{\alpha}} D_{\boldsymbol{\alpha}}\delta\left(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}} t\right), \tag{6}$$

где $D_{\boldsymbol{\alpha}} = \dfrac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}$ — оператор дифференцирования по пространственным переменным.

2. Задача Римана на внутренних границах

Необходимо найти решение начально-краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial \mathbf{u}\left(t, \mathbf{x}\right)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n \frac{\partial \mathbf{u}\left(t, \mathbf{x}\right)}{\partial x_n} = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}\right), \quad t \in \left[0, T\right], \mathbf{x} \in R^N \tag{7}$$

с начальными данными

$$\mathbf{u}\left(t = 0, \mathbf{x}\right) = \mathbf{u}_{init}\left(\mathbf{x}\right), \tag{8}$$

которые всюду непрерывны, кроме гиперплоскости $\Gamma : x_1 = 0$. При этом должны выполняться заданные соотношения (условия сопряжения), связывающие значения переменных по обе стороны гиперплоскости

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{u}\left(t,x_1=-0,x_2,...,x_N\right),\mathbf{u}\left(t,x_1=+0,x_2,...,x_N\right)\right)=\mathbf{0}. \quad (9)$$

Условия сопряжения отражают физические условия, которые необходимо выполнять на границе Г. Коэффициенты системы уравнений (7) слева и справа от гиперплоскости Г задаются, соответственно, матрицами $\mathbf{A}_n^-$ и $\mathbf{A}_n^+$, которые могут различаться между собой.

В качестве примера соотношений, связывающих значения переменных по разные стороны гиперплоскости, в случае системы уравнений упругой динамики можно рассмотреть «условия полного слипания», состоящие в том, что при переходе через гиперплоскость $x_1=0$ непрерывны компоненты вектора смещений и непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты тензора напряжений. Или «условия проскальзывания без трения», состоящие в том, что при переходе через гиперплоскость непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты вектора смещений, непрерывны нормальные к гиперплоскости компоненты тензора напряжений, тангенциальные компоненты сил, действующих по обе стороны гиперплоскости, равны 0.

Определим функции

$$\Pi^-(\mathbf{x}) = \begin{cases}1, \textit{если } x_1\le 0\\ 0, \textit{при остальных } \mathbf{x}\end{cases}; \quad \Pi^+(\mathbf{x}) = \begin{cases}1, \textit{если } x_1\ge 0\\ 0, \textit{при остальных } \mathbf{x}\end{cases}.$$

Пусть $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ решение рассматриваемой обобщённой задачи Римана с условиями на внутренней границе. Разобъем временной интервал $[0,T]$ узлами t_j, $j=0,1,\ldots,J$ на J временных отрезков $[t_{j-1},t_j]$, $j=1,\ldots,J$. Определим для $j=1,\ldots,J$ функции $\mathbf{u}_j(t,\mathbf{x})$, $\mathbf{f}_j(t,\mathbf{x})$, которые для $t_{j-1}\le t\le t_j$, $j=1,\ldots,J$ совпадают, соответственно, с функциями $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ и равны $\mathbf{0}$ при остальных $t,\mathbf{x}$. И функцию $\mathbf{u}_0(t,\mathbf{x})$, совпадающую с $\mathbf{u}_{init}(\mathbf{x})$ для $t\le t_0$ и равную нулю для $t>t_0$.

Также определим функции:

$$\mathbf{u}_j^-(t,\mathbf{x})=\theta(t)\Pi^-(\mathbf{x})\mathbf{u}_j(t,\mathbf{x}); \quad \mathbf{u}_j^+(t,\mathbf{x})=\theta(t)\Pi^+(\mathbf{x})\mathbf{u}_j(t,\mathbf{x});$$
$$\mathbf{u}_0^-(t,\mathbf{x})=\Pi^-(\mathbf{x})\mathbf{u}_{init}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{u}_0^+(t,\mathbf{x})=\Pi^+(\mathbf{x})\mathbf{u}_{init}(\mathbf{x});$$
$$\mathbf{v}_j^-(t,\mathbf{x})=\mathbf{u}_j^-(t,x_1=0,x_2,...,x_N); \quad \mathbf{v}_j^+(t,\mathbf{x})=\mathbf{u}_j^+(t,x_1=0,x_2,...,x_N);$$
$$\mathbf{f}_j^-(t,\mathbf{x})=\Pi^-(\mathbf{x})\mathbf{f}_j(t,\mathbf{x}); \quad \mathbf{f}_j^+(t,\mathbf{x})=\Pi^+(\mathbf{x})\mathbf{f}_j(t,\mathbf{x}).$$

Обобщенные функции $\mathbf{u}_j^-(t,x)$ удовлетворяют последовательности систем дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial\mathbf{u}_j^-}{\partial t}+\sum_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n^-\frac{\partial\mathbf{u}_j^-}{\partial x_n}=\mathbf{f}_j^-+\mathbf{u}_{j-1}^-\delta_{t=t_{j-1}}-\mathbf{u}_j^-\delta_{t=t_j}-\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}_j^-\delta_{x_1=0}; \quad j=1,\ldots,J \quad (10)$$

Аналогично обобщенные функции $\mathbf{u}_j^+(t,x)$ удовлетворяют последовательности систем дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial\mathbf{u}_j^+}{\partial t}+\sum_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n^+\frac{\partial\mathbf{u}_j^+}{\partial x_n}=\mathbf{f}_j^++\mathbf{u}_{j-1}^+\delta_{t=t_{j-1}}-\mathbf{u}_j^+\delta_{t=t_j}+\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}_j^+\delta_{x_1=0} \quad j=1,\ldots,N \quad (11)$$

Решение j-го уравнения системы (10) можно выписать в виде свертки фундаментального решения оператора задачи (6) с правой частью этого уравнения

$$\mathbf{u}_j^-\left(t,\mathbf{x}\right)=\mathbf{G}^-*\left(\mathbf{f}_j^-+\mathbf{u}_{j-1}^-\delta_{t=t_{j-1}}-\mathbf{u}_j^-\delta_{t=t_j}-\mathbf{A}_1^-\mathbf{v}_j^-\delta_{x_1=0}\right).$$

Выполнив указанные свёртки, получаем равенства

$$\sum_{k_1:\lambda_{k_1}^-\ge 0}\mathbf{C}_{1,k_1}^-\mathbf{v}_j^-\left(t,\mathbf{x}\right)=\sum_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^-\ge 0}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}^-\mathbf{u}_{j-1}^-\left(t_{j-1},\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^-\left(t-t_{j-1}\right)\right)+\mathbf{b}_j^-.$$

После умножения этого равенства на $\mathbf{l}_{k_1}^-$ — левые собственные вектора матрицы $\mathbf{A}_1^-$, которые соответствуют неотрицательным собственным числам получим систему равенств

$$\mathbf{l}_{k_1}^{-}\mathbf{v}_j^{-}(t,\mathbf{x})=\mathbf{l}_{k_1}^{-}\sum_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^{-}\geq 0}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}^{-}\mathbf{u}_{j-1}^{-}\left(t_{j-1},\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^{-}\left(t-t_{j-1}\right)\right)+\mathbf{l}_{k_1}^{-}\mathbf{b}_j^{-},\qquad \lambda_{k_1}^{-}\geq 0. \tag{12}$$

Аналогично сказанному выше, решение j-го уравнения системы (11) можно выписать в виде свертки фундаментального решения оператора задачи (11) с правой частью этого уравнения

$$\mathbf{u}_j^{+}(t,\mathbf{x})=\mathbf{G}^{+}*\left(\mathbf{f}_j^{+}+\mathbf{u}_{j-1}^{+}\delta_{t=t_{j-1}}-\mathbf{u}_j^{+}\delta_{t=t_j}+\mathbf{A}_1^{-}\mathbf{v}_j^{+}\delta_{x_1=0}\right).$$

Вычисляя указанные свёртки, получаем

$$\sum_{k_1:\lambda_{k_1}^{+}\leq 0}\mathbf{C}_{1,k_1}^{+}\mathbf{v}_j^{+}(t,\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^{+}\leq 0}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}^{+}\mathbf{u}_{j-1}^{+}\left(t_{j-1},\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^{+}\left(t-t_{j-1}\right)\right)+\mathbf{b}_j^{+}.$$

После умножения этих равенства на $\mathbf{l}_{k_1}^{+}$ — левые собственные вектора-строки матрицы $\mathbf{A}_1^{+}$ получим

$$\mathbf{l}_{k_1}^{+}\mathbf{v}_j^{+}(t,\mathbf{x})=\mathbf{l}_{k_1}^{+}\sum_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^{+}\leq 0}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}^{+}\mathbf{u}_{j-1}^{+}\left(t_{j-1},\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^{+}\left(t-t_{j-1}\right)\right)+\mathbf{l}_{k_1}^{+}\mathbf{b}_j^{+},\qquad \lambda_{k_1}^{+}\leq 0. \tag{13}$$

Прибавим к равенства (12) и (13) условия (9), получим СЛАУ для $\mathbf{v}_j^{-}(t,\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}_j^{+}(t,\mathbf{x})$

$$\begin{cases}\mathbf{l}_{k_1}^{-}\mathbf{v}_j^{-}(t,\mathbf{x})=\mathbf{l}_{k_1}^{-}\sum\limits_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^{-}\geq 0}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}^{-}\mathbf{u}_{j-1}^{-}\left(t_{j-1},\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^{-}\left(t-t_{j-1}\right)\right)+\mathbf{l}_{k_1}^{-}\mathbf{b}_j^{-},\lambda_{k_1}^{-}\geq 0\\ \mathbf{l}_{k_1}^{+}\mathbf{v}_j^{+}(t,\mathbf{x})=\mathbf{l}_{k_1}^{+}\sum\limits_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^{+}\leq 0}\mathbf{C}_{\mathbf{k}}^{+}\mathbf{u}_{j-1}^{+}\left(t_{j-1},\mathbf{x}-\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^{+}\left(t-t_{j-1}\right)\right)+\mathbf{l}_{k_1}^{+}\mathbf{b}_j^{+},\lambda_{k_1}^{+}\leq 0.\\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}_j^{-}(t,\mathbf{x}),\mathbf{v}_j^{+}(t,\mathbf{x})\right)=\mathbf{0}\end{cases} \tag{14}$$

Для однозначного решения рассматриваемой обобщенной задачи Римана на внутренней границе необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (14) имела единственное решение. В случае системы уравнений упругой динамики, если на внутренней границе поставлены «условия полного слипания» или «условия проскальзывания без трения», матрица СЛАУ (14) не вырождена и эта СЛАУ имеет единственное решение.

Продифференцируем уравнения (14) по времени t и перейдём к пределу по $t\to t_{j-1}$

$$\begin{cases}\mathbf{l}_{k_1}^{-}\dfrac{\partial\mathbf{v}^{-}}{\partial t}(t,\mathbf{x})=\mathbf{l}_{k_1}^{-}\left(-\sum\limits_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n^{-}\dfrac{\partial\mathbf{u}^{-}}{\partial x_n}(t,\mathbf{x})+\mathbf{f}^{-}(t,\mathbf{x})\right),\lambda_{k_1}^{-}\geq 0\\ \mathbf{l}_{k_1}^{+}\dfrac{\partial\mathbf{v}^{+}}{\partial t}(t,\mathbf{x})=\mathbf{l}_{k_1}^{+}\left(-\sum\limits_{n=1}^{N}\mathbf{A}_n^{+}\dfrac{\partial\mathbf{u}^{+}}{\partial x_n}(t,\mathbf{x})+\mathbf{f}^{+}(t,\mathbf{x})\right),\lambda_{k_1}^{+}\leq 0\\ \mathbf{L}\left(\dfrac{\partial\mathbf{v}^{-}}{\partial t}(t,\mathbf{x}),\dfrac{\partial\mathbf{v}^{+}}{\partial t}(t,\mathbf{x})\right)=\mathbf{0}\end{cases} \tag{15}$$

Именно эти уравнения и будут использованы в дальнейшем при построении вычислительного алгоритма.

3. Задача Римана на внешних границах

Необходимо найти решение начально-краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами (7) в области $x_1\leq 0$ с непрерывными начальными данными, заданными для $x_1\leq 0$. При этом на границе $\Gamma: x_1=0$ должны выполняться заданные соотношения (граничные условия):

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\in\Gamma\right)\right)=\mathbf{0}. \tag{16}$$

В качестве примера граничных условий для системы уравнений упругой динамики могут быть отражающие граничные условия, когда на границе все компоненты вектора смещений равны нулю. Или свободные граничные условия, состоящие в том, что и нормальные и тангенциальные к гиперплоскости компоненты внешних сил на гиперплоскости равны нулю. Также могут быть рассмотрены граничные условия, когда на границе заданы плотность нормальной и тангенциальной компоненты действующих сил.

Аналогично сказанному выше справедливы равенства (12). Добавим к ним равенства (16) получим СЛАУ, которым должны удовлетворять значения решения обобщённой задачи Римана на правой внешней границе для неизвестных $\mathbf{v}_j^-(t,\mathbf{x})$

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{v}_j^-(t,\mathbf{x}) = \mathbf{l}_{k_1}^- \sum\limits_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^- \geq 0} \mathbf{C}_{\mathbf{k}}^- \mathbf{u}_{j-1}^-\left(t_{j-1}, \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^-\left(t - t_{j-1}\right)\right) + \mathbf{l}_{k_1}^- \mathbf{b}_j^-, \lambda_{k_1}^- \geq 0 \\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}_j^-(t,\mathbf{x})\right) = \mathbf{0} \end{cases}. \tag{17}$$

Для однозначного решения обобщенной задачи Римана с условиями на правой внешней границе необходимо и достаточно, чтобы эта система уравнений имела единственное решение.

Продифференцируем каждое из уравнений (17) по времени t и перейдём к пределу по $t \to t_{j-1}$.

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{k_1}^- \dfrac{\partial \mathbf{v}^-}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{l}_{k_1}^- \left(-\sum\limits_{n=1}^{N} \mathbf{A}_n^- \dfrac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_n}(t,\mathbf{x}) + \mathbf{f}^-(t,\mathbf{x}) \right), \quad \lambda_{k_1}^- \geq 0 \\ \mathbf{L}\left(\dfrac{\partial \mathbf{v}^-}{\partial t}(t,\mathbf{x}) \right) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{18}$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что необходимым и достаточным условием однозначного решения обобщённого решения задачи Римана на правой внешней границе является существование единственного решения СЛАУ

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{v}_j^+(t,\mathbf{x}) = \mathbf{l}_{k_1}^+ \sum\limits_{\mathbf{k}:\lambda_{k_1}^+ \leq 0} \mathbf{C}_{\mathbf{k}}^+ \mathbf{u}_{j-1}^+\left(t_{j-1}, \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}}^+\left(t - t_{j-1}\right)\right) + \mathbf{l}_{k_1}^+ \mathbf{b}_j^+, \lambda_{k_1}^+ \leq 0 \\ \mathbf{L}\left(\mathbf{v}_j^+(t,\mathbf{x})\right) = \mathbf{0} \end{cases}. \tag{19}$$

Продифференцируем эти уравнения по времени t и перейдём к пределу по $t \to t_{j-1}$

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{k_1}^+ \dfrac{\partial \mathbf{v}^+}{\partial t}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{l}_{k_1}^+ \left(-\sum\limits_{n=1}^{N} \mathbf{A}_n^+ \dfrac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_n}(t,\mathbf{x}) + \mathbf{f}^+(t,\mathbf{x}) \right), \lambda_{k_1}^+ \leq 0 \\ \mathbf{L}\left(\dfrac{\partial \mathbf{v}^+}{\partial t}(t,\mathbf{x}) \right) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{20}$$

Именно эти соотношения и будут использованы в дальнейшем при построении вычислительного алгоритма.

В случае системы уравнений упругой динамики, если на внешней границе поставлены указанные вышеграничные условия, матрицы СЛАУ (17) и (19) не вырождены и эти СЛАУ имеют единственное решение.

Заключение

В представленной работе приведено решение обобщённой задачи Римана с условиями на внутренних границах и на внешних границах для гиперболических систем уравнений в частных производных со многими пространственными переменными в том числе и для уравнений

упругой динамики. Решение получено с применением теории обобщённых функций и построении фундаментального решения оператора задачи.

Решение обобщённой задачи Римана с условиями на внутренних и внешних границах является ключевым моментом при построении алгоритмов численного решения начально-краевых задач с использованием кусочно-гладких базисных функций. Построенные решения обобщённой задачи Римана представлены в виде, позволяющем их конструктивную имплементацию в алгоритмы численного решения начально-краевых задач.

Литература

1. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М. : Физматлит, 2001.

2. *LeVeque R. L.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

3. *Kaser M., Dumbser M.* An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes – I. The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms // Geophys. J. Int. – 2006. – V. 166. – P. 855–877.

4. *Casas F., Murua A., Nadinic M.* Comput. Phys. Commun. – 2012. – 183, 2386 [arXiv:1204.0389 [math-ph]] [Search INSPIRE].

5. *Скалько Ю. И.* Корректные условия на границе, разделяющей подобласти // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. – Т. 6, № 3. – С. 347–356.

6. *Gridnev S. Yu., Skalko Yu. I., Ravodin I. V., Yanaeva V. V.* Simulation of vibrations of a continuously elastic supported rod with varying boundary conditions under the action of a movable // MATEC Web of Conferences 196, 01053 (2018) XXVII R-S-P Seminar 2018, Theoretical Foundation of Civil Engineering.

7. *Skalko Yu. I., Gridnev S. Yu., Yagfarova A.* Modeling the Focusing of the Energy of Elastic Waves in Block-Fractured Medium During the Long-Term Vibration Action // Proc. Int. Scient. Conf. Energy Management of Municipal Facilities and Sustain-able Energy Technologies EMMFT 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing. eds. Murgul V. and Pasetti M. (Springer Nature Switzerland AG) – 2019. – Vol. 983. – P. 534–546.

8. *Gridnev S. Yu., Skalko Yu. I., Minaeva N. V., Yanaeva V. V.* Comparative analysis of models of limiting supports in the study of structurally nonlinear oscillations of elastically supported bar from mobile load // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1203. – 2019. – 012030 IOP Publishing. – doi:10.1088/1742-6596/1203/1/012030

9. *Skalko Y. I., Gridnev S. Yu., Minaeva N. V.* Computational algorithms based on the fundamental solution of task operator // Journal of Physics: Conf. Series 1479. – 2020. – 012136. IOP Publishing Ltd. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012136

10. *Skalko Y. I., Gridnev S. Yu., Minaeva N. V.* Application of fundamental solution to a problem operator for modeling vibrations of elastically supported load-bearing structures // Journal of Physics: Conf. Series 1479. – 2020. – 012111 . IOP Publishing Ltd. – DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012111

11. *Skalko Y. I., Gridnev S. Yu.* Review and comparative analysis of computational algorithms for modeling the dynamics of elastically supported structural systems // IOP CONFERENCE SERIES: MATERIALS SCIENCE AND ENGINEERING. – 2020. – 012002 . Institute of Physics and IOP Publishing Limited. – DOI: 10.1088/1757-899X/1083/1/012002

12. *Skalko Y. I., Gridnev S. Yu., Minaeva N. V.* Computational algorithms for modeling systems with piecewise constant parameters // Journal of Physics: Conf. Series. – 2021. – 012023. – IOP Publishing Ltd. – DOI: 10.1088/1742-6596/1902/1/012023

УДК 519.8

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РОСТА БИОМАССЫ ВОДОРОСЛЕЙ

Н. А. Слузова

Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова
Северный государственный медицинский университет

Аннотация. В настоящей статье проведен анализ устойчивости двумерной нелинейной математической модели, описывающей процессы роста биомассы водорослей. Схема исследования, отраженная в работе, включает в себя следующие этапы: описание математической модели и ее параметров, представление алгоритма линеаризации, сам процесс линеаризации рассматриваемой модели и исследование устойчивости в окрестности положения равновесия, интерпретация полученных результатов. Представлены графики, отражающие влияние вариации параметров модели на ее устойчивость. Показано, что полученные результаты могут быть использованы как в академической, так и практической сфере.
Ключевые слова: математическая модель, устойчивость модели, линеаризация, популяционная модель, численный эксперимент, вариация параметров модели.

Введение

Исследование устойчивости решений системы уравнений является ключевым этапом в понимании ее поведения и предсказании будущих состояний, которые она описывает. Оно позволяет оценить, как реагирует система на незначительные возмущения начальных условий или параметров модели. В настоящей работе исследование устойчивости решений модели, описывающей процесс роста биомассы популяции, позволяет понять фундаментальные свойства популяции, которые определяют ее поведение. Изучение этих свойств позволяет глубже понять механизмы, описывающие динамику изучаемой популяции.

Представленная в настоящей статье математическая модель может быть отнесена к классу моделей типа «хищник-жертва» Лотки — Вольтерра [1, 2]. Модель описывает процесс роста популяции беломорской ламинарии при определенных ограничениях и предположении о постоянстве отдельных показателей экосистемы. В модели учитываются также трофические связи, а именно поглощение водорослями биогенных элементов, являющихся питательной средой для них. Трофическая функция задана зависимостью Моно. Скорость изменения биомассы водорослей рассматривалась без учета возрастных групп, с целью облегчения методологического подхода к исследованию. Показатели экосистемы, которые были учтены в модели, отражают гидродинамические, гидрохимические и гидрологические режимы рассматриваемой экосистемы, а также учитывают уровень освещенности [3].

1. Математическая модель роста биомассы водорослей

Рассмотрим двумерную математическую модель, описывающую изменение биомассы водорослей на заданном отрезке времени $[0,T]$, где размерность модели определяется числом переменных состояния.

Динамический процесс описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mu \dfrac{s(t)}{K_S + s(t)} x(t)(1 - \dfrac{x(t)}{x_m})u \\ \dfrac{ds}{dt} = D(s_n - s(t)) - \dfrac{\mu}{\eta} x(t) \dfrac{s(t)}{K_S + s(t)} \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$x(0) = x_0, x(T) = x_{\text{m}}, \quad s(t) = s_n, s(T) = s_m \quad (2)$$

В системе (1) $x(t)$ и $s(t)$ — биомасса водорослей и концентрация биогенных элементов соответственно. Параметры μ, K_S, x_m, u, s_n, η, D — являются параметрами модели и характеризуют состояние экосистемы, причем для всех параметров выполняется условие не отрицательности всех значений.

Параметр μ — удельная скорость роста, которая может быть задана как функция от времени [4], но в данном случае рассматривается как постоянный коэффициент. Параметр K_S — константа полунасыщения, s_n — первоначальная концентрация биогенных веществ в среде, до начала в ней биологических процессов, связанных с жизнедеятельностью водорослей, η — экономический коэффициент, отражающий прирост биомассы водорослей на единицу потребленных биогенных веществ. Параметр x_m — максимальная биомасса водорослей, u — параметр, характеризующий уровень освещения, D — параметр, описывающий гидрологический режим рассматриваемой экосистемы, являющийся аналогом коэффициента протока в хемостате. Множитель $\dfrac{s(t)}{K_S + s(t)}$ — является трофической функцией, заданной зависимостью Моно [5]. Слагаемое $D(s_n - s(t))$ характеризует скорость изменения концентрации биогенных веществ в среде, вызванных развитием водорослей в момент времени t. Слагаемое $\dfrac{\mu}{\eta} x(t) \dfrac{s(t)}{K_S + s(t)}$ характеризует ту часть биогенных веществ, которая расходуется на рост и развитие водорослей.

2. Исследование устойчивости решений модели роста биомассы водорослей

Рассматриваемая система дифференциальных уравнений (1) является автономной, так как в нее в явном виде не входит переменная времени t. Тогда, положение равновесия исследуемой системы (1) будем искать как решение системы следующих уравнений:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{s}{K_S + s} x(1 - \dfrac{x}{x_m})u = 0 \\ D(s_n - s) - \dfrac{\mu}{\eta} x \dfrac{s}{K_S + s} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Решая систему (3) получим две стационарные точки:

1) $\left(x_1^*; s_1^*\right) = \left(0; s_n\right)$ (4)

2) $\left(x_2^*; s_2^*\right) = \left(x_m; 0,5 \cdot \left(\sqrt{\left(\dfrac{x_m \mu}{\eta D} + K_S - s_n \right)^2 + 4 s_n K_S} - \dfrac{x_m \mu}{\eta D} - K_S + s_n \right) \right)$ (5)

Исследование устойчивости решений системы (3) проводилось как аналитически, так и при реализации вычислительного эксперимента. В основу аналитического метода был положен анализ собственных значений матрицы системы, что потребовало линеаризации системы (3) в окрестности точки равновесия. Для этого был реализован следующий алгоритм:

Шаг 1. Пусть x^* — точка равновесия системы $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Пусть отклонение от точки равновесия задается как $\Delta x = x - x^*$, тогда система $\frac{dx}{dt} = f(x)$ может быть представлена в виде $\frac{dx}{dt} = f(x^* + \Delta x)$.

Шаг 2. Используем разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x^* $f(x^* + \Delta x) \approx f(x^*) + J(x^*) \cdot \Delta x + O(\Delta x^2)$, где $J(x^*)$ — матрица Якоби функции $f(x)$ в точке x^*, вычисленная как матрица частных производных, $O(\Delta x^2)$ — члены высшего порядка малости, которые отбрасываются при линеаризации.

Шаг 3. Так как $f(x^*) = 0$, то линеаризованная система примет вид: $f(x^* + \Delta x) \approx J(x^*) \cdot \Delta x$.

Устойчивость линеаризованной системы определяется собственными значениями матрицы $J(x^*)$. Причем, асимптотическая устойчивость гарантируется, если все собственные значения имеют отрицательную вещественную часть; в противном случае (при наличии хотя бы одного собственного значения с положительной вещественной частью) решение неустойчиво. Если вещественная часть собственных значений равна нулю, то требуется проводить дополнительный анализ.

Применяя данный алгоритм, для исследования устойчивости системы (3) в положении равновесия, получим, что окрестность точки (4) задается следующим правилом $\begin{cases} x_1 = x_1^* + \Delta x_1 \\ s_1 = s_1^* + \Delta s_1 \end{cases}$, где $\Delta x_1, \Delta s_1$ малые приращения величин x_1, s_1, а линеаризованная система (3) в первом приближении примет вид:

$$\begin{cases} f(x_1) \approx \mu s_n (K_S + s_n) x_1 \\ g(s_1) \approx -D s_1 - \frac{\mu s_n}{\eta} (K_S + s_n) x_1 \end{cases}.$$

Найдем условия накладываемые на параметры μ, s_n, K_S, η, D при которых система (1), а значит и матрица $A_1 = \begin{pmatrix} \mu s_n (K_S + s_n) & 0 \\ -\frac{\mu s_n}{\eta} (K_S + s_n) & -D \end{pmatrix}$ была бы устойчивой. Для этого необходимо, чтобы в характеристическом уравнении

$$\chi_A(p) = \det(pE - A_1) = \begin{vmatrix} p - \mu s_n (K_S + s_n) & 0 \\ \frac{\mu s_n}{\eta} (K_S + s_n) & p + D \end{vmatrix} = (p + D)\left(p - \mu s_n (K_S + s_n)\right) = 0$$

элементы p были отрицательными. Проверим, действительно ли это так, решив соответствующее квадратное уравнение и определив знак его корней, на основе оценки диапазонов изменений каждого параметра модели [6–8]. Получим

$$p_1 = \frac{-\left(D - \mu s_n (K_S + s_n)\right) - \sqrt{\left(D - \mu s_n (K_S + s_n)\right)^2 + 4D\mu s_n (K_S + s_n)}}{2} < 0$$

$$p_2 = \frac{-\left(D - \mu s_n (K_S + s_n)\right) + \sqrt{\left(D - \mu s_n (K_S + s_n)\right)^2 + 4D\mu s_n (K_S + s_n)}}{2} > 0$$

Итак, собственные числа матрицы A_1 являются действительными числами, но разных знаков. Это говорит о том, положение равновесия (4) системы (3) является неустойчивым. Оно могло бы быть устойчивым, если бы $p_2 < 0$, для этого необходимо, чтобы

$-\left(D-\mu s_n(K_S+s_n)\right)+\sqrt{\left(D-\mu s_n(K_S+s_n)\right)^2+4D\mu s_n(K_S+s_n)}<0$ или $4D\mu s_n(K_S+s_n)<0,$ чего не может быть по условию задачи (все параметры положительны).

Аналогичные шаги были выполнены для линеаризации функций $f(x)$ и $g(s)$ системы (3) в окрестности второго положения равновесия (5). В результате линеаризованная система (3) в первом приближении имеет вид:

$$\begin{cases}\dot{x}_2=-\mu\xi(K_S+\xi)x_2\\ \dot{s}_2=-\dfrac{\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)x_2-\left(D+\dfrac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\right)s_2\end{cases},$$

где $\xi=0,5\cdot\left(\sqrt{\left(\dfrac{x_m\mu}{\eta D}+K_S-s_n\right)^2+4s_nK_S}-\dfrac{x_m\mu}{\eta D}-K_S+s_n\right)$ для облегчения записи и анализа.

Найдем условия, накладываемые на $\mu,\ \xi,\ K_S,\ \eta,\ D,\ x_m$ при которых данная система, а значит и матрица $A_2=\begin{pmatrix}-\mu\xi(K_S+\xi) & 0\\ -\dfrac{\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi) & -D-\dfrac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\end{pmatrix}$ была бы устойчивой. Для этого необходимо, чтобы в характеристическом уравнении

$$\chi_A(p)=\det\left(pE-A_2\right)=\begin{vmatrix}p+\mu\xi(K_S+\xi) & 0\\ \dfrac{\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi) & p+D+\dfrac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\end{vmatrix}=$$

$$=\left(p+\mu\xi(K_S+\xi)\right)\left(p+D+\frac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\right)=0$$

элементы p были отрицательными. Для этого рассмотрим решения квадратного уравнения

$$p^2+\left(2D+\mu\xi(K_S+\xi)(1+\frac{x_m}{\eta})\right)p+\left(D+\mu\xi(K_S+\xi)\right)\left(D+\frac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\right)=0,$$

которые имеют вид

$$p_1=\frac{-\left(\left(D+\mu\xi(K_S+\xi)\right)\left(D+\dfrac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\right)\right)-\sqrt{discrim}}{2}<0$$

$$p_2=\frac{-\left(\left(D+\mu\xi(K_S+\xi)\right)\left(D+\dfrac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\right)\right)+\sqrt{discrim}}{2}<0$$

где $discrim=\left(2D+\mu\xi(K_S+\xi)(1+\dfrac{x_m}{\eta})\right)^2-4\left(D+\mu\xi(K_S+\xi)\right)\left(D+\dfrac{x_m\mu\xi}{\eta}(K_S+\xi)\right).$

Оценка значений *discrim* и значений p_1 и p_2 проводилась на основе оценки диапазонов изменений каждого параметра модели. Так как собственные значения матрицы A_2 $p_{1,2}$ — отрицательные действительные числа, то положение равновесия (5) является асимптотически устойчивым.

Для проведения численного эксперимента в среде разработки Delphi был реализован проект, для которого были взяты следующие значения параметров модели (табл. 1). Суть его заключалась в том, чтобы проверить устойчиво ли положение равновесия (5) при помощи варьирования начальных состояний фазовых траекторий вблизи положения равновесия.

Таблица 1

Входные значения параметров модели

Параметры модели	Числовые значения параметров модели
μ	0,055
K_S	0,018
x_m	3000
u	3
s_n	0,15
η	1300
D	0,08

Результаты численного эксперимента отражены на рис. 1 и 2.

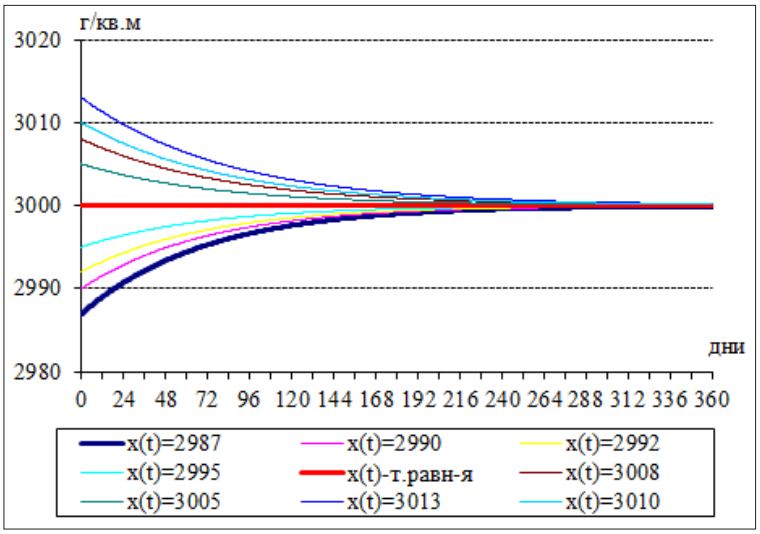


Рис. 1. Интегральные кривые системы (3) для различных значений x_2^* *в плоскости* (t,x)

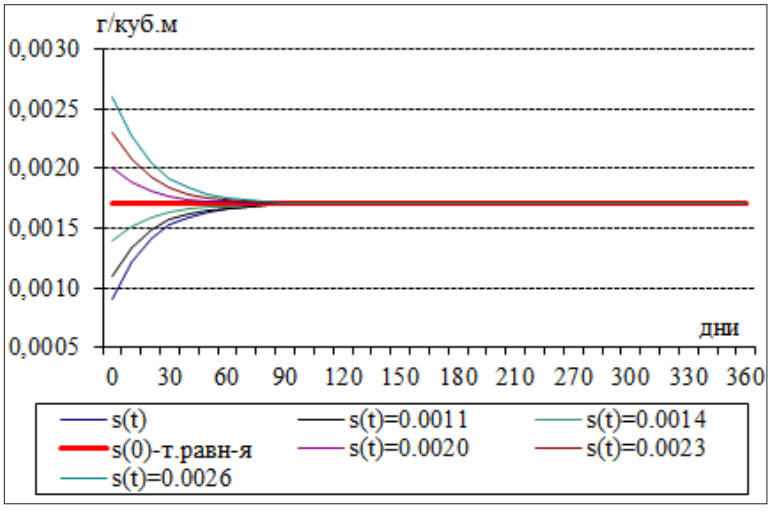


Рис. 2. Интегральные кривые системы (3) для различных значений s_2^* *в плоскости* (t,x)

Анализ полученных результатов, представленных на графиках (рис. 1, рис. 2) подтвердил полученные аналитические выводы. Действительно, решение системы (3) сходится к полученной точке положения равновесия (5) положения равновесия. Таким образом, для двумерной модели (1) с заданными условиями найдена единственная точка устойчивого равновесия.

Заключение

Таким образом, в работе показано, что сделать выводы о том, что математическая модель (1) способна описывать реальные процессы динамики роста биомассы водорослей, которая является одним из промысловых видов в районах Арктических морей. Так как бурые водоросли являются перспективным сырьем для использования в различных отраслях промышленности, то это обуславливает увеличение объемов их добычи и необходимость более точной оценки запаса.

Численный пример показывает, что модель устойчива и характеризуется уровнями чувствительности к изменению параметров, соответствующими значениям для реальных процессов. В дальнейшем планируется адаптировать данную двумерную модель для оценки уровня компетентности студентов Северного (Арктического) федерального университета и Северного государственного медицинского университета учитывая влияние междисциплинарных связей. Практическая значимость отраженной в статье работы заключается в том, что исследование устойчивости решений неуправляемых математических моделей — это необходимый инструмент для понимания поведения систем, которые эти модели описывают. Оно позволяет делать более обоснованные прогнозы, разрабатывать эффективные стратегии управления и оценивать надежность систем в различных областях.

Литература

1. Математическая теория борьбы за существование : научное издание / В. Вольтерра ; пер. с фр. О. Н. Бондаренко ; ред. Ю. М. Свирижев. – Москва : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 286 с.

2. *Ризниченко Г. Ю.* Математические модели биологических продукционных процессов: учебное пособие / Г. Ю. Ризниченко, А. Б. Рубин. – Москва : МГУ, 1993 – 302 с.

3. *Шилова Н. А.* Математическое моделирование и управление процессом роста и развития морских гидробионтов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Шилова Наталья Александровна ; ТвГУ. – Тверь, 2010. – 18 с.

4. *Steffen E.* Effects of seasonal perturbations on a model plankton community / E. Steffen, H. Malchow, A. B. Medvinsky // Env. Modeling and Assessment. – 1997. – № 2. – P. 43–48.

5. *Ручай Н. С.* Технология микробного синтеза: электронный курс лекций для студентов специальности 1-48 02 01 «Биотехнология» / Н. С. Ручай, И. А. Гребенчикова. – Минск : БГТУ, 2014. – 167 с. – URL: https://propionix.ru/tehnologiya-mikrobiologicheskogo-sinteza (дата обращения: 23.09.2024).

6. *Шилова Н. А.* Расчет показателей естественной смертности для популяции Laminaria saccharina (l) Lamour / Н. А. Шилова, А. В. Семушин // Вестник Поморского университета. Серия: Естественные науки. – 2011. – № 4. – С. 96–101.

7. *Шилова Н. А.* Методика определения коэффициента полунасыщения для дискретной модели роста популяции морских макроводорослей / Сборник тезисов научно-практической конференции по водным ресурсам, включая биологические ресурсы Соловецкого архипелага. – 2014. – С. 86–89.

8. *Слузова Н. А.* Методика расчета экономического коэффициента в популяционной модели роста биомассы водорослей / Доклады Международной конференции «Математическая биология и биоинформатика»; под ред. В. Д. Лахно. Том 10. – Пущино: ИМПБ РАН, 2024. – Статья № e24. doi: 10.17537/icmbb24.14

УДК 519.82

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ПРОДАЖИ ЖИЛОГО ПОМЕЩЕНИЯ

Л. А. Смирнова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрено понятие рекомендательной системы, описан процесс машинного обучения, а также рассмотрена задача создания рекомендательной системы для продажи жилого помещения по заданным характеристикам, основанной на использовании методов интеллектуального анализа данных, на языке программирования Python. Для этого была проведена предобработка данных, осуществлен выбор алгоритма, произведено непосредственно само обучение и оценка качества моделей.
Ключевые слова: машинное обучение, интеллектуальный анализ данных, матрица корреляции, алгоритмы машинного обучения, линейная регрессия, Data Mining, Python, целевая переменная, недвижимость, рекомендательная система.

Введение

В современном мире объем данных, доступных для анализа, постоянно растет, и это открывает новые возможности для применения методов интеллектуального анализа данных в различных областях. Одной из таких областей является недвижимость, где рекомендательные системы на основе данных становятся все более востребованными.

Жилая недвижимость является одним из ключевых сегментов рынка, где потенциальные покупатели и продавцы сталкиваются с огромным объемом информации о предложениях и потребностях.

Данная работа нацелена на создание инновационной рекомендательной системы, способной эффективно анализировать данные о жилой недвижимости и предлагать персонализированные рекомендации, что в итоге может привести к улучшению пользовательского опыта и увеличению эффективности продаж на рынке жилья.

1. Понятие рекомендательной системы

Рекомендательная система — это информационная технология, которая предлагает пользователю персонализированные рекомендации, основываясь на его предпочтениях и поведении [1]. Она используется для предсказания, какие товары, услуги или контент могут заинтересовать конкретного пользователя. Рекомендательные системы широко применяются в различных областях, таких как электронная коммерция, потоковое видео, социальные сети и музыкальные платформы.

Существует четыре основных разновидности рекомендательных систем:

– системы, основанные на содержании (Content-Based Systems): Данный тип систем анализирует характеристики товаров или контента, которые пользователь ранее оценил или потреблял. На основе этого профиля интересов система рекомендует похожие товары или контент.

– коллаборативная фильтрация (CollaborativeFiltering): Данный метод анализирует данные о взаимодействии пользователей с товарами или контентом. Он ищет образцы потребления и оценок, чтобы определить схожие вкусы между пользователями и рекомендовать товары, которые понравились другим пользователям с похожими предпочтениями.

– гибридные системы (Hybrid Recommender Systems): Подобные системы комбинируют подходы, используя как методы коллаборативной фильтрации, так и основанные на содержа-

нии. Гибридные системы стремятся уменьшить недостатки каждого метода и улучшить точность рекомендаций.

– рекомендации на основе знаний (Knowledge-Based Recommendations): Этот тип систем использует информацию о предпочтениях и потребностях пользователя, а также о свойствах товаров, чтобы сделать рекомендации. Они обычно используют базы знаний или экспертные системы для анализа и предоставления рекомендаций.

Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки, и выбор конкретного подхода зависит от контекста применения и доступных данных. Развитие рекомендательных систем играет важную роль в улучшении пользовательского опыта и увеличении эффективности бизнеса в различных отраслях.

2. Процесс машинного обучения

Методы интеллектуального анализа данных, на основе которого строится рекомендательная система, основаны на статистическом анализе, машинном обучении (МО) и математике [2]. ***МО*** представляет собой использование математических моделей данных, которые помогают компьютеру обучаться без непосредственных инструкций. При использовании МО выявляются закономерности в данных, на основе которых создается модель данных для прогнозирования [3]. С накоплением опыта и обработки большого объема данных прогнозы становятся более точными. Благодаря своей адаптивности, МО отлично подходит для сценариев, в которых данные постоянно изменяются, свойства запросов или задач нестабильны или написать код для решения фактически невозможно.

Методология управления проектом по анализу данных SEMMA предлагает следующую последовательность шагов при решении задач, связанных с МО:

1) Sample: создание выборки. Она должна быть достаточно большая, чтобы из неё можно было извлечь достаточно полезной информации, но и достаточно мала, чтобы можно было эффективно ей пользоваться.

2) Explore: исследование отношений в данных. На этом этапе находятся связи между данными (в том числе с помощью корреляционного и регрессионного анализа), а также различные аномалии.

3) Modify: создание новых и преобразование старых переменных.

4) Model: обучение модели МО.

5) Assess: оценка результатов и качества модели.

3. Создание рекомендательной системы

Постановка задачи:

По данным о характеристиках квартир России и их ценах необходимо построить рекомендательную систему определения оптимальной стоимости случайной квартиры с известными характеристиками для продажи с помощью языка программирования Python.

Решение:

Рекомендательная система для продавцов по определению оптимальной стоимости недвижимости представляет собой клиент-серверное приложение, построенное на основе архитектурного стиля REST, для взаимодействия компонентов распределенного приложения в сети.

Архитектура системы состоит из базы данных, серверной и клиентской частей (рис. 1).

Данные включают общую информацию о недвижимости, а также тип дома и год выставления на продажу. Соберем их в одну таблицу, содержащую информацию о более чем 11 млн. квартир России. В ней представлены 14 характеристик, таких как общая площадь, местонахождение, количество комнат и, самое главное, стоимость квартиры. Часть исходных данных представлена на рис. 2.

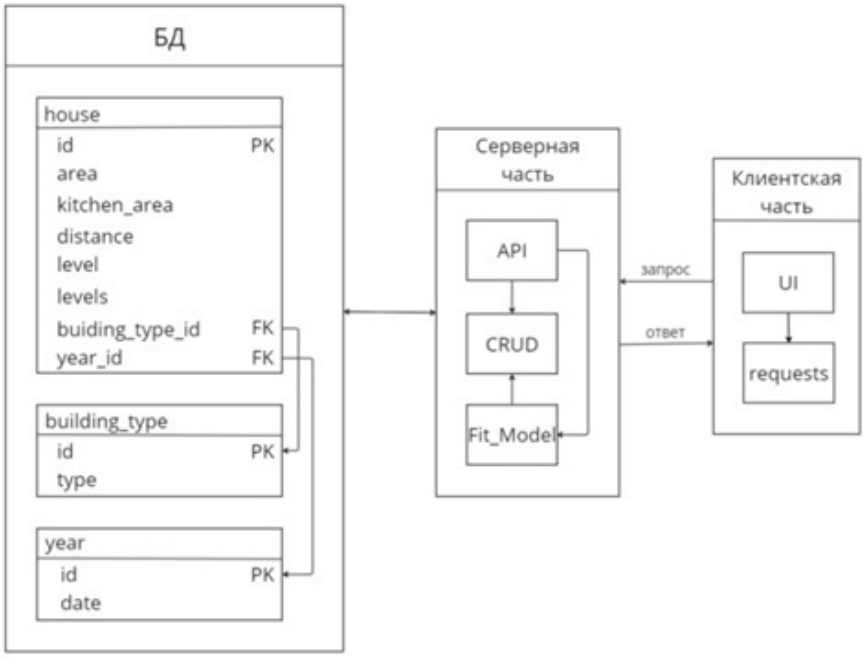


Рис. 1. Архитектура системы

	date	price	level	levels	rooms	area	kitchen_area	geo_lat	geo_lon	building_type	object_type	postal_code	street_id	id_region	house_id
0	2021-01-01	2451300	15	31	1	30.3	0.0	56.780112	60.699355	0	2	620000.0	NaN	66	1632918.0
1	2021-01-01	1450000	5	5	1	33.0	6.0	44.608154	40.138381	0	0	385000.0	NaN	1	NaN
2	2021-01-01	10700000	4	13	3	85.0	12.0	55.540060	37.725112	3	0	142701.0	242543.0	50	681306.0
3	2021-01-01	3100000	3	5	3	82.0	9.0	44.608154	40.138381	0	0	385000.0	NaN	1	NaN
4	2021-01-01	2500000	2	3	1	30.0	9.0	44.738685	37.713668	3	2	353960.0	439378.0	23	1730985.0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
11358145	2021-12-31	6099000	4	9	3	65.0	0.0	56.041539	92.753133	0	0	660030.0	581436.0	24	857003.0
11358146	2021-12-31	2490000	1	10	2	56.9	0.0	55.169949	61.519210	0	0	454079.0	274414.0	74	1820769.0
11358147	2021-12-31	850000	2	2	2	37.0	5.0	55.946206	43.088179	0	0	606101.0	190983.0	52	958329.0
11358148	2021-12-31	4360000	5	5	1	36.0	9.0	61.256383	73.435919	0	0	628406.0	581702.0	86	2156710.0
11358149	2021-12-31	1850000	1	5	1	33.0	7.0	55.164522	61.386448	0	0	454080.0	567218.0	74	2591215.0

11358150 rows × 15 columns

Рис. 2. Исходные данные

Начнем с подготовки данных.

В столбах street_id (улица) и house_id (номер дома) имеется много пропусков (от 30 %). Удалять такое количество квартир будет нерациональным в виду большой потери данных, но и замена пропусков модой не совсем корректна. Поэтому удалим данные характеристики из рассмотрения.

В столбце postal_code (почтовый индекс) 4 % данных пропущено. Заменим эти пропуски модой для каждого региона.

Заметим, что в данных содержится ряд ошибок и выбросов. Исключим квартиры, содержащие ошибки, с помощью следующих фильтров:

– rooms (количество комнат) больше 0 и меньше 15;

– kitchen_area (площадькухни) больше 0 и меньше 50;

– area (общая площадь) больше 0 и меньше 300;

– levels (количество этажей в здании) больше 0 и меньше 100;

– level (этаж) больше 0 и меньше 100.

В столбце date (дата выставления на продажу) содержатся данные в формате даты. Преобразуем их в числа (например, 2021-01-01 в 20210101).

В данных присутствуют координаты квартир, но в необработанном виде они мало информативны. Рассчитаем расстояние от каждой квартиры до центра города. Центром города считается главный почтамт. Под расстоянием подразумевается геодезический путь, то есть кратчайший путь с учетом эллиптической формы земли, который можно рассчитать по следующей формуле:

$$d = \overline{R} \cdot \arccos(\sin(t_1) \cdot \sin(t_2) + \cos(t_1) \cdot \cos(t_2) \cdot \cos(g_1 - g_2)),$$
$$\overline{R} = 6371{,}01,$$

где $\overline{R}$ — среднее значение радиуса Земли в километрах, (t_1, g_1) — широта и долгота первой точки соответственно, (t_2, g_2) — широта и долгота второй точки соответственно.

Построим модель множественной линейной регрессии [4]. Коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}755$. Его близость к 1 указывает на то, что выбранная модель значима [5]. Проверим факторы на мультиколлинеарность с помощью матрицы корреляции и исключим не значимые коэффициенты [7]. Факторы исключаются по очереди, и на каждой итерации пересчитывается R^2.

Первая построенная матрица корреляции имеет следующий вид (рис. 3):

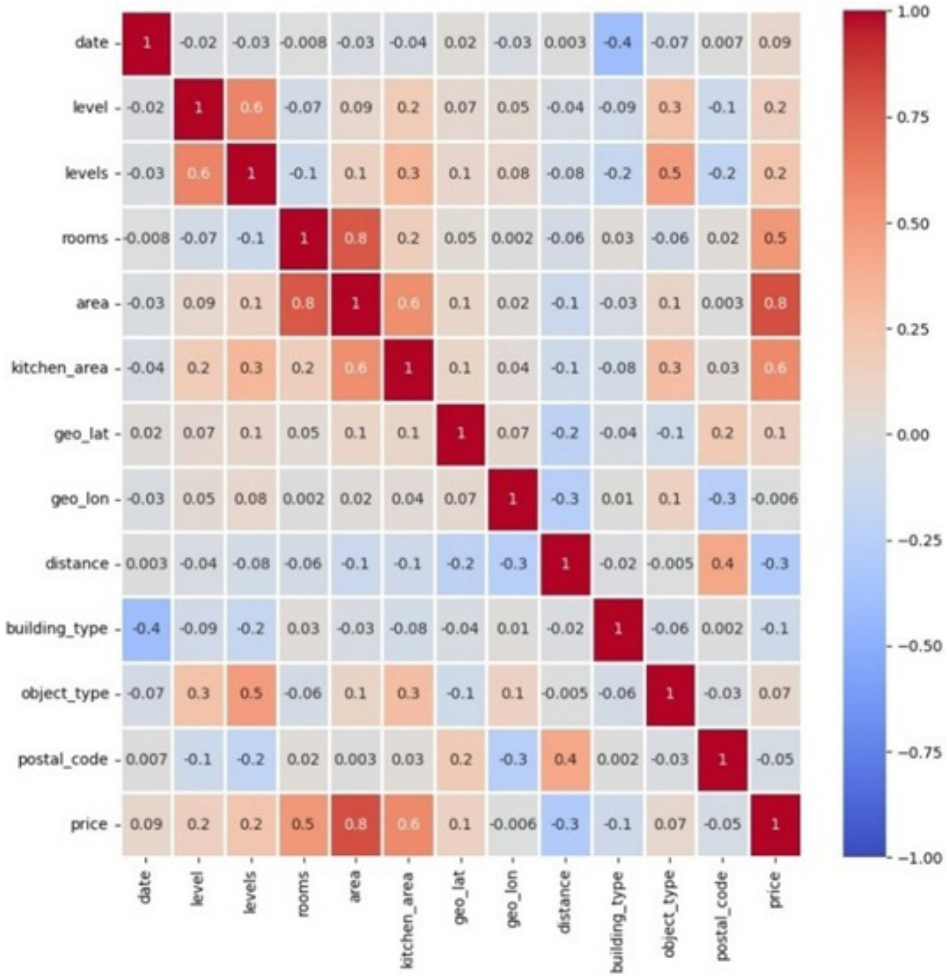


Рис. 3. Матрица корреляции до исключения факторов

Факторы исключаются в следующем порядке: geo_lon (долгота), postal_code (почтовый индекс), object_type (вторичка/новостройка), date (дата выставления на продажу), geo_lon (широта). Также исключим rooms (количество комнат), потому что этот фактор имеет высокую корреляцию с area (общая площадь).

На последней итерации получается следующая матрица корреляции (рис. 4).

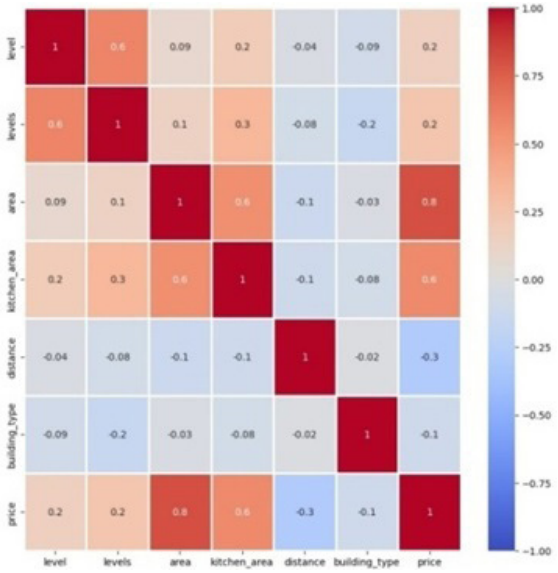


Рис. 4. Итоговая матрица корреляции

Из оставшихся параметров можно составить рейтинг имеющих наибольшую корреляцию с целевой переменной:

1) area (общая площадь);
2) kitchen_area (площадь кухни);
3) distance (расстояние до центра);
4) levels (количество этажей в здании);
5) level (этаж);
6) building_type (тип дома).

Уравнение полученной линейной регрессии имеет вид:

$$y = -2 \cdot 10^5 + 1{,}423 \cdot 10^4 \cdot x_1 + 1{,}617 \cdot 10^4 \cdot x_2 + 6{,}948 \cdot 10^4 \cdot x_3 +$$
$$+ 7{,}089 \cdot 10^4 \cdot x_4 + 1{,}377 \cdot 10^5 \cdot x_5 - 8{,}895 \cdot 10^4 \cdot x_6,$$

где x_1 — номер этажа, x_2 — количество этажей в доме, x_3 — общая площадь, x_4 — площадь кухни, x_5 — расстояние до центра, x_6 — тип дома.

Разделим данные на тренировочную и тестовую выборки, выделив под последнюю 10% от всех данных, и построим модели линейной регрессии, деревьев принятия решений и бустинга [6]. Для того чтобы оценить качество построенных моделей, а также выбрать лучшую из них для решения данной задачи, воспользуемся метриками оценки качества MSE, RMSE и MAE (табл. 1) [8].

Таблица 1

Оценка качества построенных моделей

Модель	MSE	RMSE	MAE
Линейная регрессия	$1{,}36 \cdot 10^{12}$	$1{,}16 \cdot 10^6$	$6{,}87 \cdot 10^6$
Деревья принятия решений	$1{,}36 \cdot 10^{12}$	$8{,}87 \cdot 10^5$	$2{,}83 \cdot 10^6$
Бустинг	$7{,}87 \cdot 10^{11}$	$7{,}27 \cdot 10^5$	$3{,}65 \cdot 10^6$

По метрикам MSE и RMSE лучший результат показал бустинг, а по метрике MAE — деревья принятия решений. Можно сделать вывод о том, что для предсказания стоимости квартиры лучше подходит бустинг.

Построенная модель позволяет пользователям определить оптимальную цену для продажи своего жилого помещения.

Для разработки веб-приложения использовался язык программирования JavaScript.

Приложение позволяет пользователям:

– определять оптимальную цену для продажи квартиры на основе её характеристик;

– добавлять данные о новой квартире;

– просматривать уже имеющиеся в базе квартиры, их цены и характеристики, в том числе, используя фильтры.

После перехода на сайт пользователям доступны три страницы:

– основная страница, на которой пользователь может задать характеристики своей продаваемой квартиры и получить оптимальную цену для продажи. Скриншот страницы приведен на рис. 5.

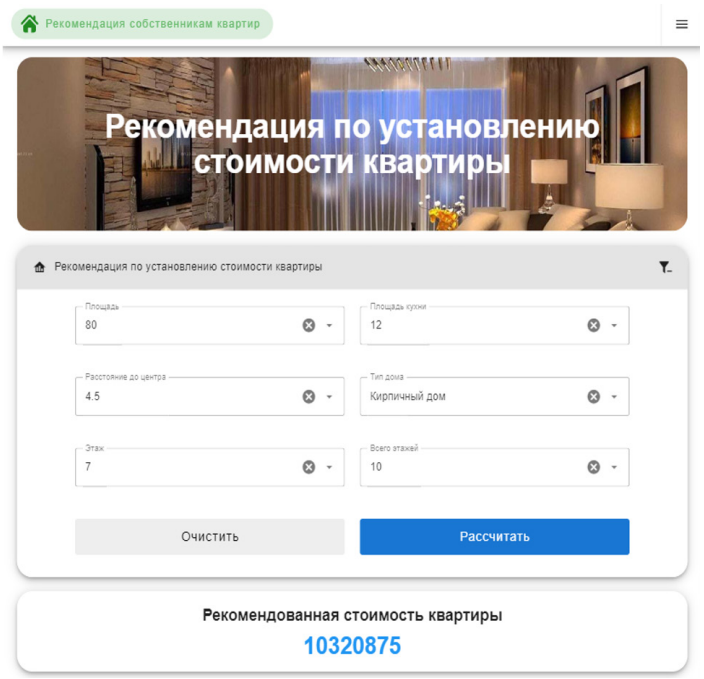


Рис. 5. Основная страница

– страница с добавлением данных о новых квартирах. На рис. 6 приведен пример добавления данных о новой квартире, после нажатия на кнопку «добавить» появляется всплывающее окно с информацией о том, что добавление было выполнено успешно:

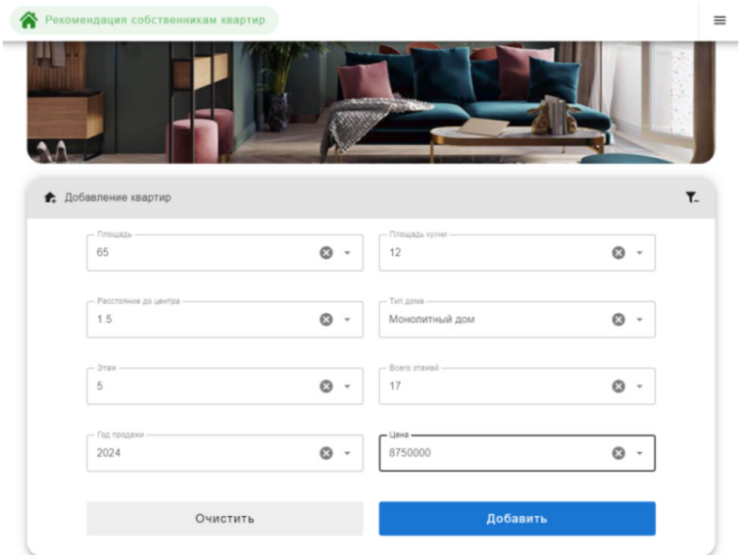


Рис. 6. Добавление данных о новой квартире

– страница, на которой можно просмотреть и отфильтровать все квартиры, данные о которых есть в базе данных. На рис. 7 приведен пример фильтрации квартир по типу дома, этажу, площади и цене, а также отображение полученных квартир.

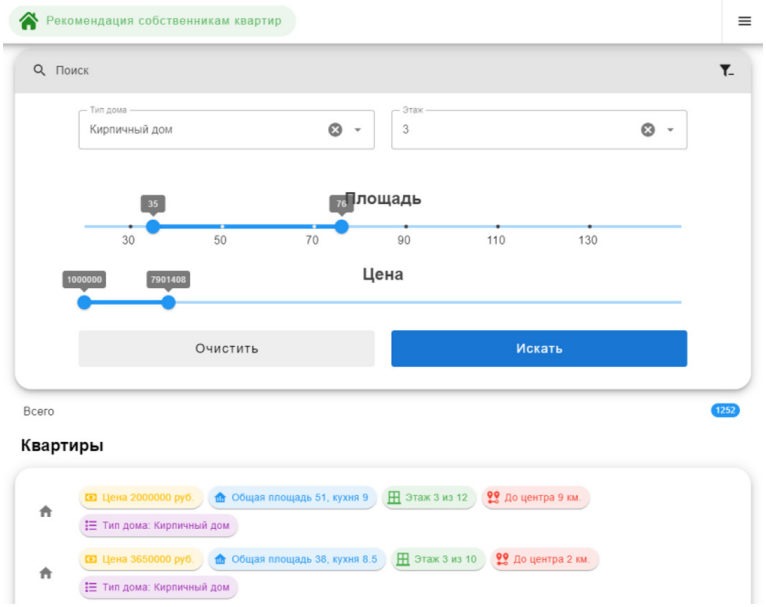


Рис. 7. Фильтрация квартир

Также на сайте присутствует система навигации, расположенная в правом верхнем углу. По навигации можно перейти на все доступные страницы, а также написать автору в телеграм или поделиться сайтом в социальных сетях (рис. 8).

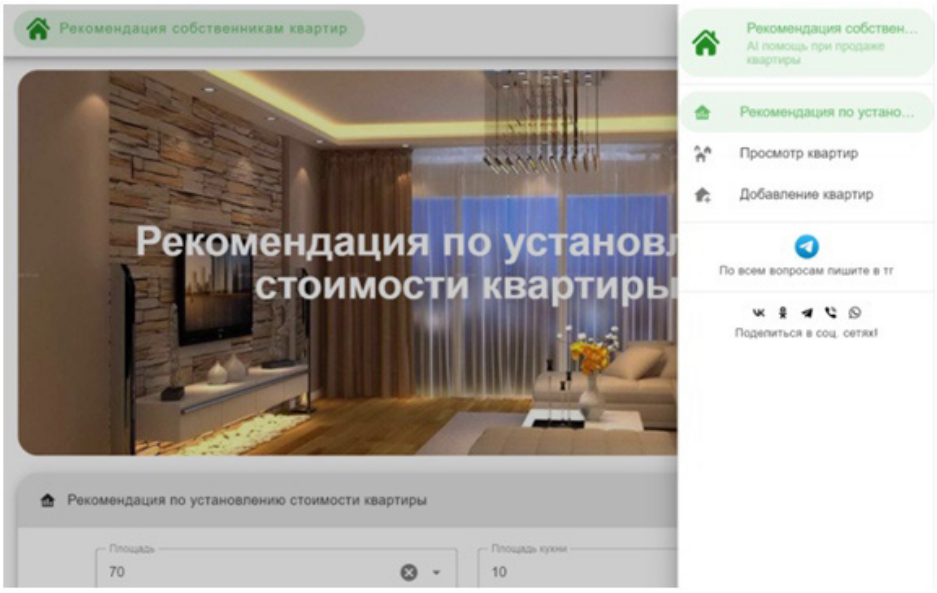


Рис. 8. Система навигации

Заключение

В ходе работы были разработана рекомендательная система для продажи жилого помещения, основанная на методах интеллектуального анализа данных. Метрики оценки качества показали достаточно хорошие результаты, что говорит о точности построенной модели машинного обучения.

Литература

1. *Кузнецов И. А.* Методы и алгоритмы машинного обучения для предобработки и классификации слабоструктурированных текстовых данных на соискание ученой степени кандидата технических наук / И. А. Кузнецов. – Москва : Национальный исследовательский ядерный институт «МИФИ», 2019. – 127 с.

2. *Сапрыкин О. Н.* Интеллектуальный анализ данных: учебное пособие / О. Н. Сапрыкин. – Самара : Издательство Самарского университета, 2020. – 80 с.

3. *Смирнова Л. А.* Машинное обучение в прогнозировании / Л. А. Смирнова, Е. М. Аристова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции (Воронеж, 4-6 декабря 2023 г.): электронный ресурс. – Воронеж, 2023. – С. 658–665.

4. *Аристова Е. М.* Модели принятия решений: учебное пособие / Е. М. Аристова. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020. – 64 с.

5. *Алиева П. М.* Курс лекций по дисциплине «Многомерные статистические методы» / П. М. Алиева. – Махачкала, 2014. – 76 с.

6. *Глуховский М. В.* Машинное обучение в прогнозировании / М. В. Глуховский, Л. А. Смирнова // Математика, информационные технологии, приложения: сборник трудов Мужвузовской научной конференции молодых ученых, студентов и школьников (Воронеж, 24–25 апреля 2024 г.): электронный ресурс. – Воронеж, 2024. – С. 150–157.

7. Что такое мультиколлинеарность? Вот все, что вам нужно знать. Skine. – URL: https://skine.ru/articles/260134/ (дата обращения: 26.09.2024).

8. Метрики качества линейных регрессионных моделей. Loginom. – URL: https://loginom.ru/blog/quality-metrics (дата обращения: 10.10.2024).

УДК 519.816

МОДЕЛЬ РЕАЛЬНОГО СОСТАВНОГО ОПЦИОНА ПРИ МНОГОСТАДИЙНЫХ НИОКР С БАРЬЕРАМИ ЭФФЕКТИВНОСТИ

В. Н. Сыроватка

Российская таможенная академия, Ростовский филиал

Аннотация. Рассмотрена роль научных исследований на современном этапе технологического развития производства. С учетом возможного применения современных информационных технологий в практике проведения научных исследований была предложена модификация модели составных реальных опционов для оценки эффективности многостадийных НИОКР по разработке лекарственных препаратов, в которой исследуется возможность управления ожидаемыми потерями с помощью барьеров эффективности на каждом этапе проведения исследования. Произведено расширение возможностей исходной модели, благодаря чему для руководителя проекта становится возможным сравнивать текущую эффективность с установленным барьером не только в конце текущей стадии исследования, но и в процессе ее проведения. Таким образом, опираясь на текущее значение эффективности, можно остановить малоэффективное исследование внутри фазы, не дожидаясь ее окончания. В этом случае, помимо средств на будущие стадии исследования будет сохранено часть средств, запланированных к расходованию на данной стадии.
Ключевые слова: математическая модель, многостадийный НИОКР, оценка стоимости, процесс Пуассона, модель Блэка — Шоулса, метод Винера — Хопфа, реальный опцион, барьер эффективности, стоимость проекта, ожидаемые потери, выплата по опциону, компенсация по опциону.

Введение

Современное развитие всех сфер материального производства, глобализация экономики, нарастающая конкуренция между компаниями и отдельными странами, требует внедрения инновационных подходов в деятельности отечественных организаций. Выполнение данного условия является основным катализатором повышения эффективности процессов производства и экономического роста.

Выпуск любого типа изделия или продукции на современном этапе технологического развития требует выполнения обязательных предварительных научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ (НИОКР). НИОКР является одним из важнейших этапов в жизненном цикле изделия [1]. Именно от качества проведения исследований и их эффективности зависит последующая экономическая востребованность продукции, ее конкурентоспособность на внутреннем и внешних рынках сбыта.

Повышение результативности НИОКР может быть достигнута путем внедрения в данной сфере деятельности организации проектных технологий [2]. По мере усложнения технологических процессов, затраты на научные исследования неуклонно возрастают. Роль НИОКР становится ведущей в силу того, что большая часть добавленной стоимости в конечной цене изделия в настоящий момент формируется не в процессе его производства, а на этапе его разработки [3]. При этом сами исследования становятся длительными по времени и усложняются. Во многих случаях, в частности при разработке лекарственных препаратов, научные исследования разбиваются на стадии, где в процессе реализации каждой из них, осуществляется проверка эффективности выдвинутых гипотез, принятых технических и иных решений на основе сформулированных ранее критериев эффективности. Важным является вопрос управления исследованиями на каждой из стадий, разработки соответствующих математических моделей.

Появление информационных технологий, таких как технология Интернета вещей (IoT) и технология блокчейн, может существенным образом изменить характер деятельности человека в разных сферах. Внедрение перечисленных технологий в практику научных исследований позволит автоматизировать процесс их проведения, более эффективно осуществлять сбор экспериментальной информации. Изменение характера поступления информации, со случайного, порционного на непрерывный, позволит разработать более эффективные методы ее анализа, а как следствие, и методы принятия управленческих решений на ее основе.

В данной работе рассматривается математическая модель управления многостадийным НИОКР по разработке лекарственных препаратов на основе Пуассоновского процесса.

Актуальность данной работы обусловлена необходимостью дальнейшего совершенствования математической базы по управлению НИОКР.

Объектом исследования является математическая модель реальных опционов как элемент управления многостадийным НИОКР.

Целью данной работы является изменение существующей математической модели, ее адаптация на иной, непрерывный, характер поступления экспериментальной информации с использованием соответствующей модели Леви.

1. Реальный опцион как инструмент оценки стоимости многостадийных НИОКР

Принятие обоснованных управленческих решений при проведении многостадийных НИОКР является одной из основных задач математического моделирования данной сферы. Каждый этап проведения исследований сопровождается своими рисками, и возможность управлять данными рисками является одним из непременных условий успешной реализации проекта [4]. Управление рисками может осуществляться с помощью реальных опционов, по аналогии с финансовыми опционами, но применительно не к финансовым инструментам, а реально существующим проектам. Реальный опцион позволяет руководителю проекта принимать управленческие решения в определенные моменты времени, основываясь на новых данных.

Применении реальных опционов в большинстве случаев базируется на использовании модели финансовых опционов, что приводит к неадекватности разработанных моделей. В большинстве моделей для финансовых опционов используется диффузионная модель Блэка-Шоулса [5], ее дискретным аналогом выступает биноминальная модель [6, 7]. Она обладает рядом недостатков, применительно к реальным опционам, в частности, недооценивает риски, при повышении стоимости проекта, может не отражать скачкообразные процессы, лежащие в основе многостадийных НИОКР, не учитывает внезапную динамику рынка и требуемые к учету барьеры эффективности.

Метод вычисления цен барьерных опционов в моделях со стохастической волатильностью и со скачками рассмотрен в работе [8]. Модели со случайной волатильностью лишены основного недостатка модели геометрического броуновского движения, а именно, они исключают постоянную дисперсию приращений за фиксированный промежуток времени [9].

Методология применения реальных опционов для оценки стоимости проекта по отношению к многостадийным НИОКР по разработке лекарств представлена в работе [10]. Данная модель [10] рассматривает цены составных реальных опционов вместе с возможными безвозвратными потерями. В модели также имеется возможность управления ожидаемыми потерями, благодаря использованию барьеров для достигнутой эффективности на реализуемой в данный момент стадии исследования.

Основным базовым процессом модели является эффективность разрабатываемого лекарства. Разработка лекарственных препаратов, и НИОКР связанный с этим процессом, состоит из нескольких регламентированных стадий, это: открытие, доклиническое исследование, три фазы клинических исследований, регистрация и допуск препарата к открытой продаже. При

этом, для минимизации возможных потерь, сравнивается текущая стоимость проекта при завершении стадии с номером i и затраты на следующую стадию $i+1$, и если текущая стоимость проекта меньше дальнейших затрат, проект закрывается, как нецелесообразный с коммерческой точки зрения.

Как в модели [10], в нашей модели информация о результатах экспериментов на первых 5 стадиях приходит порционно, в случайные моменты времени. На ее основании производится оценка текущей эффективности. В качестве модели эффективности будем использовать составной процесс Пуассона с дискретным распределением скачков в эффективности. По аналогии с [10] в нашей модели скачок может осуществляться вверх или вниз на одинаковый процент:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \,, \tag{1}$$

где Y_i — дискретная случайная величина размера скачка в эффективности.

Регистрация препарата на последней стадии исследования будет возможна, только если установленный регулятором барьер эффективности x_0 будет превышен. Таким образом, если продолжить реализацию исследования с низкой текущей эффективностью, то есть высокий риск, что препарат может быть не зарегистрирован регулятором, а все инвестиции в проект потеряны.

Помимо стандартной выплаты по опциону, в модель добавлен индикатор выхода эффективности за установленный барьер на соответствующей стадии. Руководитель проекта выбирает значения барьеров исходя из своей инвестиционной стратегии.

Вычисления реальных опционов в [10] с барьерами, основывается на том, что на первых пяти стадиях сравнивается эффективность с установленным руководителем проекта барьером только в конце текущей стадии.

В нашей модели мы расширим возможности руководителя проекта и добавим в нее возможность сравнения текущей эффективности и установленных барьеров, в течение всей текущей стадии исследования, по факту непрерывного поступления экспериментальных данных. В этом случае, опираясь на текущее значение эффективности, руководитель проекта может остановить малоэффективное исследование внутри фазы, не дожидаясь ее окончания. При этом, часть средств, запланированных к расходованию на данной стадии будет сохранено. В этом случае, помимо средств на будущие стадии исследования будет сохранено часть средств, запланированных к расходованию на данной стадии.

Обозначим минимальную эффективность (минимум процесса эффективности) за период $[t_1, t_2]$: $\min\limits_{t_1 \le t \le t_2} X_t$ через $\underline{X}(t_1, t_2)$. Минимальная эффективность должна быть выше барьера эффективности в течение всего времени прохождения исследования на текущей стадии. Вход в текущую стадию проекта происходит с эффективностью, которая выше барьера для данной стадии h_i. Согласно формуле (2), в отличии от исходной модели [10] цена опциона становится зависимой от момента времени τ_i остановки проекта внутри фазы i исследования. Переход на следующую стадию осуществляется если эффективность будет выше барьера h_i в течение всей стадии. Выплата по опциону в конце стадии составит: $(V_{i+1}(T_i, X_{T_i}, V) - K_i)_+$. Если же будущая стоимость проекта окажется ниже K_i то фаза не начинается, и проект останавливается. Также проект может быть остановлен в момент времени τ_i до времени окончания текущей стадии i, иными словами при $\tau_i \le T_i$. В данном случае остановка происходит в случае падения текущей минимальной эффективности $\underline{X}(t_1, t_2)$ ниже значения барьера эффективности h_i для данной стадии. Проект останавливается до завершения текущей стадии i и возвращается часть средств, неизрасходованных до текущего момента на данной стадии. Таким образом, компенсация по опциону составит: $K_{i-1}\left(\frac{T_i - \tau_i}{T_i - T_{i-1}}\right)$.

Введем $I_{\tau_i > T_i}$ — индикатор события, что минимальная эффективность оставалась выше барьера h_i вплоть до момента T_i завершения фазы i. Далее, обозначим через s_i вероятность того, что в ходе исследования на стадии i у препарата не будут выявлены неприемлемые с точки зрения безопасности побочные эффекты.

В этом случае, цена опциона $V_i(T_{i-1}, x, V)$ на стадию $i = 1,2,3,4,5$ вычисляется по следующим формулам:

$$V_i\left(T_{i-1}, x, V\right) = E\left[e^{-r(T_i - T_{i-1})} \left(V_{i+1}\left(T_i, X_{T_i}, V\right) - K_i \right)_+ I_{\tau_i > T_i} + e^{-r(T_i - T_{i-1})} K_{i-1} \left(\frac{T_i - \tau_i}{T_i - T_{i-1}} \right) I_{\tau_i \le T_i} \middle| X_{T_{i-1}} = x \right] s_i. \quad (2)$$

На завершающей стадии $i = 6$ стоимость проекта определяется по формуле (3) на основе будущего объема продаж после запуска проекта по реализации препарата:

$$V_6\left(T_5, x, V\right) = e^{-r(T_6 - T_5)} E\left[\left(V e^{Z_{T_6 - T_5}} e^{x - x_0} - K_6 \right)_+ \middle| Z_0 = 0 \right] s_6 \cdot I_{x > x_0}, \quad (3)$$

где Z_t — процесс броуновского движения.

Заключение

Непрерывный мониторинг барьеров эффективности препарата на каждой стадии НИОКР существенно усложняет задачу по сравнению с проверкой барьеров только в конце каждой из стадий, как это предложено в работе [10]. Для решения нашей задачи требуются более сложные численные методы, одним из которых является метод Винера — Хопфа. Данный метод активно применялся для решения задач оценивания барьерных финансовых опционов (см., например [11]).

Литература

1. *Аникейчик Н. Д.* Планирование и управление НИР и ОКР : учеб. пособие / Н. Д. Аникейчик, И. Ю. Кинжагулов, А. В. Федоров. – Санкт-Петербург : НИУ ИТМО, 2016. – 192 с.

2. *Савченко Я. В.* Методические основы формирования корпоративной системы управления высокотехнологичными проектами в сфере НИОКР / Я. В. Савченко, Н. Г. Боярских // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Экономика. Управление. Право. – 2020. – Т. 20, № 2. – С. 148–157.

3. *Абрамова И. Г.* Экономика научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ : учеб. пособие / И. Г. Абрамова, Д. А. Абрамов, А. С. Корнилова. – Самара : Изд-во СГАУ, 2015. – 128 с.

4. *Петренева Е. А.* Анализ многостадийных инвестиционных проектов как моделей управления / Е. А. Петренева // Финансовая аналитика: проблемы и решения. – 2015. – № 31(265). – С. 15–26.

5. *Black F.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. – 1973. – № 3(81). – P. 637–654.

6. *Павлов И. В.* Моделирование сбоев и их устранение на финансовых рынках с потоком событий, порожденным бинарным деревом / И. В. Павлов, О. В. Назарько // Инженерный вестник Дона. – 2013. – № 4. – С. 144–148.

7. *Богачева М. Н.* Оценка справедливой цены опциона для обобщенной модели Кокса-Росса-Рубинштейна в случае m состояний / М. Н. Богачева, Л. И. Прянишникова // Инженерный вестник Дона. – 2013. – № 4. – С. 235–240.

8. *Лужецкая П. А.* Вычисление цен опционов в моделях со стохастической волатильностью / П. А. Лужецкая, О. Е. Кудрявцев // Инженерный вестник Дона. – 2020. – № 5. – С. 24–34.

9. *Гречко А. С.* Методы анализа волатильности российского финансового рынка для широкого класса моделей / А. С. Гречко, О. Е. Кудрявцев // Инженерный вестник Дона. – 2016. – № 4. – С. 124–137.

10. *Kudryavtsev O. E.* New Compound Real Option Pricing Method with Lévy Processes for the Quality-by-Design Pharmaceutical R&D / O. E. Kudryavtsev, E. Trushin // Social Science Research Network. – 2023. – № 4650638.

11. *Kudryavtsev O. E.* Approximate Wiener-Hopf factorization and Monte Carlo methods for Lévy processes / O. E. Kudryavtsev // Theory of Probability and Its Applications. – 2019. – № 64(2). – С. 186–208.

УДК 004

БУЛЕВЫ ОПЕРАЦИИ НАД МЕШАМИ

А. С. Точилин[1], Г. В. Петрухнова[2], С. Л. Подвальный[2]

[1]Воронежский государственный университет
[2]Воронежский государственный технический университет

Аннотация. Рассматривается задача выполнения булевых операций над мешами. После перетриангуляции и сегментации мешей образуется набор из открытых мешей. Набор мешей разделяется на 5 классов. Вводится операция конкатенации, позволяющая объединять меши для получения результатов операций. В рамках данного подхода можно работать не только с замкнутыми мешами (телами), но и с открытыми мешами (поверхностями).
Ключевые слова: пересечение мешей, объединение мешей, разность мешей, триангуляция, булевы операции, тело, поверхность, сегмент, классификация мешей, программная система, библиотека.

Введение

Задача выполнения булевых операциях над мешами уже была решена в различных библиотеках, например, CGAL [1], GEOGRAM [2], программных пакетах для моделирования, например, Open Cascade [3]. Однако в большинстве случаев разработчики рассматривают булевы операции над телами — мешами, у которых каждый из треугольников имеет ровно три соседа по ребрам. При попытке выполнить операцию между плоскостью и телом, между касающимися в треугольниках мешами использование CGAL и GEOGRAM приводит либо к неверному результату, либо приводят к зацикливанию операций.

Решение, рассматриваемое в данной работе, показало свою эффективность как в случае операций с телами, так и с поверхностями. Алгоритм для классификации позволяет из имеющегося набора поверхностей, на которые были разбиты входные тела и поверхности, получить тела или поверхности, являющиеся результатом булева пересечения, объединения или разности.

Цель данной работы — упростить алгоритмы обработки информации о мешах.

1. Постановка задачи

Имеются два пересекающихся меша, необходимо построить меш, который представлял бы собой результат одной из булевых операций. Также имеется набор сегментированных частей меша, обладающих определенными свойствами, позволяющими конкатенировать их по вершинам — объединять по общим вершинам, записывая все треугольники одного меша во множество треугольников другого меша.

Меш — множество вершин и треугольников, образующих собой тело или поверхность. Тело — меш, в котором нет открытых срезов:

$$M = \{V, T\},\ T = \{t \mid n(t) > 2\}, \tag{1}$$

где $n(t)$ — количество соседних треугольников по ребру. Поверхность – меш, в котором есть хотя бы один открытый срез:

$$M = \{V, T\}, T = \{t \mid \exists t_i : n(t_i) \le 2\}. \tag{2}$$

2. Обзор решаемых задач

2.1. Булевы операции

Стимулом для написания данной работы стала статья [4], в которой авторы для упрощения процесса получения результатов булевых операций выполняли перетриангуляцию — заменяли треугольники исходного меша на треугольники, являющиеся результатом ограниченной триангуляции Делоне [5] исходного треугольника с примитивами пересечения (точками, отрезками, поверхностями). Целью такой перетриангуляции является получение нового меша, который пересекается с другим мешем только в вершинах. Если поверхности пересекаются, то контур пересечения будет состоять из отрезков, совпадающих с ребрами треугольников в перетриангулированной поверхности.

Алгоритм перетриангуляции получил дальнейшее развитие в других алгоритмах. В работе [6] авторы после переразбивания мешей описывают разделение множества треугольников на лежащие снаружи или лежащие внутри исходной модели. Авторы исходной идеи о перетриангуляции развили свою идею до разделения поверхностей на сегменты, однако в своей работе [7] они опираются на ориентацию треугольников. Классификация, предложенная данной работой, работает также эффективно, но является проще.

3. Классификация и булевы операции

3.1. Классификация сегментов

Результатом решения задачи сегментации является множество мешей, которое нужно разделить на 5 классов:

$$C(\{M\}):\{M\}\to\{l\circ R, l\bullet R, L\cap_{\Delta} R, r\circ L, r\bullet L\}, \tag{3}$$

где $x\circ y$ означает, что треугольники меша x лежат «снаружи» y. Соответственно, $x\bullet y$ — x лежит «внутри» y, $\cap_{\Delta}$ — пересечение по треугольникам. Это абстрактные операции, определение которых зависит от реализации. Они обладают следующими свойствами:

$$\{l\circ R\}\cap_{\Delta}\{l\bullet R\}=\varnothing \tag{4}$$

$$\{l\circ R\}\cap_{\Delta}\{L\cap_{\Delta} R\}=\varnothing \tag{5}$$

$$\{l\bullet R\}\cap_{\Delta}\{L\cap_{\Delta} R\}=\varnothing \tag{6}$$

$$\{l\circ R\}\cap_{\circ}\{L\cap_{\Delta} R\}=\{v\} \tag{7}$$

$$\{l\bullet R\}\cap_{\circ}\{L\cap_{\Delta} R\}=\{v\} \tag{8}$$

где $\cap_{\Delta}$ — пересечение по треугольникам, $\cap_{\circ}$ — пересечение по вершинам.

Другими словами, никакие сегменты не пересекаются в треугольниках (5)–(6), однако они могут пересекаться в вершинах, совпадающих с вершинами отрезков пересечения (7)–(8). Если два сегмента находятся по разную сторону границ, они относятся к двум разным классам — бинарная операция классификации. Пример разбиения мешей на сегменты приведен на рис. 1.

Также в результат сегментации включены множества отрезков и треугольников пересечения. Рассматриваются именно отрезки потому, что контур пересечения может пересекать сам себя — в таком случае требуется разбивать сегменты контура в местах самопересечения. Пример самопересечения приведен на рис. 2 — треугольники крышки не соединены с треугольниками самого чайника.

На рис. 1–2 представлены результаты экспериментов, выполненные в разработанной программной системе отображения мешей.

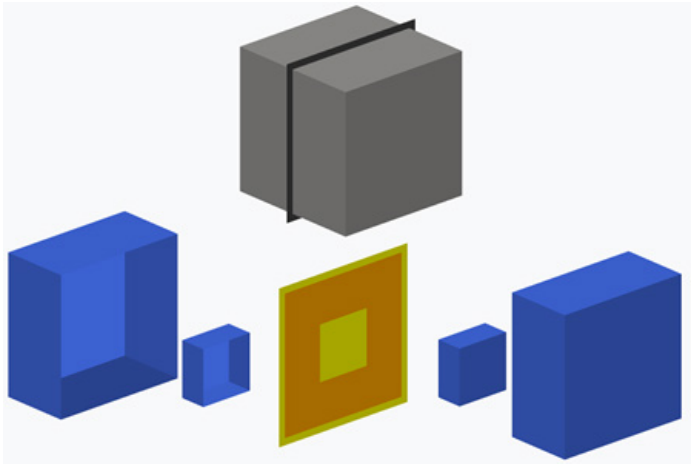


Рис. 1. Классификация сегментов (синим цветом обозначены сегменты куба с полостью, желтым — сегменты меша снаружи куба, оранжевым — внутри)



Рис. 2. Контур пересечения мешей с самопересечением. (квадратами обозначены вершины контура, а красным квадратом обозначена вершина самопересечения

3.2. Объединение сегментов в результате выполнения булевых операций

Переопределим операцию «конкатенации» мешей:

$$+ : M_1, M_2 \to M$$
$$M_1 + M_2 := \{V_1 \cup (V_2 \setminus V_1),\ T_1 \cup T_2' \} \tag{9}$$

Результирующий меш будет содержать внутри себя все вершины первого меша и неповторяющиеся вершины второго. T_2' тогда можно определить как множество треугольников, переиндексированных с учетом удаления повторяющихся вершин. Для получения результатов объединения будем конкатенировать между собой сегменты из классов, определенных в (2)–(6):

$$\bigcup : \{l \circ R\} + \{r \circ L\} + \{L \cap_\Delta R\}$$
$$\bigcap : \{l \bullet R\} + \{r \bullet L\} + \{L \cap_\Delta R\} \tag{10}$$
$$\setminus : \{l \circ R\} + \{r \bullet L\}$$

Ограничения, наложенные на операцию (9), помогут избежать повторной вставки вершин, принадлежавших пересечению сегментов (7), (8).

4. Результаты работы алгоритма

4.1. Результаты применения операций

На рис. 3–4 представлены результаты экспериментов, выполненные в разработанной программной системе отображения мешей. На рис. 3 приводятся результаты пересечения куба с телом с полостью (внутри куба поменьше находится кубическое отверстие). На рис. 4 приводятся результаты операций между более комплексным мешем и призмой.

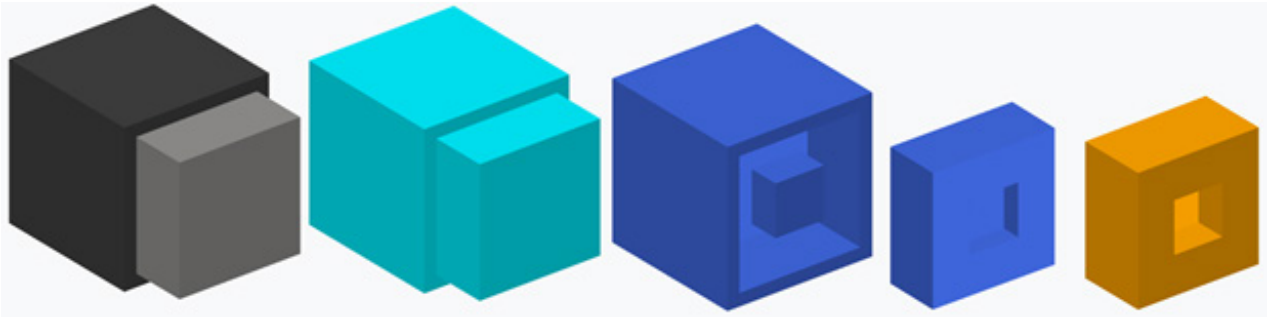


Рис. 3. Результаты выполнения булевых операций между телом и телом с полостью (лазурным цветом обозначено объединение, оранжевым — пересечение, синим — вычитание)

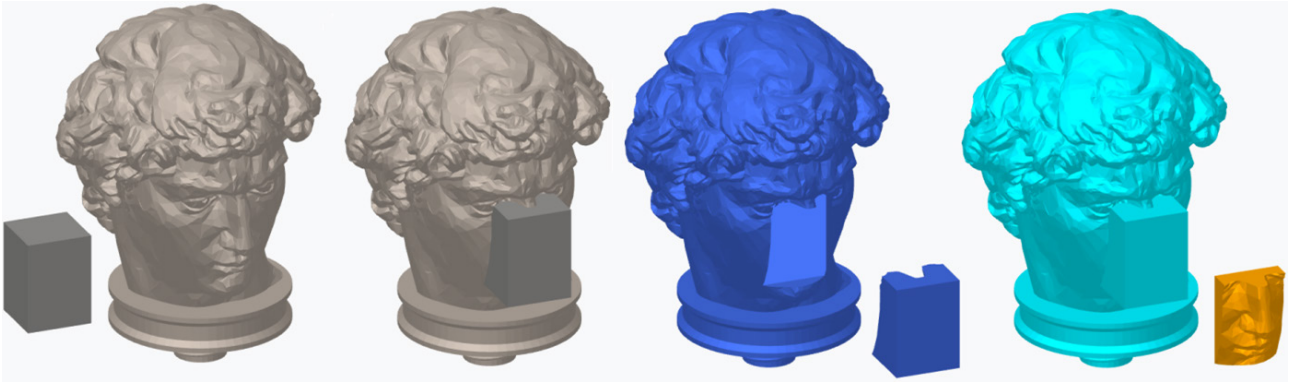


Рис. 4. Результаты булевых операций между головой статуи Давид и призмой (лазурным цветом обозначено объединение, оранжевым — пересечение, синим — вычитание)

Результаты экспериментов позволяют сделать вывод о том, что введенные булевы операции над трехмерными мешами выполняются корректно и позволяют упростить обработку данных о мешах. Процессы классификации и конкатенация позволяют получать меши, являющиеся результатами булевых операций.

Заключение

Рассматривалась задача выполнения булевых операций над мешами с учетом предварительной сегментации поверхностей. Цель данной работы — упростить алгоритмы обработки информации о мешах.

По результатам работы была разработана библиотека и система отображения мешей, в которой пользователь может интерактивно применять булевы операции к мешам: пересечение, вычитание и объединение. В дальнейших работах планируется описание процесса формирования перетриангуляции, алгоритмов получения комплекса примитивов пересечения, сегментации поверхностей.

Литература

1. The Computational Geometry Algorithms Library. – URL: https://www.cgal.org/ (дата обращения: 26.10.2024).

2. BrunoLevy/geogram: a programming library with geometric algorithms. – URL: https://github.com/BrunoLevy/geogram (дата обращения: 26.10.2024).

3. Open Cascade, part of Capgemini. – URL: https://www.opencascade.com/ (дата обращения: 30.10.2024).

4. *Zhou Q.* Mesh Arrangement for Solid Geometry / Q. Zhou, E. Grinspun, D. Zorin, A. Jacobson // ACM Transactions on Graphics (TOG). – 2016. – Т. 35, № 4. – С. 1–15.

5. *Chew L. P.* Constrained delaunay triangulations / L. P. Chew // Proceedings of the third annual symposium on Computational geometry. – 1987. – С. 215–222.

6. *Jacobson A.* Robust inside-outside segmentation using generalized winding numbers / A. Jacobson, L. Kavan, O. Sorkine-Hornung // ACM Transactions on Graphics (TOG). – 2013. – Т. 32, № 4. – С. 1–12.

7. *Zhou M.* Simple and robust boolean operations for triangulated surfaces / M. Zhou [et al.] // Mathematics. – 2023. – Т. 11, № 12. – С. 2713.

УДК 517.9

ПРИБЛИЗИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ИНФЕКЦИИ ВИРУСА ГЕПАТИТА В ВО ВРЕМЯ ПРОТИВОВИРУСНОЙ ТЕРАПИИ С АНАЛИЗОМ УСТОЙЧИВОСТИ И ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ГОМОТОПИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЛЯО

В. А. Усикова

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной работе рассматривается построение и исследование математической модели базовой динамики вируса гепатита В. Модель основана на взаимодействии между инфицированными и неинфицированными клетками печени, а также вирусом в организме-хозяине. Основной целью является решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода сеток. В ходе работы был разработан алгоритм и программный код, позволяющий визуализировать результаты в виде графиков. Это помогает анализировать изменение количества клеток и вируса с течением времени. Модель дает возможность лучше понять, как вирус распространяется и влияет на организм человека.

Ключевые слова: математическая модель, метод сеток, вирус гепатита В, обыкновенные дифференциальные уравнения, задача Коши, численное моделирование, прогнозирование заболеваемости, клетки, гепатоциты.

Введение

Жизнь людей по всему миру постоянно находится под угрозой опасных вирусов и заболеваний, что является проблемой уже многих тысячелетий. На сегодняшний день одним из актуальных и серьезных вопросов на эту тему остается вирус гепатита В, несмотря на наличие вакцины, способной предотвратить его действие. Исследования этого вируса ведутся с использованием различных технологий и методов, в том числе при помощи математического моделирования.

Применение моделирования расширяет понимание вируса и его динамики инфицирования. Первые значимые математические модели, которые стали основой для описания иммунного ответа, были разработаны Андерсоном и Мэйем для изучения инфекционных заболеваний человека, в том числе ВИЧ и других вирусных инфекций [1].

Цель данной работы получить более глубокое представление о сложной вирусной динамике, наблюдаемой при инфекции вируса гепатита В во время медикаментозной терапии. Эти знания могут существенно улучшить процесс лечения. Они могут дать информацию о том, как вирус реагирует на различные лекарства, какие препараты наиболее эффективны для подавления инфекции, а также сроки, когда следует начинать и прекращать лечение [2–5].

Одной из основных причин изучения инфекции, вызываемой вирусом гепатита В, является необходимость улучшения контроля за распространением заболевания и, в конечном счете, подавление вируса среди населения. Математические модели могут принести много пользы, так как они помогают более конкретно изучить и понять динамику вируса и помочь с определением мер по противодействию этой инфекции.

Таким образом, математические модели играют важную роль в понимании и контроле гепатита В. Они позволяют предсказывать развитие заболевания, оценивать действенность мероприятий против него, разрабатывать новые более эффективные и оптимальные стратегии, а также методы лечения и профилактики. Все это может значительно повысить эффективность борьбы с инфекцией.

Основополагающим источником для исследования послужила статья: Approximate solutions for HBV infection with stability analysis using LHAM during antiviral therapy [8].

1. Математическая модель

В данной работе рассматривается математическая модель базовой динамики вируса гепатита B [6].

В модели показывается взаимодействие между переменными:

- X обозначает неинфицированные клетки-мишени печени;
- Y представляет собой инфицированные клетки печени;
- Z — вирус гепатита B внутри организма носителя.

Определение данных для ее построения:

- заражение клеток-мишеней происходит со скоростью β при контакте с вирусом;
- учитывается, что инфицированные клетки умирают со скоростью δ;
- скорость выздоровления инфицированных клеток обозначается ρ;
- появление нового вируса происходит со скоростью ν;
- скорость гибели вируса равна c;
- постоянная производительность гепатоцитов (основных клеток печени) обозначается s;
- естественная смертность гепатоцитов представляется через d_T;
- эффект терапии в блокировании инфекции — η;
- эффект препарата на блокирование выработки новых вирусов обозначается как ε.

Переменные рассматриваются в двух вариантах: либо как горизонтальная передача — через контакт с инфицированными людьми, либо как вертикальная — непосредственно от родителей. Вертикальная передача происходит с большей частотой. Эти данные дают возможность построить следующую модель:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = s - (1-\eta)\beta ZX - d_T X + \rho Y \\ \dfrac{dY}{dt} = (1-\eta)\beta ZX - \delta Y - \rho Y \\ \dfrac{dZ}{dt} = (1-\varepsilon)\nu Y - cZ \end{cases} \tag{1}$$

Начальные и краевые условия для нахождения решения системы уравнений (1): $X(0)=0$, $Y(0)=0$, $Z(0)=0$; $X(0)=10^8$, $Y(0)=10^{-2}$, $Z(0)=10$.

В табл. 1 находятся значения переменных, содержащихся в математической модели.

Таблица 1

Значения параметров модели

Параметр	Определение	Значение
s	постоянная производительность гепатоцитов	1 клетка в $день^{-1}$ $мл^{-1}$
d_T	естественная смертность гепатоцитов	$0.01-9\times10^{-4}$ $день^{-1}$
β	скорость инфицирования	$1\times10^{-10}-6.6\times10^{-8}$ $мл$ $вирионов^{-1}$ в $день^{-1}$
δ	скорость гибели инфицированных клеток	$0.06-0.25$ в $день^{-1}$
ρ	скорость выздоровления инфицированных клеток	0 в $день^{-1}$
ν	скорость появления нового вируса	$1.4-164$ клетки $вирионов^{-1}$ в $день^{-1}$
c	скорость гибели вируса	$0.18-1$ в $день^{-1}$
η	эффект терапии в блокировании инфекции	$0.2-0.5$
ε	эффект препарата на блокирование выработки новых вирусов	$0.99934-1$

На рис. 1 приведена диаграмма базовой модели динамики вируса. Эта модель определяет взаимодействие между клетками печени и вирусом [7].

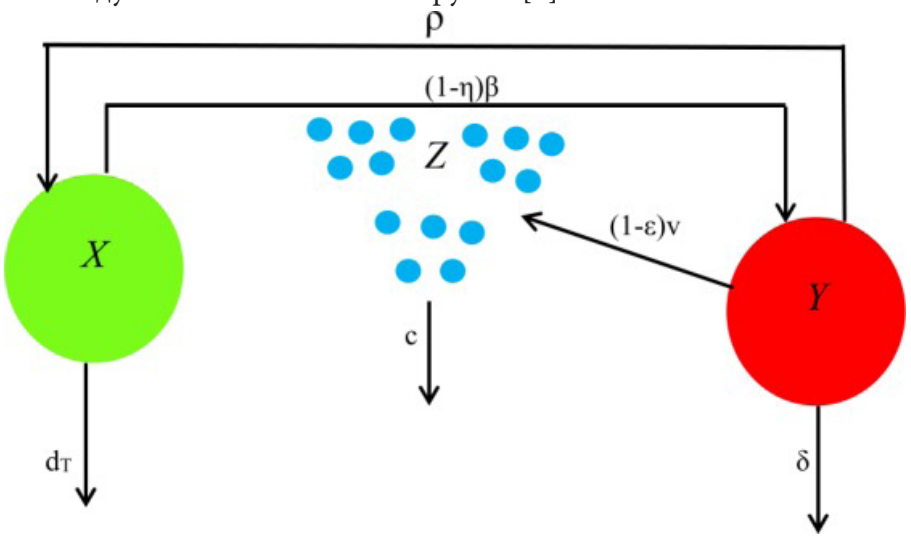


Рис. 1. Диаграмма базовой модели динамики вируса

2. Математическое решение уравнений модели с помощью метода сеток

Суть метода конечных разностей (метода сеток) состоит в замене исходной задачи математической физики ее дискретным аналогом — разностной схемой, а также последующим применением специальных алгоритмов решения дискретной задачи.

Будет применен метод сеток для преобразования уравнений в линейные. В нем известно значение на предыдущем шаге, благодаря чему, возможно вычисление значения на последующем шаге.

Сначала происходит деление отрезка разбиения на части одинаковой длины. Это создает узлы сетки, в которых будут определены значения искомой функции. Затем производные заменяются разностными отношениями. После этих действий система уравнений преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений. Зная значение функции в предыдущем узле и используя разностное уравнение, можно выразить значение функции в текущем узле, через известные значения. После нахождения значения в текущем узле, оно используется для вычисления в следующем узле. Данный процесс повторяется для всех узлов сетки.

Ниже представлены расчеты для каждого из уравнений системы (1):

1) $\dfrac{dX}{dt} = s - (1-\eta)\beta ZX - d_T X + \rho Y.$

$x(t_j)$ — точное значение, x_j — приближенное значение.

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{\tau} = \mu\left(s - (1-\eta)\beta z_j x_{j-1} - d_T x_{j-1} + \rho y_{j-1}\right) + (1-\mu)\left(s - (1-\eta)\beta z_{j-1} x_j - d_T x_j + \rho y_j\right) =$$

$$= -\mu\beta z_j x_{j-1} + \mu\eta\beta z_j x_{j-1} - \mu d_T x_{j-1} + \mu\rho y_{j-1} + s - \beta z_{j-1} x_j + \eta\beta z_{j-1} x_j - d_T x_j + \rho y_j +$$

$$+\mu\beta z_{j-1} x_j - \mu\eta\beta z_{j-1} x_j + \mu d_T x_j - \mu\rho y_j.$$

$$x_j\left(\frac{1}{\tau} + \beta z_{j-1} - \eta\beta z_{j-1} + d_T - \mu\beta z_{j-1} + \mu\eta\beta z_{j-1} - \mu d_T\right) + y_j\left(-\rho + \mu\rho\right) + z_j\left(\mu\beta x_{j-1} - \mu\eta\beta x_{j-1}\right) =$$

$$= \frac{x_{j-1}}{\tau} - \mu d_T x_{j-1} + \mu\rho y_{j-1} + s.$$

2) $\frac{dY}{dt} = (1-\eta)\beta ZX - \delta Y - \rho Y.$

$y(t_j)$ — точное значение, y_j — приближенное значение.

$$\frac{y_j - y_{j-1}}{\tau} = \mu\left((1-\eta)\beta z_{j-1}x_j - \delta y_{j-1} - \rho y_{j-1}\right) + (1-\mu)\left((1-\eta)\beta z_j x_{j-1} - \delta y_j - \rho y_j\right) \mu\beta z_{j-1}x_j -$$

$$-\mu\eta\beta z_{j-1}x_j - \mu\delta y_{j-1} - \mu\rho y_{j-1} + \beta z_j x_{j-1} - \eta\beta z_j x_{j-1} - \delta y_j - \rho y_j - \mu\beta z_j x_{j-1} + \mu\eta\beta z_j x_{j-1} + \mu\delta y_j +$$

$$+\mu\rho y_j.$$

$$y_j\left(\frac{1}{\tau} + \delta + \rho - \mu\delta - \mu\rho\right) + x_j\left(-\mu\beta z_{j-1} + \mu\eta\beta z_{j-1}\right) + z_j\left(-\beta x_{j-1} + \eta\beta x_{j-1} + \mu\beta x_{j-1} - \mu\eta\beta x_{j-1}\right) =$$

$$= \frac{y_{j-1}}{\tau} - \mu\delta y_{j-1} - \mu\rho y_{j-1}.$$

3) $\frac{dZ}{dt} = (1-\varepsilon)\nu Y - cZ.$

$z(t_j)$ — точное значение, z_j — приближенное значение.

$$\frac{z_j - z_{j-1}}{\tau} = \mu\left((1-\varepsilon)\nu y_{j-1} - cz_{j-1}\right) + (1-\mu)\left((1-\varepsilon)\nu y_j - cz_j\right) = \mu\nu y_{j-1} - \mu\varepsilon\nu y_{j-1} - \mu cz_{j-1} +$$

$$+\nu y_j - \varepsilon\nu y_j - cz_j - \mu\nu y_j + \mu\varepsilon\nu y_j + \mu cz_j.$$

$$z_j\left(\frac{1}{\tau} + c - \mu c\right) + y_j\left(-\nu + \varepsilon\nu + \mu\nu - \mu\varepsilon\nu\right) = \frac{z_{j-1}}{\tau} + \mu\nu y_{j-1} - \mu\varepsilon\nu y_{j-1} - \mu cz_{j-1}.$$

3. Компьютерное моделирования с помощью метода сеток

Система линейных алгебраических уравнений для компьютерной реализации модели выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} + \beta z_{j-1}\left(1-\eta+\mu(\eta-1)\right) + d_T(1-\mu) & \rho(\mu-1) & \mu\beta x_{j-1}(1-\eta) \\ \mu\beta z_{j-1}(\eta-1) & \frac{1}{\tau} + (1-\mu)(\delta+\rho) & \beta x_{j-1}\left(-1+\eta+\mu(1-\eta)\right) \\ 0 & \nu\left(-1+\varepsilon+\mu(1-\varepsilon)\right) & \frac{1}{\tau} + c(1-\mu) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x_{j-1}}{\tau} + s + \mu\left(-d_T x_{j-1} + \rho y_{j-1}\right) \\ y_{j-1}\left(\frac{1}{\tau} - \mu(\delta+\rho)\right) \\ z_{j-1}\left(\frac{1}{\tau} - \mu c\right) + \mu\nu y_{j-1}(1-\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

4. Применение модели к данным

В табл. 2 приведены значения, используемые при построении модели.

Полученные графики представлены на рис. 2–4.

Таблица 2

Выбранные значения параметров для моделирования

$X(0)$	$Y(0)$	$Z(0)$	s	η	β	d_T	ρ	δ	ε	ν	c
108	0.01	10	1	0.5	10-10	0.01	0	0.07	0.99934	100	0.67

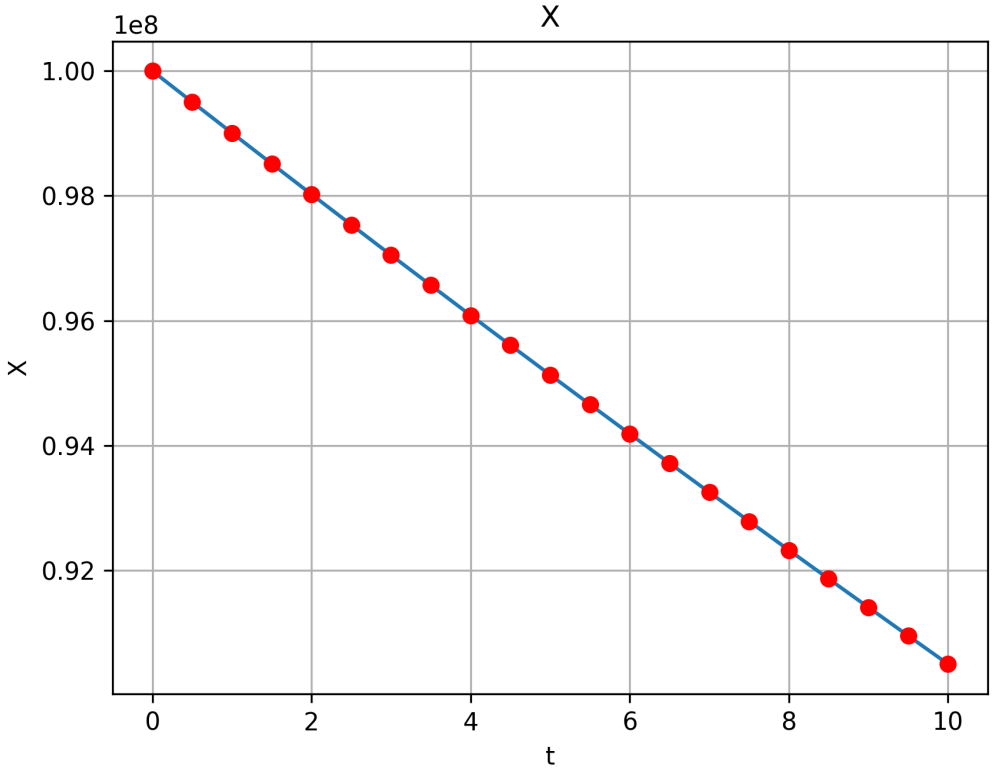


Рис. 2. График зависимости количества здоровых клеток от времени

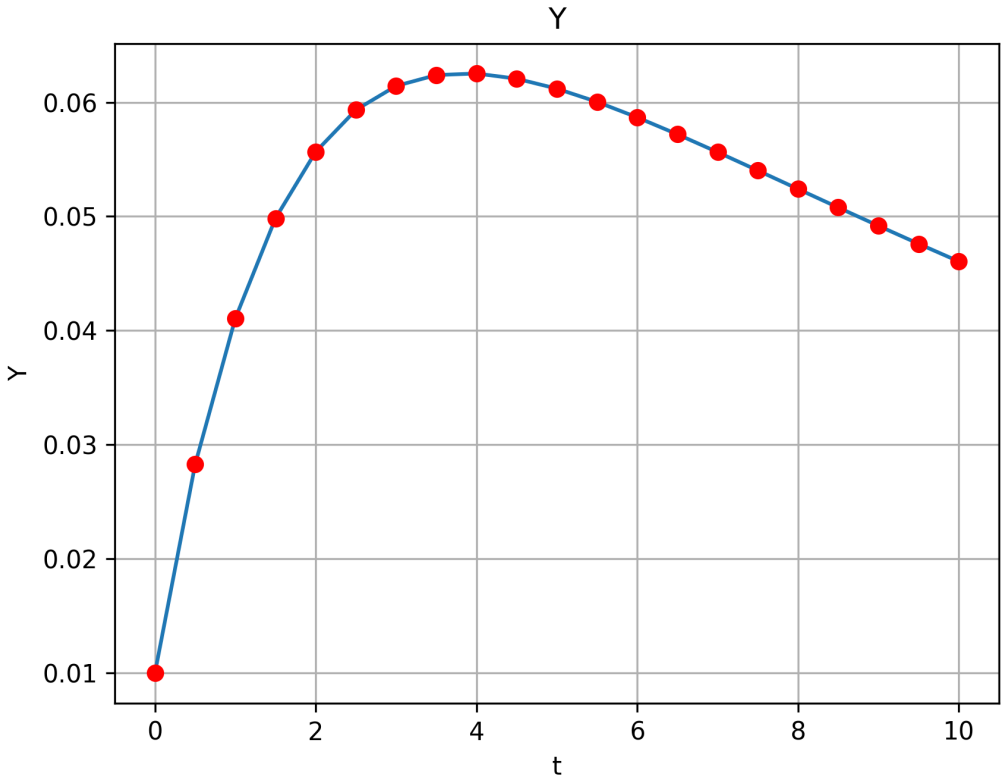


Рис. 3. График зависимости количества инфицированных клеток от времени

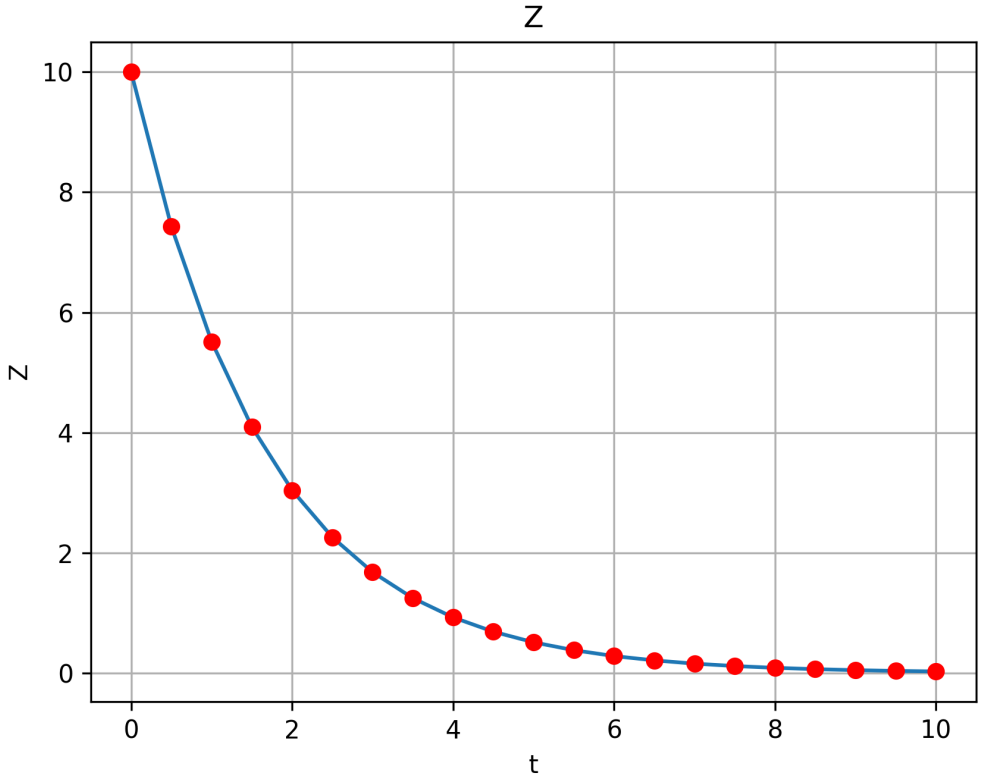


Рис. 4. График зависимости уровня вируса от времени

При значениях времени

t [0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8, 8.5, 9, 9.5, 10]

были получены значения:

X [100000000.000, 99502240.394, 99006958.443, 98514141.812, 98023778.230, 97535855.484, 97050361.424, 96567283.962, 96086611.067, 95608330.771, 95132431.163, 94658900.395, 94187726.674, 93718898.268, 93252403.502, 92788230.762, 92326368.488, 91866805.180, 91409529.395, 90954529.746, 90501794.904];

Y [0.010, 0.028, 0.041, 0.050, 0.056, 0.059, 0.061, 0.062, 0.063, 0.062, 0.061, 0.060, 0.059, 0.057, 0.056, 0.054, 0.052, 0.051, 0.049, 0.048, 0.046];

Z [10.000, 7.427, 5.516, 4.098, 3.044, 2.262, 1.681, 1.250, 0.930, 0.692, 0.516, 0.384, 0.287, 0.215, 0.161, 0.121, 0.091, 0.069, 0.052, 0.040, 0.031].

Заключение

Вследствие проведенного математического и компьютерного моделирования получены следующие результаты:

• количество здоровых клеток X уменьшается со временем из-за заражения клеток и их естественной смертности;

• количество инфицированных клеток Y растет в начале из-за заражения здоровых клеток, это длится до тех пор, пока количество здоровых клеток достаточно велико для поддержания процесса заражения. Через некоторое время происходит достижение пика, и после него наблюдается убывание так как происходит гибель и выздоровление инфицированных клеток;

• уровень вируса Z снижается со временем из-за уменьшения численности инфицированных клеток и механизмов разрушения вируса.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю Половинкину И. П. за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература

1. *Anderson R.* Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control / R. Anderson, R. May. – Oxford : OUP Oxford, 1991. – 757 p. – ISBN 9780198540403.

2. *Min L.* Analysis of a basic model of virus infection with application to HBV infection / L. Min, Y. Su, Y. Kuang // Rocky Mt. J. Math. – 2008. – Vol. 38. – P. 1573–1585.

3. *Yousfi N.* Modeling the adaptive immune response in HBV infection / N. Yousfi, K. Hattaf, A. Tridane // J. Math. Biol. – 2011. – Vol. 63. – P. 933–957.

4. *Fatehi F.* Mathematical model of immune response to hepatitis B / F. Fatehi, Y. Kyrychko, K. Blyuss // J. Theor. Biol. – 2018. – Vol. 447. – P. 98–110.

5. *Friedman A.* Chronic hepatitis B virus and liver fibrosis: a mathematical model / A. Friedman, N. Siewe // J. Infect. Dis. – 2018. – Vol. 217. – P. 1408–1416.

6. *Zou L.* An age-structured model for the transmission dynamics of hepatitis B / L. Zou, S. Ruan, W. Zhang // SIAM J. Appl. Math. – 2010. – Vol. 70. – P. 3121–3139.

7. *Liang P.* The independent impact of newborn hepatitis B vaccination on reducing HBV prevalence in China / P. Liang, J. Zu, J. Yin // The independent impact of newborn hepatitis B vaccination on reducing HBV prevalence in China, 1992–2006: a mathematical model analysis. – J. Theor. Biol. – 2015. – Vol. 386. – P. 115–121.

8. *Aniji M.* Approximate solutions for HBV infection with stability analysis using LHAM during antiviral therapy / M. Aniji, N. Kavitha, S. Balamuralitharan // SpringerOpen. – URL: https://boundaryvalueproblems.springeropen.com/articles/10.1186/s13661-020-01373-w (дата обращения: 30.10.2024).

УДК 004.056.55

ФОРМАЛЬНАЯ ВЕРИФИКАЦИИ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОТОКОЛОВ

Д. В. Филонов

Воронежский государственный университет

Аннотация. Работа посвящена вопросам верификации криптографических протоколов, направленных на защиту данных в цифровых системах. В статье будет проведена формальная верификация протокола SSH. Далее будет построена модель протокола безопасности, которую ProVerif будет принимать на вход и автоматически переводить процессы в систему дизъюнктов Хорна и используя алгоритм, основанный на свободном выборе дизъюнкта из доступного множества, определяет, является ли утверждение верным в заданной системе правил вывода. Результатом данной статьи должна стать проверка свойства конфиденциальности данных.

Ключевые слова: криптопротоколы, верификация, информационная безопасность, ProVerif, конфиденциальность, SSH, криптографические методы, автоматизация, формальный анализ, защита данных.

Введение

В современном мире стала возрастать потребность в разработке специализированных протоколов для обеспечения безопасности передачи данных и коммуникаций в сети. В данной работе рассматривается актуальность проведения верификации криптопротоколов, что представляет собой процесс проверки корректности работы протокола и его соответствия установленным стандартам безопасности. Верификация криптопротоколов играет важную роль в обеспечении защиты информации от утечек, несанкционированного доступа и других угроз. В данной статье будет проведена формальная верификация протокола SSH.

1. Актуальность проблемы

Развитие технологий и увеличение объёмов передаваемой информации создают потребность в надёжной защите данных и безопасной передаче конфиденциальной информации. Это стимулирует разработку специализированных криптографических протоколов, которые обеспечивают безопасность коммуникаций и предотвращают несанкционированный доступ. Верификация таких криптопротоколов, которая включает формальную проверку их корректности, становится важной задачей в условиях постоянных угроз безопасности и всё более сложных атак.

На практике верификация криптографических протоколов позволяет выявлять потенциальные уязвимости до их внедрения, что существенно повышает надёжность систем и минимизирует риск утечки данных и нарушения целостности информации. Современные подходы к верификации, такие как ProVerif, Scyther и FDR2, используют методы моделирования и формальные методы анализа, что позволяет разработчикам проверять ключевые свойства безопасности протоколов, включая конфиденциальность, целостность и аутентификацию.

Таким образом, в условиях растущих требований к безопасности информационных систем формальная верификация криптопротоколов становится одной из приоритетных задач в области защиты данных.

2. Постановка задачи

Проверка криптографических протоколов представляет собой важную задачу в области информационной безопасности. Для эффективного анализа криптографического протокола необходимо использовать специальные методы и инструменты, которые позволят проверить корректность его реализации и соблюдение заданных требований безопасности. В ходе исследования необходимо установить, насколько данный протокол обеспечивает конфиденциальность и защиту передаваемой информации, что важно для предотвращения утечек и защиты от потенциальных атак.

Существует несколько подходов к верификации, включающих формальные методы проверки и использование автоматизированных инструментов. В рамках данной работы применяются средства автоматической верификации, которые обеспечивают анализ основных свойств безопасности криптографических протоколов. ProVerif, выбранный для исследования, позволяет моделировать протокол и проводить проверку на соответствие критериям безопасности с использованием формальной модели. Основная цель работы — исследовать и подтвердить свойства безопасности протокола с акцентом на конфиденциальность данных.

Таким образом, работа направлена на моделирование и верификацию протокола с использованием инструментов автоматической верификации, которые помогают обнаруживать уязвимости и повышать безопасность криптографических систем.

3. Реализация задачи

Для проведения формальной верификации на основе хорновских выражений в приложении ProVerif необходимо построить модель, для начала стоит добавить ясности в терминологии.

Хорновские выражения в ProVerif — это способ представления криптографического протокола для его автоматической верификации.

В качестве верифицируемого криптопротокола будет выступать SSH, который используется для обеспечения безопасного обмена данными между клиентом и сервером. Модель будет включать в себя шифрование, создание подписей, аутентификацию, хэширование и другие функции, необходимые для обеспечения безопасности и конфиденциальности при обмене данными через канал связи.

Чтобы осуществить проверку свойства конфиденциальности данных или же секретности необходимо обратить внимание на следующие основные моменты в модели:

1. Переменная «secretC» определена как «free secretC: bitstring [private]», что означает, что это секретное значение типа «bitstring». Секретное значение типа bitstring - конфиденциальное или секретное информационное значение, представленное в виде последовательности битов (bitstring) в компьютерной системе или криптографическом протоколе. Это секретное значение обычно используется для шифрования, аутентификации или других целей безопасности для обеспечения конфиденциальности и целостности данных.

2. Запрос «query attacker(secretC)» используется для проверки наличия атаки на секретное значение «secretC». Этот запрос позволяет определить, существует ли возможность получения доступа к секретному значению «secretC» со стороны злоумышленника (рис. 1).

3. В процедурах «processClient» и «processServer» секретное значение «secretC» используется для отправки секретного сообщения в случае подключения к доверенному серверу. Если переменная «ServerVerKey» равна переменной «SVerKey», то секретное значение «secretC» отправляется по каналу связи.

Таким образом, в данном протоколе проверка секретности осуществляется путем определения секретного значения, проверки возможной атаки на это значение и использования секретного значения для отправки секретного сообщения при выполнении определенного условия.

```
(* Secrecy assumptions *)
free secretC: bitstring [private].
query attacker(secretC).
```

Рис.1. Запрос для проверки наличия атаки на секретное значение «secretC»

В данной модели использовался протокол SSH с криптографическим алгоритмом RSA (рис. 2).

```
(* RSA *)
const p: G.
const q: G.
const e: G.
const d: G.
const g: G.
fun rsa_enc(G, exponent): G.
equation forall x: exponent, y: exponent; rsa_enc(rsa_enc(g, x), y) = rsa_
enc(rsa_enc(g, y), x).
fun rsa_dec(G, exponent): G.
equation forall x: exponent, y: exponent; rsa_dec(rsa_dec(g, x), y) = rsa_
dec(rsa_dec(g, y), x).
```

Рис. 2. RSA Proverif в модели протокола SSH

4. Результат формальной верификации

В результате проверки криптографического протокола SSH с помощью инструмента ProVerif была подтверждена его устойчивость к несанкционированному доступу и конфиденциальность передаваемых данных. Одним из основных результатов анализа является подтверждение того, что ключевые свойства безопасности, такие как секретность данных, соблюдаются в соответствии с требованиями протокола.

На рис. 3 представлен вывод инструмента ProVerif, демонстрирующий успешную проверку конфиденциальности данных. В частности, строка «Query not attacker(secretC[]) is true» указывает на то, что в формальной модели протокола злоумышленник не получил доступ к переменной secretC. Это означает, что данные, обозначенные как secretC, остаются защищенными и недоступными для несанкционированного доступа.

```
Completing equations...
-- Process 1-- Query not attacker(secretC[]) in process 1
Translating the process into Horn clauses...
Completing...
ok, secrecy assumption verified: fact unreachable attacker(dhsecretC[!1 = v])
ok, secrecy assumption verified: fact unreachable attacker(dhsecretS[dhpublicC_1
= v, !1 = v_1])
ok, secrecy assumption verified: fact unreachable attacker(SSigKey([])
Starting query not attacker(secretC[ ])
RESULT not attacker(secretC[]) is true.

Verification summary:

Query not attacker(secretC[]) is true.
```

Рис. 3. Вывод ProVerif

На основании полученных данных можно сделать вывод, что исследуемый криптопротокол демонстрирует высокий уровень защиты передаваемых данных и эффективен в предотвращении возможных атак.

Заключение

По итогам данной работы была проведена формальная верификация протокола SSH. В результате проверки криптографического протокола SSH с помощью инструмента ProVerif была подтверждена его устойчивость к несанкционированному доступу и конфиденциальность передаваемых данных. Одним из основных результатов анализа является подтверждение того, что ключевые свойства безопасности, такие как секретность данных, соблюдаются в соответствии с требованиями протокола.

Литература

1. Формальная верификация криптографических протоколов. – URL: https://wiki2.org/ru/Формальная_верификация_криптографических_протоколов#Методы_формальной_верификации[4] (дата обращения: 26.03.2024).

2. Криптографические примитивы. – URL: https://wiki2.org/ru/Криптографический_примитив (дата обращения: 13.04.2024).

3. ProVerif 2.05:Automatic Cryptographic Protocol Verifier,User Manual and Tutorial. – URL: https://bblanche.gitlabpages.inria.fr/proverif/manual.pdf (дата обращения: 20.04.2024).

4. Automatic Verification of Security Protocols in the Symbolic Model: the Verifier ProVerif. — URL: https://bblanche.gitlabpages.inria.fr/proverif/publications/BlanchetFOSAD14.pdf (дата обращения:23.04.2024).

УДК 539.4, 519.6

АНИЗОТРОПНЫЕ ЛИНЕЙНО УПРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ РЕШЕНИЯ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

М. А. Фомченкова

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва

Аннотация. Данная работа сосредоточена на ключевых аспектах механики разрушения, касающихся конструкционных композитов, обладающих анизотропными механическими свойствами. Основное внимание уделяется анализу напряжений и деформаций в ортотропных материалах с дефектами. Представлено асимптотическое разложение полей напряжений, деформаций и перемещений в анизотропных материалах, которое расширяет решение Уильямса, изначально разработанное для линейно упругих изотропных материалов. Исследование сочетает два методологических подхода: классическую теорию комплексных переменных и метод конечных элементов.

Ключевые слова: асимптотическое решение, переопределенный метод, ортотропные материалы, анализ напряжений и деформаций, механика разрушения, теория комплексных переменных, метод конечных элементов, анизотропные среды, поля напряжений у вершины трещины, анизотропные упругие материалы.

Введение

Анализ причин возникновения дефектов и трещин, а также закономерностей их развития в анизотропных хрупких материалах представляет собой ключевую задачу для оценки прочности и долговечности конструкций. В связи с этим критически важно и актуально определить напряжения, связанные с кончиком трещины, поскольку существующие критерии разрушения основываются на полях напряжений и деформаций в непосредственной близости к дефекту, что может существенно повлиять на определение траектории распространения трещины. В работе [1] были получены асимптотические разложения полей напряжений, перемещений и деформаций в окрестности вершины трещины в бесконечной пластине, содержащей центральную трещину, выполненной из ортотропного материала. Данное асимптотическое решение включает слагаемые высоких порядков, что позволяет осуществлять более точную и всеобъемлющую оценку поля напряжений на значительных расстояниях от вершины трещины, тем самым значительно расширяя область применимости асимптотического решения. В настоящем исследовании предлагается метод, позволяющий построить асимптотические разложения для конечных тел с дефектами и сравнить его с точным численным решением, полученным из конечно-элементного пакета Simulia Abaqus. Метод конечных элементов, в свою очередь, позволяет находить решения для сложных геометрических конфигураций с трещинами под различными механическими нагрузками. Также рассмотрены графики асимптотического решения в полярных системах координат, которые позволяют предположить направление распространения роста трещины.

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим пластину с центральной трещиной, находящуюся в условиях плоского напряженного состояния, в анизотропном материале. На пластину воздействует растягивающая нагрузка величиной $\sigma = 100$ Па. Угол α представляет собой угол между трещиной и приложенной нагрузкой, в то время как угол β обозначает угол между трещиной и осью симметрии

материала. На рис. 1 приведена схема пластины с трещиной в анизотропном материале. В качестве примера ортотропного материала выбран материал AgF_2.

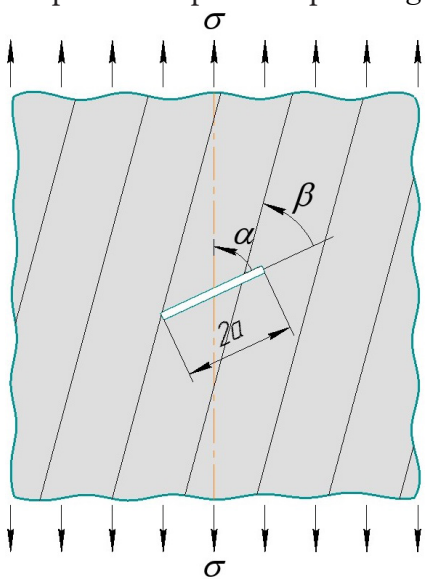


Рис. 1. Схема пластины с трещиной в анизотропном материале

Аналитическое приближенное представление компонентов тензора напряжений для ортотропного материала имеет следующую форму:

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{pmatrix} = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1-\mu_2} r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} \mu_2^2\mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2\mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ \mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ -\left(\mu_2\mu_1^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1\mu_2^{\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1}\right) \end{bmatrix}\right) +$$

$$+2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1-\mu_2} r^{\frac{n}{2}-1} \begin{bmatrix} \mu_2^2\mu_1^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1^2\mu_2^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ \mu_1^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_2^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} \\ -\left(\mu_2\mu_1^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_2\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1} - \mu_1\mu_2^{\frac{(-1)^{n}+1}{2}}(\cos\theta+\mu_1\sin\theta)^{\frac{n}{2}-1}\right) \end{bmatrix}\right), \quad (1)$$

где μ_1, μ_2 — корни характеристического уравнения; r, θ — полярные координаты; A_n, B_n — амплитудные коэффициенты асимптотических полей трещины анизотропного материала.

На практике используется усечённый ряд (1), в котором в настоящее время сохраняются высшие приближения [2–8], поскольку высшие слагаемые оказывают значительное влияние на полное описание полей в окрестности вершины трещины. В связи с этим возникает вопрос о том, какое количество слагаемых следует учитывать в асимптотических представлениях (1).

2. Конечно-элементное решение задачи о нагружении пластины с горизонтальной трещиной в анизотропном материале и его анализ

Метод конечных элементов представляет собой численный подход к решению дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений, возникающих при

анализе задач прикладной физики. В целях решения различных задач, связанных с механикой твердого деформируемого тела, теплообменом, гидродинамикой, электродинамикой и топологической оптимизацией, применяется данный метод. В процессе формулирования задачи происходит ее упрощение, в последующем компьютер производит расчеты и выдает результат. Это позволяет трактовать полученные результаты как точные численные решения. На рис. 2 показаны напряжения и интенсивность напряжений при $\alpha = 90,\ \beta = 0$, в конечно-элементном пакете Simulia Abaqus.

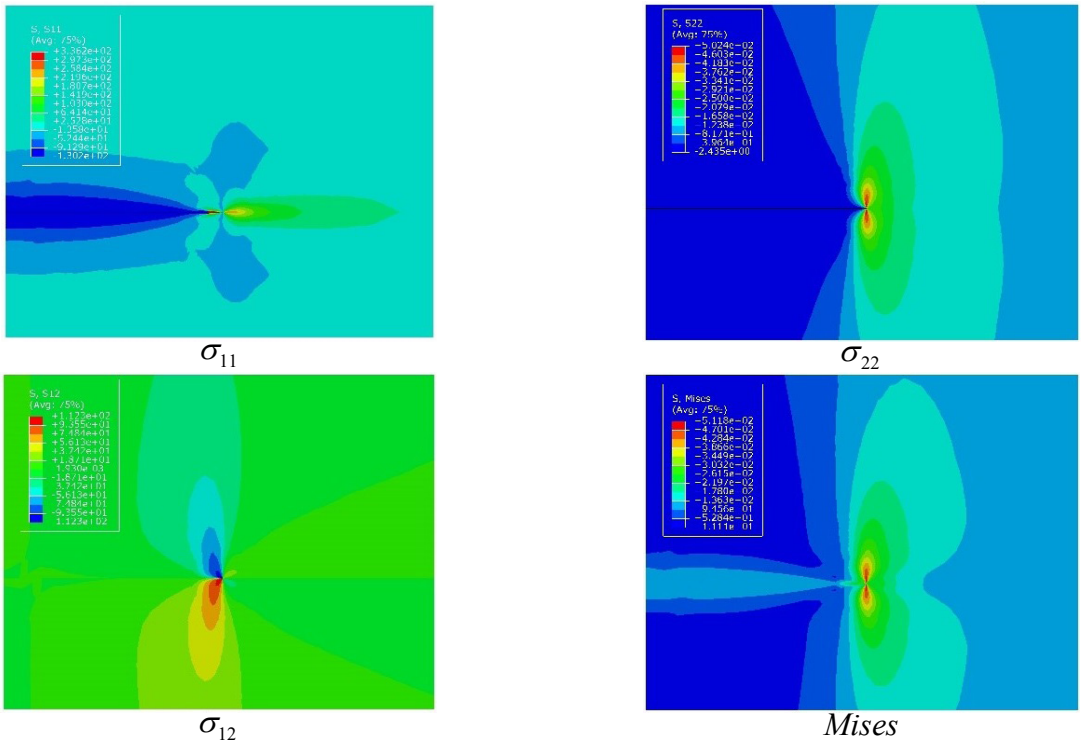


Рис. 2. Напряжения и интенсивность напряжений при $\alpha = 90,\ \beta = 0$

На рис. 3 изображены кривые угловых распределений компонент тензора напряжений, построенные при помощи асимптотического решения с удержанием разного числа слагаемых ряда.

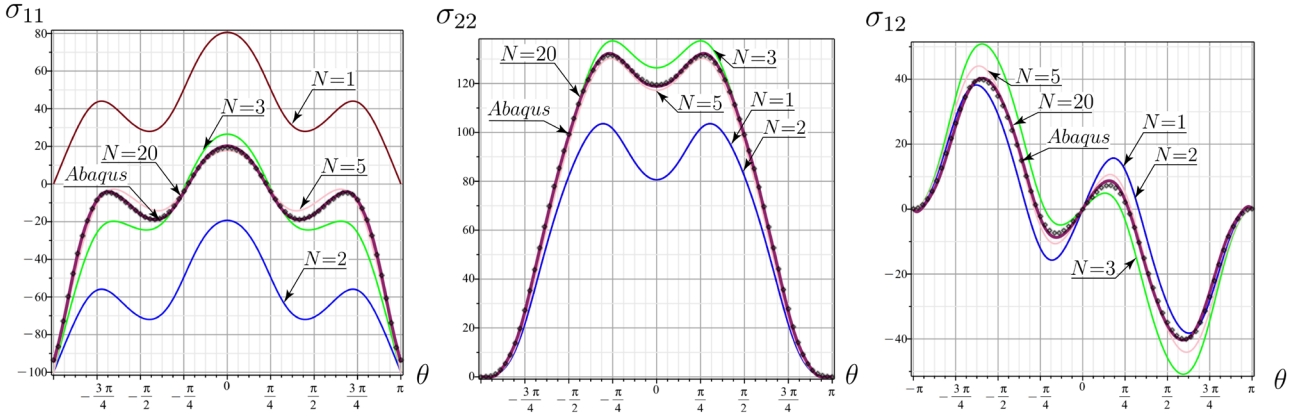


Рис. 3. Кривые угловых распределений компонент тензора напряжений

При сравнении двух решений, можно сделать вывод о том, что минимальная разница в погрешности достигается при удержании количества слагаемых $N = 20$.

Как показано на рис. 4, угловые распределения компонент тензора напряжений в полярных координатах имеют вид:

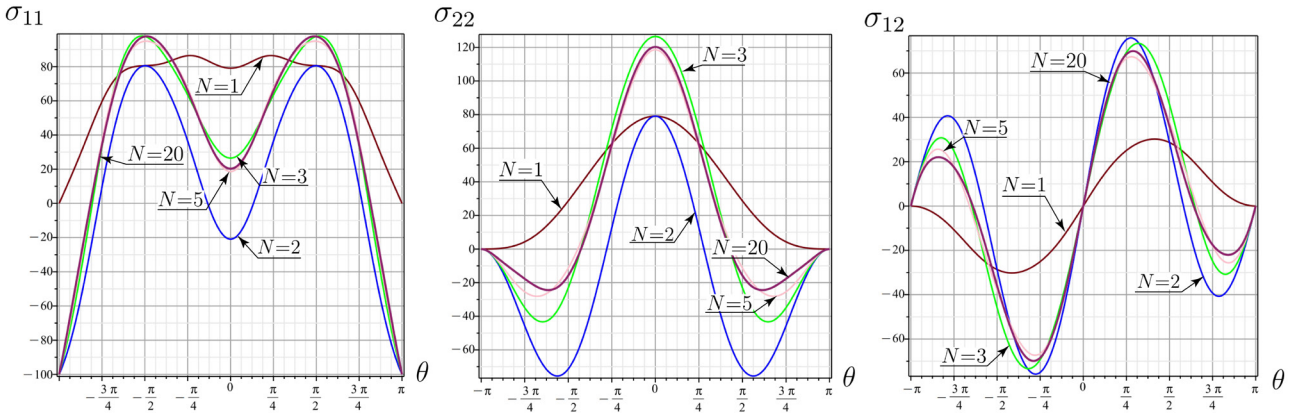


Рис. 4. Угловые распределения компонент тензора напряжений в полярных координатах

Заключение

В работе проведен анализ точности усеченных асимптотических разложений, которые обобщают представление М. Уильямса для механических полей вблизи трещин в анизотропных средах. Рассмотрены различные варианты усечения асимптотических решений и оценено влияние этого усечения на точность представления механических величин.

Показано сравнение точного численного решения, полученного с помощью конечно-элементного пакета Simulia Abaqus, с асимптотическим решением, удерживающим нерегулярные слагаемые.

Проделанное исследование подтверждает важность учета высших слагаемых асимптотического разложения в анизотропных средах, указывая на то, что включение большего числа членов ряда расширяет область, где асимптотическое решение остается достоверным. Учет высших порядков в асимптотическом разложении приводит к более точному представлению напряжений и перемещений вблизи окрестности трещины.

Литература

1. *Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M. R.* Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 91. – P. 837–862. https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025.

2. *Hello G.* On the loci of exactness for truncated Williams crack-tip stress expansions// International Journal of Fracture. – 2024. https://doi.org/10.1007/s10704-024-00802-6.

3. *Фомченкова М. А., Степанова Л. В.* Процедура переопределенного метода нахождения коэффициентов разложения полей у вершины трещины, основанная на конечно-элементном решении для компонент тензора напряжения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2024. – Т. 30, № 2. – С. 54–66. DOI 10.18287/2541-7525-2024-30-2-54-66.

4. *Жаббаров Р. М.* Сравнительный анализ полей напряжений у вершины трещины и боковых надрезов, полученных с помощью усеченных разложений Уильямса / Р. М. Жаббаров, Л. В. Степанова // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2021. – Т. 27, № 4. – С. 30–67. – DOI 10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67.

5. *Степанова Л. В.* Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть II / Л. В. Степанова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 1. – С. 72–85. – DOI 10.15593/perm.mech/2021.1.08.

6. *Степанова Л. В.* Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть I / Л. В. Степанова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 4. – С. 237–249. – DOI 10.15593/perm.mech/2020.4.20.

7. *Ayatollahi M. R., Nejati M., Ghouli S.* Crack tip fields in anisotropic planes: a review// International Journal of Fracture. – 2022. – Vol. 234. – P. 113-139. https://doi.org/10/01007/s10704-021-00559-2.

8. *Shi L., Oyadiji S. O.* Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D-DIC and finite element over-deterministic methods// Engineering Fracture Mechanics. – 2024. – Vol. 296. – 109852. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109852.

УДК 681.3

ВЫЯВЛЕНИЕ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАДАРНЫХ СИСТЕМ, ОСНОВАННЫХ НА ПРОГРАММНО-ОПРЕДЕЛЯЕМОМ РАДИО

М. Ю. Шевцов

Воронежский государственный университет

Аннотация. В данной статье обсуждается проблема выявления беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) с использованием радарных систем на базе программно-определяемого радио (ПОР). Задача обнаружения дронов сложна, поскольку они характеризуются слабой радиосигнатурой и низким уровнем радиолокационного отражения. БПЛА обладают рядом преимуществ, включая их экономичность в эксплуатации, способность длительно находиться в воздухе. Эти особенности делают беспилотники идеальным, незаметным и доступным средством для различных групп, включая как государственные, так и негосударственные структуры. Эффективные методы их обнаружения включают радарные системы, использующие доплеровский сдвиг для идентификации движущихся объектов, а интеграция ПОР способствует повышению гибкости и снижению затрат на такие системы.

Ключевые слова: эффект Доплера, программно-определяемое радио, БПЛА, программно-определяемая радарная система.

Введение

Первое значительное применение беспилотников в боевых действиях произошло во время войны в Персидском заливе, когда США использовали дрон «Predator» для эффективного наблюдения и ударов по целям. После этой войны беспилотники стали все чаще использоваться в военных операциях. Они активно применялись коалицией под руководством Саудовской Аравии в гражданской войне в Йемене, начавшейся в 2015 году, для нанесения ударов по объектам, принадлежащим повстанцам Хути.

Первая террористическая акция с использованием массированного налета БПЛА была осуществлена в секторе РС Пура в Джамму и Кашмире в 2022 году, где помимо средств нападения, БПЛА использовались для контрабанды оружия и наркотиков на равнинах Пенджаба. По данным пограничных сил безопасности Сил пограничной безопасности (СББ), с 1 января 2022 года на индийско-пакистанской границе в Пенджабе было зафиксировано 254 вторжения беспилотников. 1 января 2022 года, что в четыре раза больше, чем 67 вторжений беспилотников, о которых сообщалось в 2021 году. Большинство из этих было зафиксировано в пограничных районах Тарн Таран, Фазилка и Амритсар. Атаки осуществлялись роями БПЛА в составе от 5 до 60 аппаратов одновременно.

Тактикам использования БПЛА во время боевых действий еще не дана полная аналитическая оценка, однако, с развитием технологий на основе сверхбольших интегральных схем (СБИС) нет стало очевидно, что беспилотники являются мощным оружием, которое окажет значительное влияние на военные конфликты ближайшего времени. Таким образом, обнаружение беспилотников является актуальной задачей, чтобы предотвратить использование БПЛА в качестве оружия, которое наносящего ущерб вооруженным силам.

1. Основы радиолокации

– Основы развития радиолокации были заложены Генрихом Герцем в 1886 году. Однако первая практическая радарная система была изобретена только в 1935 году британским фи-

зиком Робертом Уотсоном-Уаттом. Радар широко использовался британскими военными во время Второй мировой войны для обнаружения и отслеживания вражеских самолетов и кораблей. Он также использовался военными США и других стран-союзников и сыграл решающую роль в победе союзников во время войны.

– Радар — это аббревиатура от Radio Detection and Ranging System, которая использует радиоволны для определения расстояния, угла и скорости объектов. Это активный датчик, то есть он излучает собственную энергию для обнаружения объектов. Радарные системы обычно состоят из передатчика, антенны, приемника и процессора. Передатчик посылает импульс радиоволн, которые отражаются от объекта и возвращаются через антенную систему в приемник. Приемник измеряет время, необходимое для прохождения волн до объекта и обратно. Эта информация используется для расчета расстояния до объекта.

2. Эффект Доплера

Эффект Доплера — это кажущееся изменение частоты волны по отношению к наблюдателю, движущемуся относительно источника волны. Возникает потому, что гребни волн, испускаемых источником, располагаются ближе друг к другу, когда источник движется к наблюдателю, и дальше друг от друга, когда источник удаляется от наблюдателя. Это происходит потому, что источник излучает волны с постоянной скоростью, а наблюдатель движется относительно источника. Эффект Доплера используется для расчета дальности от передатчика до летящего объекта.

– Формула для эффекта Доплера выглядит следующим образом:

$$f' = f\frac{v+u}{v-u}, \tag{1}$$

где f' — наблюдаемая частота, f — излучаемая частота, v — скорость волны, u — скорость наблюдателя, относительно источника.

В радарных системах есть возможность рассчитывать скорость объекта с помощью частоты биений. Частота биений — это разница между частотами двух волн (частота, на которой волны интерферируют друг с другом и создают заметный сигнал).

Частоту биений можно наблюдать, при взаимодействии двух волн с немного разными частотами. Например, если смешать две волны с частотами 100 Гц и 102 Гц, частота биений составит 2 Гц. Это означает, что волны будут интерферировать друг с другом дважды в секунду.

Данный эффект можно наблюдать на рис. 1.

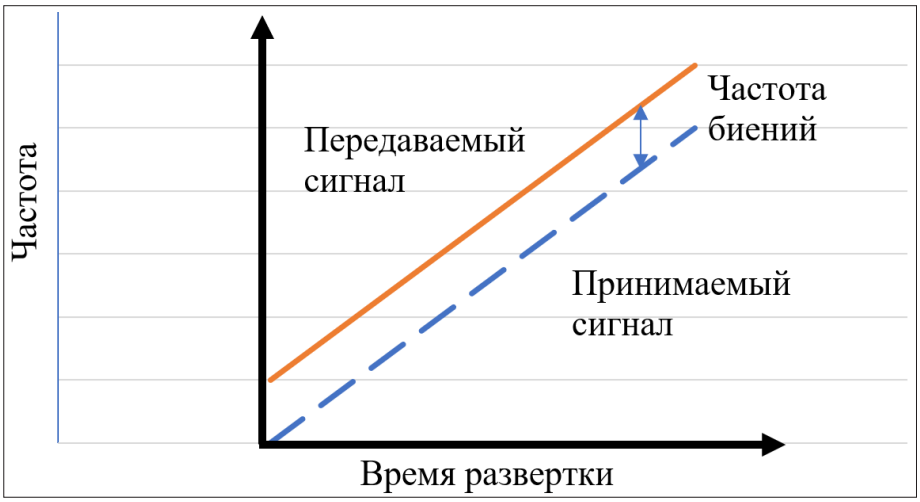


Рис. 1. Демонстрация эффекта частоты биений

Вычисление скорости v может быть выполнено с помощью частоты биений:

$$v = f\frac{b}{c}, \tag{2}$$

где f — частота передатчика, b — частота биений и c — скорость света.

3. Программно-определяемое радио как радар

– Программно-определяемые радиостанции — это системы передатчиков-приемников, которые работают, в основном, с программным обеспечением радиостанций. Они используют только базовое оборудование, которое должно работать в радиочастотной цепи и распространять сигнал. Типичная архитектура SDR состоит из двух основных компонентов: переднего радиоузла (RFE) и цифрового заднего узла. RFE включает в себя функции приемника (Rx) и передатчика (Tx) и работает в широком диапазоне настройки, обычно от постоянного тока до 18 ГГц. Мгновенная полоса пропускания также важна для определения мгновенно идентифицируемого спектра.

– Функции обработки данных радиостанции могут быть перепрограммированы и настроены без необходимости модификации оборудования. Таким образом, одно устройство может быть полностью перепрограммировано для выполнения другой функции без замены компонентов.

– Архитектура на основе ПЛИС позволяет полностью переконфигурировать и модернизировать SDR для поддержки новейших радиопротоколов и алгоритмов ЦОС, что значительно продлевает срок службы радиооборудования. SDR также содержат несколько независимых радиочастотных каналов с выделенными аналого-цифровыми и цифро-аналоговыми преобразователями (АЦП/ЦАП).

– Многоканальный режим работы в сочетании с параллельными вычислительными возможностями ПЛИС обеспечивает одновременную передачу и прием нескольких сигналов с очень низкой задержкой, сохраняя при этом фазовую когерентность и стабильность.

4. Среда разработки «GNU Radio»

Для реализации функциональности программно-определяемого радио (SDR) основой служит GNU Radio. Эта платформа предлагает библиотеки, которые можно использовать для создания различных компонентов SDR.

GNU Radio — это инструмент разработки ПО с открытым исходным кодом, который предоставляет набор сигнальных компонентов для реализации программно-определяемого радио и различных функций обработки сигналов. Он может использоваться как в сочетании с радиочастотным оборудованием, так и в программной среде, аналогичной моделированию, для создания программно-определяемых радиостанций. Этот инструмент находит широкое применение в любительском, академическом и коммерческом секторах, поддерживая научные исследования в области связи и позволяя публиковать реальные данные.

5. Алгоритм реализации радара Доплера с помощью SDR-систем

Для реализации Доплеровского радара с помощью SDR (Software Defined Radio) основное внимание сосредоточено на обработке сигнала, которая включает анализ частоты отражённого сигнала для вычисления скорости цели. Математическая основа алгоритма состоит в применении эффекта Доплера, который проявляется в изменении частоты сигнала при движении источника или приёмника относительно отражающего объекта.

Основные шаги алгоритма:

1. Передача радиочастотного сигнала

Передатчик радара отправляет непрерывный радиочастотный сигнал на заданной несущей частоте f_0. В идеале используется простая синусоидальная волна:

$$s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi), \tag{3}$$

где A — амплитуда, ϕ — фаза сигнала, f_0 — частота передаваемого сигнала.

2. Отражение сигнала от движущегося объекта

Когда сигнал встречает движущийся объект, он отражается и возвращается к приёмнику радара с изменённой частотой из-за Доплеровского эффекта. Если объект приближается, частота увеличивается, если удаляется — уменьшается.

Формула изменения частоты:

$$f_d = \frac{2v}{\lambda}, \tag{4}$$

где f_d — доплеровский сдвиг частоты, v — скорость объекта относительно радара, λ — длина волны передаваемого сигнала, связанная с частотой f_0 через $\lambda = c / f_0$, c — скорость света.

3. Приём отражённого сигнала

Отражённый сигнал на приёмнике будет выглядеть как:

$$r(t) = A\cos(2\pi(f_0 + f_d)t + \phi), \tag{5}$$

где f_d — доплеровский сдвиг, добавленный к исходной частоте f_0.

4. Частотный анализ и вычисление доплеровского сдвига

Для того чтобы вычислить скорость объекта, необходимо извлечь f_d из принятого сигнала. Это достигается с помощью гетеродинирования и быстрого преобразования Фурье (БПФ).

1.1. Гетеродинирование. Принятый сигнал умножается на синусоидальную волну с частотой f_0 для смещения частоты на более низкий диапазон:

$$s_{mix}(t) = r(t)\cos(2\pi f_0 t). \tag{6}$$

Получаем:

$$s_{mix}(t) = \frac{A}{2}[\cos(2\pi f_d t) + \cos(2\pi(2f_0 + f_d)t)]. \tag{7}$$

Здесь остаются компоненты на частотах f_d и $2f_0 + f_d$, но интересует только низкочастотная компонента $\cos(2\pi f_d t)$.

1.2. Фильтрация. Высокочастотная компонента $2f_0 + f_d$ фильтруется с помощью низкочастотного фильтра.

1.3. Преобразование Фурье. Теперь для извлечения f_d можно применить БПФ к $s_{mix}(t)$, чтобы преобразовать сигнал из временной области в частотную и найти пиковую частоту, которая будет соответствовать f_d.

5. Вычисление скорости объекта

Из найденного значения f_d вычисляем скорость объекта:

$$v = \frac{f_d \lambda}{2}. \tag{8}$$

6. Реализация алгоритма

В качестве аппаратной платформы были использованы два полудуплексных SDR-трансивера HackRF (первый — в качестве приемника, второй — передатчика).

На стороне приёма необходимо настроить параметры выборки, чтобы анализировать частоты в нужном диапазоне.

Обработка сигнала осуществлялась с помощью таких библиотек, как NumPy и SciPy для Python или аналогичных инструментов для других языков.

Таким образом, алгоритм построен вокруг улавливания доплеровского сдвига и использования математических преобразований для извлечения информации о скорости цели.

Реализация допплеровского радара на SDR-трансиверах состоит из нескольких секций со следующей структурой:

1. Настройки HackRF. Устройства настраиваются на одинаковую частоту передачи и приёма. В примере используется частота 2.4 ГГц.

– Передатчик передаёт синусоидальный сигнал с частотой 2.4 ГГц.

– Приёмник принимает отражённый сигнал.

2. Генерация передаваемого сигнала. Функция «generate_tx_signa»l создаёт синусоидальный сигнал, который будет передаваться в эфир.

3. Приём сигнала. Данные от приёмника HackRF собираются в цикле на протяжении заданного времени «DURATION».

4. Обработка сигнала:

– Сначала принятый сигнал умножается на исходный для снижения частоты (гетеродинирование).

– Затем применяется фильтрация с помощью «Butterworth» фильтра, чтобы удалить высокочастотные компоненты.

– Используется БПФ для анализа частотного спектра и определения пиковой частоты, которая соответствует доплеровскому сдвигу.

5. Расчёт скорости. Из частоты пика спектра вычисляется доплеровский сдвиг, а затем скорость объекта.

Библиотеки и зависимости:

– Pyhackrf — для работы с устройствами HackRF.

– NumPy — для генерации и обработки сигналов.

– SciPy — для фильтрации и преобразования Фурье.

7. Расчетные оценки точности определения высоты и скорости

Оценки точности определения скорости и высоты для Доплеровского радара, построенного на базе SDR (например, HackRF), зависят от нескольких факторов, таких как частота сигнала, ширина полосы частот, разрешение системы, а также качество обработки сигнала. Ниже приведены оценки точности для скорости и высоты в условиях применения системы с HackRF.

Точность определения скорости с помощью Доплеровского радара зависит от точности измерения доплеровского сдвига частоты (8). Для частоты $f_0 = 2.4$ (частота, часто используемая в SDR) длина волны:

$$\lambda = \frac{3\times10^8}{2.4\times10^9} \approx 0{,}125 \text{ м}. \tag{9}$$

Если система способна измерить доплеровский сдвиг с точностью Δf_d порядка 10 Гц (зависит от разрешающей способности по частоте БПФ), это даст точность определения скорости:

$$\Delta v = \frac{\Delta f_d \lambda}{2} = \frac{10\times0{,}125}{2} \approx 0{,}625 \text{ м/с}. \tag{10}$$

Таким образом, для радара на базе HackRF, работающего на частоте 2.4 ГГц, при разрешении 10 Гц по частоте доплеровского сдвига, точность измерения скорости будет порядка 0.6 м/с.

Доплеровский радар непосредственно не измеряет высоту цели, однако есть несколько косвенных способов оценки высоты, основываясь на моделях траектории движения и угло-

вом положении радара относительно цели. Для этого может использоваться многочастотная система или радар с фазированной антенной решёткой, что позволяет определять не только скорость, но и траекторию движения, включая высоту.

Без дополнительных сенсоров или механизмов треангуляции, можно сделать только приблизительную оценку высоты на основе изменения скорости, если известен угол приближения объекта (например, если БПЛА движется под известным углом к радару).

Оценка высоты с использованием радиолокационного триангулирования:

$$h = R\sin(\theta), \tag{11}$$

где θ — угол возвышения, который можно оценить с помощью фазированной антенной решётки или геометрических методов, R — расстояние до цели, которое может быть определено по времени задержки сигнала.

Таким образом, точность определения скорости для Доплеровского радара с использованием HackRF и частоты 2.4 ГГц может составлять около 0.6 м/с при хороших условиях и разрешении по частоте около 10 Гц. Более высокая частота передачи сигнала и улучшенные методы обработки могут повысить точность. Однако, точность определения высоты ограничена, если не используется дополнительное оборудование или методики триангуляции.

Заключение

Использование Доплеровского радара с SDR для обнаружения беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) предоставляет несколько ключевых преимуществ:

– Высокая чувствительность к движению. Доплеровский радар использует изменение частоты сигнала, вызванное движением объекта, что делает его особенно эффективным для обнаружения БПЛА, которые часто движутся на высоких скоростях. Изменение частоты отражённого сигнала позволяет точно определять скорость дрона, даже если он перемещается с относительно низкой радиальной скоростью.

– Точное определение скорости. Доплеровский радар способен не только обнаружить объект, но и измерить его скорость с высокой точностью. Для обнаружения БПЛА это особенно важно, так как скорость может использоваться для классификации летательного аппарата и отличия его от других движущихся объектов (например, птиц).

– Экономичность и гибкость SDR. Использование SDR-платформы (например, HackRF) позволяет создать гибкую и недорогую радарную систему. В отличие от специализированных аппаратных радаров, SDR можно легко перепрограммировать под различные задачи, включая разные частотные диапазоны и типы сигналов. Это даёт возможность адаптировать систему для различных условий и типов БПЛА.

– Широкий частотный диапазон. SDR может работать в широком диапазоне частот, что даёт возможность настраивать систему на различные частоты в зависимости от окружающих условий и типа обнаруживаемых объектов. Например, для обнаружения БПЛА можно выбрать частоты, которые минимизируют интерференцию от других источников радиосигналов.

– Масштабируемость. Систему на основе SDR можно легко масштабировать. Можно использовать несколько передатчиков и приёмников для создания многопозиционных систем наблюдения, что повышает точность определения положения и направления движения БПЛА.

– Обнаружение малых объектов. Доплеровские радары эффективны для обнаружения малых объектов, таких как БПЛА, благодаря их способности улавливать слабые изменения частоты отражённого сигнала. Это даёт возможность обнаруживать дроны, даже если они имеют небольшие размеры или летят на низких высотах.

– Многофункциональность. Такой радар может одновременно решать несколько задач, включая мониторинг скорости, направления и характеристик движения объектов. Это осо-

бенно полезно для систем наблюдения и безопасности, где необходимо не только обнаружение, но и отслеживание перемещающихся целей.

Таким образом, использование Доплеровского радара с SDR для обнаружения БПЛА сочетает в себе высокую точность, гибкость и экономичность. Такая система может быть адаптирована для различных условий эксплуатации, обладает высокой чувствительностью к движению, и её можно использовать в различных сценариях — от военных задач до гражданской безопасности и охраны периметров. Возможность масштабирования и программируемость SDR делает её особенно полезной для обнаружения малых и быстро перемещающихся целей, таких как дроны.

Литература

1. GNU Radio. – Режим доступа: https://gnuradio.org. – (Дата обращения: 12.10.2024).

2. Understanding the Doppler Effect in Radar Systems. – Режим доступа: https://example.com/doppler-effect-radar. – (Дата обращения: 12.10.2024).

3. How to Implement Software Defined Radio for Detection of Drones. – Режим доступа: https://example.com/sdr-detect-drones. – (Дата обращения: 12.10.2024).

4. Property Based Testing for JavaScript – An Introduction. – Режим доступа: https://example.com/property-testing-javascript. – (Дата обращения: 13.10.2024).

УДК 51-76+004.942

ВАРИАЦИЯ РЕЖИМОВ РОСТА БАКТЕРИАЛЬНЫХ КОЛОНИЙ В РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ: УЧЕТ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЭФФЕКТА ЗАПАЗДЫВАНИЯ

И. А. Шевкун[1], А. Г. Масловская[2]

[1]Амурский государственный университет
[2]Университет Иннополис

Аннотация. В работе рассматривается вариативность режимов при реализации модели роста бактериальных колоний на питательных средах. Математическая модель, описывающая концентрацию питания и концентрацию биомассы, формализована основе уравнений типа «реакция-диффузия» с учетом стохастических процессов роста паттернов и эффекта запаздывания. Проведен численный анализ четырех режимов эволюции бактериальных колоний: дендритного, «цветочного» ('flower-like'), гомогенного и комбинированного в зависимости от начальных условий и параметров модели. Проведено программное решение прикладной задачи с использованием неявного конечно-разностного метода. Результаты проиллюстрированы графическими примерами, демонстрирующими эволюцию бактериальных структур. Установлены наборы управляющих параметров, при которых формируются различные типы колоний, в том числе в режимах с запаздыванием.
Ключевые слова: бактериальный рост, питательная среда, уравнение «реакция-диффузия», эффект запаздывания, дендритные структуры, метод конечных разностей, математическая биология.

Введение

Моделирование эволюции бактериальных популяций на питательных средах имеет большое практическое значение в таких отраслях, как медицина (например, производство и изучение воздействия ингибиторов на бактериальные колонии), пищевая промышленность (как с точки зрения обеспечения безопасности продуктов, так и с точки зрения производства ферментированных продуктов) и др. Режимы роста бактериальных колоний зависят от многих факторов, таких как вид бактерии, температура, количество питания, доступ кислорода и др., и характеризуются образованием различных геометрических форм. Это затрудняет использование какой-либо одной модели для моделирования всех возможных режимов роста. В этой работе определяется диапазон применимости детерминированной модели на основе нелинейной системы уравнений в частных производных диффузионного типа к геометриям бактериальных колоний различного вида.

С биологической точки зрения моделируемый процесс представляет собой выращивание бактериальной колонии в чашке Петри на подложке с питательным веществом (например, агаром) [1, 2]. В чашку Петри добавляется подложка с агаром в определенной концентрации, после чего в центре производится точечный посев бактериальной колонии. Колония начинает потреблять питательное вещество и развиваться. Для моделирования этого процесса применяются различные подходы: детерминированные на основе обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, стохастические на основе метода Монте-Карло, дискретные на основе клеточных автоматов или агентных моделях и др. В фокусе наших исследований — детерминированный подход и базовая реакционно-диффузионная модель роста бактериальных культур, предложенная в [3], и позволяющая описать пространственно-временные зависимости концентраций биомассы и питательного субстрата. В цикле предшествующих работ [4, 5] численно проанализированы основные режимы и геометриче-

ские особенности формирования бактериальных колоний ветвящегося морфологического типа. Настоящее исследование проведено с целью установления специфики визуализации бактериальных паттернов в различных режимах на основе модифицированной реакционно-диффузионной модели при вариации начальных условий и параметров вычислительных экспериментов.

1. Постановка задачи

Базовая реакционно-диффузионная модель эволюции бактериальных паттернов [3] позволяет формализовать пространственно-временные распределения концентраций биомассы и питательного субстрата. Данная модель была модифицирована таким образом, чтобы учитывать время запаздывания между потреблением питания бактериями и ростом бактерий. Эффект запаздывания характерен для всех биологических процессов, и бактериальный рост — не исключение [6]. В нормированном виде модель включает следующую систему уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = \Delta n - bn, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = \nabla\left(\sigma n b \nabla b\right) + n\left(t-\alpha\right)b\left(t-\alpha\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $n(x,y,t)$ — концентрация питательного вещества; $b(x,y,t)$ — концентрация бактериальной массы; σ — параметр модели, характеризующий жесткость питательной подложки; α — величина запаздывания, $\alpha \geq 0$. Расчетная область для 2D модели и промежуток времени наблюдения процесса задаются как $\Omega = \{-L \leq x \leq L,\ -L \leq y \leq L,\ 0 \leq t \leq T\},\ L > 0,\ T > 0$.

Замкнем математическую постановку заданием начальных и граничных условий. Начальные условия задают постоянный уровень питания по всей расчетной области и точечный посев бактериальной колонии, формализуемый (в нашем случае) с помощью распределения Гаусса:

$$n\left(x,y,0\right) = n_0,\ b\left(x,y,0\right) = \beta_m \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{C^2}\right),\ -L \leq x \leq L, -L \leq y \leq L, \tag{2}$$

где n_0 — начальный уровень питательного вещества, β_m и C — параметры модели.

Для обеспечения корректности постановки математической задачи в условиях наличия эффекта запаздывания необходимо также задать историю процесса для значений $t \in [-\alpha, 0)$ следующим образом: концентрация питательных веществ n уже имеет уровень n_0, а бактериальная масса $b = 0$ — во всей расчетной области.

Граничные условия задают нулевой поток субстанций на границе:

$$\left.\frac{\partial n}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma} = 0,\ \left.\frac{\partial b}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\Gamma} = 0,\ 0 < t \leq T, \tag{3}$$

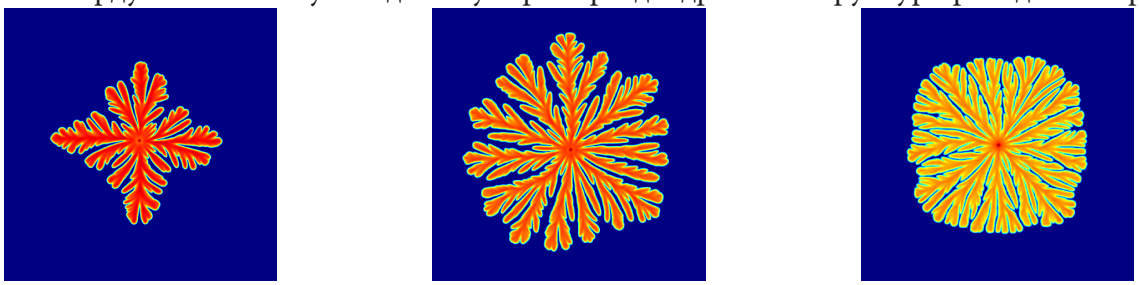
где Γ — граница расчетной области Ω, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе Γ.

2. Результаты вычислительных экспериментов

Поставленная задача (1)–(3) решалась методом конечных разностей с применением метода дробных шагов Яненко [7]. Получаемые на каждом шаге системы линейных уравнений решались методом прогонки. При моделировании использовались следующие значения и диапазоны параметров: $L = 250,\ T \in [1000, 10000],\ n_0 \in [0.1, 2],\ \beta_m = 0.71,\ C^2 = 6.25$. Параметр σ вычислялся по формуле $\sigma = \sigma_0(1+\delta)$, где $\sigma_0 \in [0.3, 4]$ — постоянный параметр, δ — случайная величина, отвечающая за формирование несимметричных форм, характерных для всех биологических систем. В нашем исследовании параметр δ вычислялся в каждом узле аппроксимации с помощью треугольного распределения в диапазоне $(-1,1)$. Реализация алгоритма была

выполнена в пакете прикладных программ MATLAB. В результате вычислительных экспериментов были проанализированы четыре режима роста бактериальной колонии.

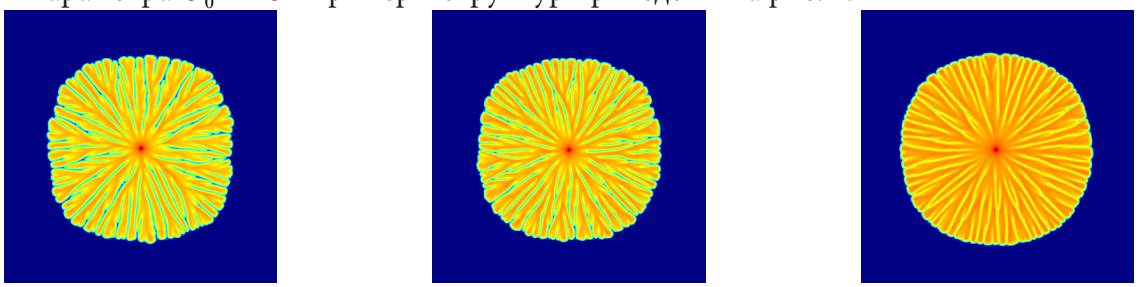
Дендритная геометрия с четкой дифференциацией ветвей. Первый режим роста характеризуется формированием дендритной структуры (ветвистый морфологический тип) с ярко выраженными изолированными ветвями. Такая геометрия образуется при относительно низком начальном питании $n_0 < 0.8$ и небольших значениях параметра $\sigma_0 < 1.5$, которые характеризуют более твердую питательную подложку. Примеры дендритных структур приведены на рис. 1.



(а) *(б)* *(в)*

Рис. 1. Дендритная геометрия:
(а) — $n_0 = 0.3, \sigma_0 = 0.8$, *(б)* — $n_0 = 0.5, \sigma_0 = 0.8$, *(в)* — $n_0 = 0.8, \sigma_0 = 0.8$

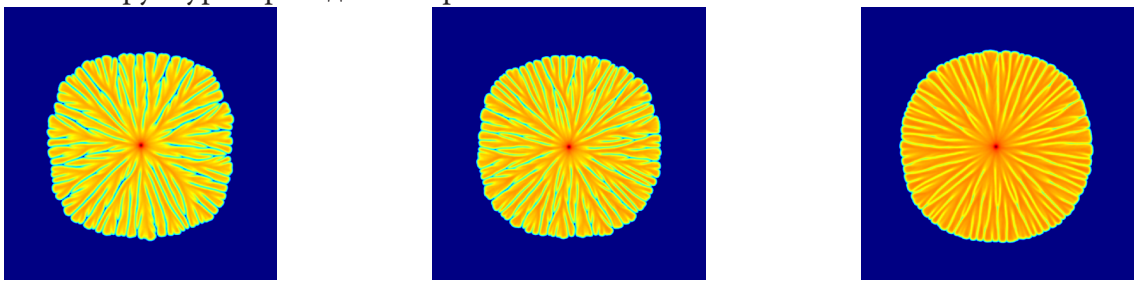
«Цветочная» геометрия. По мере увеличения уровня питания и/или значений параметра σ_0 ветви дендритной структуры «склеиваются» и происходит переход к цветочной (‘flower-like’) геометрии [8]. Такие паттерны образуются при параметрах, соответствующих средним значениям начального уровня питания $0.7 < n_0 < 1$, и также при относительно небольших значениях параметра $\sigma_0 < 1.5$. Примеры структур приведены на рис. 2.



(а) *(б)* *(в)*

Рис. 2. «Цветочная» геометрия:
(а) — $n_0 = 0.8, \sigma_0 = 1.2$, *(б)* — $n_0 = 0.85, \sigma_0 = 1.2$, *(в)* — $n_0 = 1, \sigma_0 = 1.2$

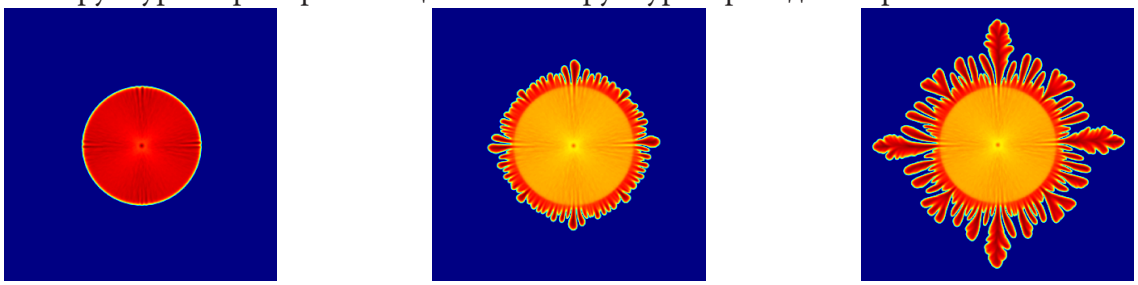
Гомогенная геометрия. При дальнейшем повышении уровня питания и/или значений параметра σ_0 происходит переход к гомогенной структуре, по форме напоминающей круг, с постепенным выравниванием границы колонии. Такая геометрия образуется при большом начальном питании $n_0 > 0.8$ и относительно больших значениях параметра $\sigma_0 > 1$. Примеры гомогенной структуры приведены на рис. 3.



(а) *(б)* *(в)*

Рис. 3. Гомогенная геометрия:
(а) — $n_0 = 1.5, \sigma_0 = 2, T = 65$, *(б)* — $n_0 = 1, \sigma_0 = 4, T = 90$, *(в)* — $n_0 = 2, \sigma_0 = 4, T = 27$

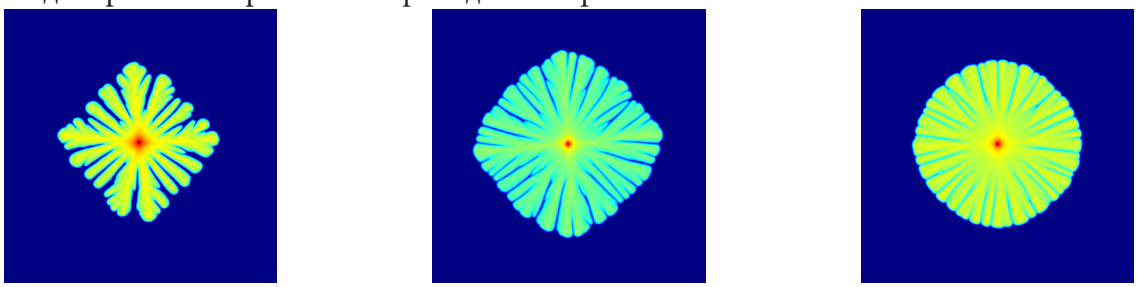
Комбинированная геометрия. При определенных небольших значениях параметра $\sigma_0 < 0.7$ также образуются комбинированные структуры, которые в начале своего роста сохраняют гомогенную геометрию, но с определенного момента переходят к образованию ветвистой дендритной структуры. Пример эволюции такой структуры приведен на рис. 4.



(а) *(б)* *(в)*

Рис. 4. Комбинированная геометрия: $n_0 = 0.5, \sigma_0 = 0.3$*;*
(а) — $T = 3000$*, (б) —* $T = 5000$*, (в) —* $T = 7500$

Влияния эффекта запаздывания на геометрию бактериальных паттернов. В работе также был проведен анализ влияния эффекта запаздывания на формируемую геометрию моделируемых бактериальных колоний. Все вычислительные эксперименты, результаты которых приведены выше, были также повторены с различными значениями величины запаздывания α в диапазоне от 0 до 40 ед. времени. В результате получены те же режимы роста с четырьмя типами геометрии. Однако за счет того, что при наличии эффекта запаздывания снижаются скорость роста и объем бактериальной массы, значения параметров n_0 и σ_0, при которых проявляется та или иная геометрия, отличаются в зависимости от значений параметра запаздывания α. Определение конкретных диапазонов параметров n_0 и σ_0 при различных значениях лага α требует дополнительных исследований и выходит за рамки данной работы. Примеры результатов моделирования при $\alpha = 10$ приведены на рис. 5.



(а) *(б)* *(в)*

Рис. 5. Результаты моделирования с эффектом запаздывания: $\alpha = 10$*;*
(а) — $n_0 = 0.5, \sigma_0 = 0.8, T = 3000$*, (б) —* $n_0 = 1.2, \sigma_0 = 1.2, T = 1200$*,(в) —* $n_0 = 1.6, \sigma_0 = 1.2, T = 500$

Заключение

Таким образом, в настоящей работе проведена спецификация форм бактериальных паттернов при вариациях динамических режимов роста, определяемых управляющими параметрами модели. Вычислительные эксперименты проводились в рамках численной реализации модифицированной реакционно-диффузионной модели эволюции бактериальных паттернов, которая позволяет формализовать пространственно-временные распределения концентраций биомассы и питательного субстрата. Установлено, что возникновение режимов (дендритный, «цветочный», гомогенный и комбинированный) обуславливается начальными условиями и значениями параметров модели. Кроме того, присутствующий в биосистемах эффект запаздывания не влияет на формируемые типы паттернов, однако запаздывание приводит к

изменению диапазонов значений управляющих параметров. Перспективу развития исследований составляет реализация гибридной модели бактериального роста, управляемого «чувством кворума» [9].

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 122082400001-8).

Литература

1. *Ben-Jacob E.* Social behavior of bacteria: from physics to complex organization / E. Ben-Jacob // European Physical Journal B. – 2008. – Т. 65. – С. 315–322.

2. *Eberl H. J.* A transient density-dependent diffusion-reaction model for the limitation of antibiotic penetration in biofilms / H. J. Eberl, M. A. Efendiev // Electronic Journal of Differential Equations. – 2003. – № 10. – С. 123–142.

3. *Kawasaki K.* Modeling spatio-temporal patterns generated by Bacillus subtilis / K. Kawasaki, A. Mochizuki, M. Matsushita, T. Umeda, N. Shigesada // Journal of Theoretical Biology. – 1997. – № 188. – С. 177–185.

4. *Шевкун И. А.* Вариация моделей дендритоподобной морфологии бактериальных культур: численная реализация в рамках реакционно-диффузионного приближения / И. А. Шевкун, А. Г. Масловская // Вестник АмГУ. Серия: Естественные и экономические науки. – 2023. – № 101. – С. 30–39.

5. *Масловская А. Г.* Адаптированные алгоритмы интеллектуальной спецификации скейлинговых характеристик морфологии культивированных бактерий / А. Г. Масловская, В. О. Салмиянов, И. А. Шевкун // Информатика и системы управления. – 2023. – № 4(78). – С. 75-89.

6. *Ellermeyer S.* Theoretical and empirical investigation of delayed growth response in the continuous culture of bacteria / S. Ellermeyer, J. Hendrix, N. A. Ghoochan // Journal of Theoretical Biology. – 2003. – Т. 222, № 4. – С. 485–494.

7. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. – Новосибирск : Наука, 1967. – 196 с.

8. *Xiong L.* Flower-like patterns in multi-species bacterial colonies / L. Xiong, Y. Cao, R. Cooper, W.-J. Rappel, J. Hasty, L. Tsimring // eLife. – Режим доступа: https://elifesciences.org/articles/48885 (дата обращения: 21.11.2024).

9. *Shuai Y.* 2D reaction-diffusion model of quorum sensing characteristics during all phases of bacterial growth / Y. Shuai, A. Maslovskaya, C. Kuttler // Far Eastern Mathematical Journal/ – 2022. – V. 22, No 2. – P. 232–237.

УДК 519.86

ПРЕДЕЛЫ ТЕОРИИ МАТЧИНГА НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

М. А. Шмелев

Воронежский государственный университет

Аннотация. Рассматривается концепция параметрического матчинга на основе нечетких предпочтений. Теория нечеткого матчинга основывается на снятии ограничений теории паросочетаний. Утверждается, что она может найти применение в самых разных практических областях. Основной вопрос к данной теории на текущий момент состоит в унификации и сравнении разнородных сущностей. В работе проводится краткий анализ концепции нечеткого параметрического матчинга. Также предлагаются наработки в рамках дальнейшего развития теории, основанные на получении нечетких функций принадлежности с помощью последовательного метода обратных функций.
Ключевые слова: матчинг, нечеткая логика, соответствие, унификация компонент, агрегирование, интегральные операторы, нечеткие функции принадлежности, метод обратных функций.

Введение

Представители самых разных специальностей имеют дело с задачами, где нужно определить наилучшее возможное решение. К примеру, инженеры-технологи стараются рационализировать организацию производства, чтобы выпускать большее количество товаров, а экономисты стараются минимизировать транспортные издержки, планируя взаимодействие завода с поставщиками сырья. То есть, задачи на оптимизацию связаны с теорией принятия решений.

Одной из разновидностей векторной оптимизации является задача матчинга. В такой задаче происходит сопоставление двух видов объектов, обладающих некоторыми характеристиками. Задачам поиска наилучшего соответствия между компонентами рассматриваемых векторов посвятил свои научные труды Элвин Рот. Одна из самых известных работ Рота посвящена распределению интернов (выпускников медицинских высших учебных заведений) по рабочим местам в больницах [1].

Особый интерес вызывает концепция параметрического матчинга на основе нечетких предпочтений (далее — теория нечеткого матчинга), предложенная совсем недавно. Её применение опирается на теорию графов: решение конкретной задачи сводится к выбору оптимальных отношений на двудольном графе [2, 3]. Утверждается, что данный подход может найти свое применение в самых разных практических областях.

Предлагаемый для изучения доклад посвящен рассмотрению концепции параметрического матчинга в условиях неоднородности компонент векторов, определению пределов ее возможного применения. Также предлагаются собственные наработки, позволяющие развить рассматриваемую теорию.

1. Анализ теории

Описание теории нечеткого матчинга в [3] начинается с допущения, что можно снять некоторые ограничения теории паросочетаний. Такой ход является достаточно опасным, так как не учитывает специфику применения теории Рота. Прежде всего, теория игр подразумевает автономное, рациональное поведение «экономического человека» (термин, введенный английским экономистом Джоном Стюартом Миллем). Применение теории характерно в задачах с большой неопределенностью (о действиях других субъектов), там, где отсутствует время.

Моделирование той или иной области исходит из того, что участвующие субъекты действуют строго по определенным правилам, чтобы достичь максимальной полезности. Так бывает не всегда, чему пример — периодические кризисы в современной рыночной экономике.

Анализируемая концепция нечеткого матчинга основывается на бесконечнозначной, нечеткой логике. Предлагается рассматривать не точные значения параметров определенных векторов, а нечеткие подмножества допустимых значений характеристик вершин каждой доли графа [3]. Ранее оговаривается, что унификация сопоставляемых компонент векторов нужна для реализации процедуры матчинга. Основной вопрос к теории нечеткого матчинга на текущий момент состоит в унификации и сравнении разнородных сущностей. Ведь в статье [4] подразумевается, что разнородность агрегируемых компонент создает трудности в использовании процедур агрегирования для получения интегральной скалярной характеристики.

К тому же моделирование той или иной предметной области не всегда определяется только количественными показателями. Перспективы применения теории в области медицинской диагностики, оценки качества образования туманны. Качество образовательного процесса не сводимо лишь к оценкам, а медицинские диагнозы выставляются по определенным прецедентам, что не сводимо к нахождению соответствий.

Теория нечеткого матчинга детально описана для области электронной коммерции и активно применяется в этой сфере. Заметим, что уже в 18 веке французский экономист Жак Тюрго в основу своего экономического анализа положил желания покупателей и потребителей. Он утверждал, что соотношение потребностей определяет цену товара. Идеи Тюрго были предтечей появления неолиберальной экономической мысли. Методология исследования конкретных экономических проблем другого французского экономиста Антуана Курно сыграла свою роль в зарождении теории игр, полагающейся на рациональное поведение индивидов.

Однако применение концепции нечеткого матчинга в сфере торговли, электронной коммерции также базируется на определенных допущениях. При таком рассмотрении множества продавцов и покупателей не пересекаются, так как рассматривается строго двудольный граф. Также в качестве целевой функции выбора рассматривается только максимизация прибыли. Причем эта прибыль определяется только в сфере обращения, без использования трудовой теории стоимости. На текущий момент не определено, как совместить применение теории нечеткого матчинга с трудовой теорией стоимости в области экономики.

Для учета нечеткости целесообразно применять интегральные операторы. Они позволяют моделировать взаимодействие параметров в отличие от семейства средних операторов [5]. В статье [6] показано, что применение интеграла Шоке в связке с нечеткой мерой Сугено в области электронной торговли дает лучший результат, чем среднее арифметическое.

Далее будут предложены наработки для развития теории нечеткого матчинга, определяющие нечеткость в рамках объекта моделирования.

2. Построение нечетких функций принадлежности

Для формализации нечеткости опишем процедуру генерации векторов в общем виде. Для характеристики каждого объекта моделирования введем $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, где каждый из параметров вектора будет нечетким. Это свойство отображают нечеткие функции принадлежности. Каждый из параметров задается на условной шкале [0;1] тройкой вида $(a; M; b)$, где a и b — границы носителя треугольной функции, M — мода. На границах функция равна нулю, а в моде равна 1.

Для генерации нечетких функций принадлежности также используется последовательный метод обратных функций [7]. Последовательный метод обратных функций заключается в том, что каждому значению из заданной таблицы распределения можно сопоставить интервал, равный по длине его вероятности. Используются следующие формулы:

$$s_0 = 0,\ s_n = 1;\ s_i = s_{i-1} + p_i, \quad (1)$$

где s_i — накопленные вероятности, с которыми сравнивается конкретное значение x в цикле, пока первый раз не реализуется неравенство $x \le s_i$. Полученное значение i позволит с помощью модифицированной таблицы найти моду M.

Однако сама процедура генерации может отличаться для независимых и зависимых параметров. Покажем алгоритм получения тройки $(a;M;b)$ для независимых параметров в общем виде. Определимся, что этот параметр имитируется с использованием генератора дискретного распределения вероятностей. Также примем, что все значения нормированы для общности рассуждений. Процесс получения нечеткой функции принадлежности удобно рассматривать с помощью диаграммы состояний, как показано на рис. 1.

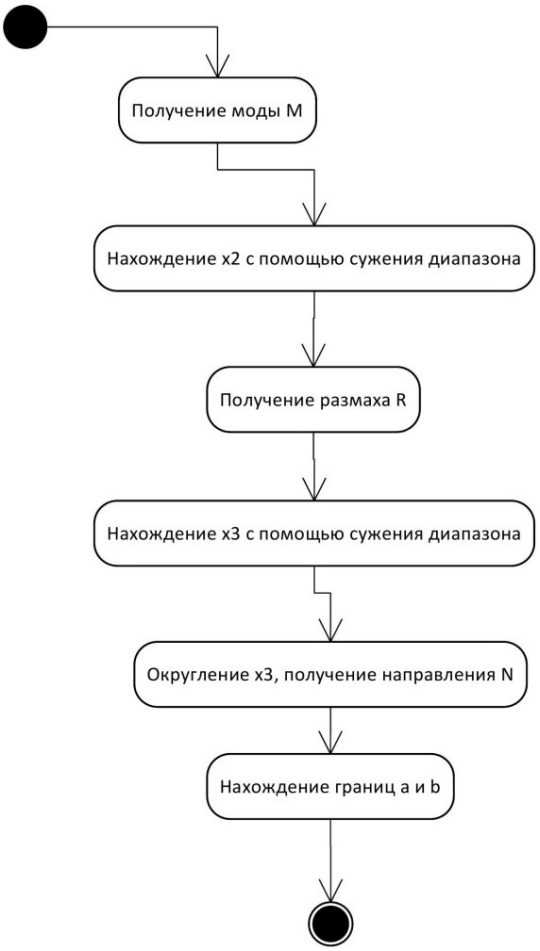


Рис. 1. Получение нечеткой функции принадлежности

Рассмотрим этапы алгоритма для получения нечеткой функции принадлежности на примере независимого параметра, который принимает значения от 0 до 1 с шагом 0,1:

1. Нахождение моды M.

С помощью генератора случайных чисел получаем конкретное значение x на интервале [0;1]. На основе заданного распределения и последовательного метода обратных функций находим моду. Для строгости рассуждений отметим, что значения размаха R и направления N, как и моды M, могут принимать значения от 0 до 1 с шагом 0,1.

2. Определение размаха R.

Размах треугольной функции $(a;M;b)$ определяется как $R = b - a$.

Получение нового значения $x2$ будем называть операцией сужения диапазона. При нахождении нового значения с помощью операции сужения диапазона предварительно определяет-

ся, в каком из интервалов размером k находится x. Затем применяется формула сужения диапазона.

После получения моды M вычисляем новое значение $x2$:

$$x2 = \frac{x - \tilde{a}}{k}, \quad (2)$$

где $\tilde{a}$ — левая граница интервала, в которой находится x; k — параметр сужения (стандартно значение $k = 0,2$).

После нахождения $x2$ интервал [0;1] делим на одиннадцать промежутков для нахождения R, так как рассматриваются значения от 0 до 1 с шагом 0,1. Задано, что нулю сопоставляется интервал длиной 0,01 в интервале [0;1]; всем остальным возможным значениям соответствуют интервалы равной длины (таких равных интервалов десять). Следовательно, при генерации тройки вероятность получить значение размаха, равное нулю, крайне мала. Получаем размах R на основе $x2$ также с помощью последовательного метода обратных функций.

3. Определение направления N.

Направление определяет, в каких пропорциях слева и справа от моды распределится размах.

Опишем получение направления N. С помощью операции сужения диапазона над значением $x2$ получаем $x3$. Округляя полученное значение $x3$ до десятых, находим направление N.

4. Нахождение a и b.

С помощью формул $a = M - R \cdot N$; $b = a + R$ находят границы треугольной функции принадлежности. Для a и b задействуется округление до десятых. Если получилось $a < 0$, то a приравнивают к нулю. Если $b > 1$, то b приравнивают к единице. Ограничения обусловлены тем, что функция принадлежности задается на интервале [0;1].

Заключение

В заключении стоит отметить, что применение математических методов в самых разных сферах деятельности позволяет решать насущные задачи, стоящие пред обществом и государством. Теория принятия решений оказывается во многих случаях полезной и актуальной.

Теория нечеткого матчинга, анализу которой посвящен доклад, вызывает неподдельный интерес в области решения задач оптимизации. В рамках краткого анализа рассмотрены пределы возможного применения концепции параметрического матчинга на основе нечетких предпочтений. Также определено направление будущих исследований для дальнейшего развития теории.

Литература

1. *Roth A. E., Sotomayor M.* Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis / Cambridge University Press, 1990.

2. *Матвеев М. Г.* Концепция матчинга на основе моделирования нечетких предпочтений / М. Г. Матвеев, Н. А. Алейникова, А. А. Громковский, В. В. Коротков // Инженерные технологии. – 2023. – № 4. – С. 43–56.

3. *Матвеев М. Г.* Принятие решений в организационных системах с выбором пар на двудольном графе / М. Г. Матвеев, Н. А. Алейникова, А. А. Громковский, В. В. Коротков // Информатика: проблемы, методы, технологии: сборник материалов XXII международной научно-практической конференции (14–15 февраля 2024 г.) – Воронеж, ВГУ, 2024. – С. 4–21.

4. *Матвеев М. Г.* Информационные технологии формирования сервисов на электронной торговой площадке / М. Г. Матвеев, М. А. Шмелев, Н. А. Алейникова // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2021. – № 1. – С. 63–73. DOI: 10.17308/sait.2021.1/3371

5. *Леденева Т. М.* Обзор основных классов операторов порядкового взвешенного агрегирования / Т. М. Леденева, И. Н. Левкина // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2022. – №. 1. – С. 5–31. DOI: 10.17308/sait.2022.1/9198

6. *Шмелев М. А.* Имитационное моделирование поведения различных типов потребителей на основе экспертного подхода / М. А. Шмелев, М. Г. Матвеев // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2023. – № 2. – С. 91–99.

7. *Некруткин В. В.* Моделирование случайности / Кафедра статистического моделирования, матмех СПбГУ. Материал к специальному курсу. – 2017. – 111 с.

УДК 519.688

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО НАВИГАЦИИ ГРУППЫ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ ПОДВОДНЫХ АППАРАТОВ С ЛИДЕРОМ

А. Ф. Щербатюк[1], В. М. Кузькин[2], С. А. Переселков[3], Н. В. Ладыкин[3]

[1]Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН
[2]Институт проблем морских технологий ДВО РАН
[3]Воронежский государственный университет

Аннотация. В работе проведено исследование эффективности навигации группы автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) на основе метода фильтра частиц. Рассмотрена организация группы, включающей АНПА-лидера и специализированные подводные аппараты (СПА), выполняющие общую миссию в мелководной акватории. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие высокую точность и работоспособность предложенного метода в условиях ограниченной акватории.
Ключевые слова: навигационное обеспечение, автономный необитаемый подводный аппарат, фильтр частиц, численное моделирование, групповая навигация.

Введение

Современные задачи исследования и освоения морских акваторий все чаще требуют применения групп автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА). Групповая работа АНПА эффективна при выполнении миссий по мониторингу окружающей среды, поиску и спасению, инспекции подводных сооружений и отслеживанию морских объектов. Однако использование группы АНПА вызывает новые сложности в навигационном обеспечении, поскольку традиционные методы навигации одиночных аппаратов не подходят для коллективных операций. Одним из перспективных подходов к решению этой проблемы является использование лидера группы — АНПА, оснащенного высокоточными средствами навигации. Лидер может регулярно уточнять свое местоположение с помощью спутниковых навигационных систем и передавать эту информацию остальным аппаратам. В данной работе исследуется эффективность навигации группы подводных аппаратов на основе метода фильтра частиц, который позволяет учитывать нелинейности и неопределенности в данных измерений.

1. Постановка задачи

Необходимо разработать метод навигационного обеспечения группы СПА, выполняющих совместную миссию в мелководной акватории. Группа состоит из: АНПА-лидера, оснащенного высокоточными средствами навигации, способного периодически уточнять свое местоположение. А также СПА, имеющих базовые навигационные датчики для измерения глубины, угловой ориентации и относительной скорости движения. Все аппараты оборудованы гидроакустическими модемами и имеют синхронизированные часы. Они обмениваются навигационными пакетами, содержащими временные метки, текущие координаты и параметры движения. Цель состоит в оценивании местоположения каждого СПА на основе измерения дальностей до лидера и между собой, используя метод фильтра частиц для обработки информации.

2. Математическая модель метода навигации группы АНПА

Для определения координат СПА на борту АНПА путем измерения гидроакустической системой связи задержек распространения звукового сигнала между СПА и АНПА формируется

информация о дальностях D_{lk} и взаимных дальностях между СПА D_{ljk}, где $l, j = \overline{1, L}$, L — число СПА, k — номер текущего шага работы навигационной системы. Соотношения, которые связывают дальности и координаты АНПА (x_{Ak}, y_{Ak}, z_{Ak}) и СПА (x_{lk}, y_{lk}, z_{lk}), имеют вид:

$$D_{lk}^2 = (x_{Ak} - x_{lk})^2 + (y_{Ak} - y_{lk})^2 + (z_{Ak} - z_{lk})^2, \quad (1)$$

$$D_{ljk}^2 = (x_{jk} - x_{lk})^2 + (y_{jk} - y_{lk})^2 + (z_{jk} - z_{lk})^2. \quad (2)$$

Обозначим через Δ временной интервал между излучениями отдельных аппаратов, тогда один такт работы занимает время $T = (L+1)\Delta$. Если, группа локализована в районе диаметром 600 м и включает $L = 4$ СПА, тогда временной интервал Δ равен 0.8 с. Один такт работы описываемой навигационной системой, составляет $T = 4$ с. Аппараты движутся в ограниченной области акватории, и перемещение за время одного такта считается незначительным, что позволяет упрощать расчеты.

В начальный момент времени все СПА находятся на поверхности и их координаты определяются с помощью спутниковой навигационной системы с известной ошибкой σ_1. Фактические координаты l-го СПА $(x_l(t), y_l(t))$ связаны с фактическими значениями модуля скорости $u_l(t)$ и курса $\phi_l(t)$ кинематическими уравнениями:

$$x_l'(t) = u_{lx}(t), \quad y_l'(t) = u_{ly}(t), \quad (3)$$

$$u_{lx}(t) = u_l(t)\cos\phi_l(t), \quad u_{ly}(t) = u_l(t)\sin\phi_l(t). \quad (4)$$

где $\widehat{u_l}(t)$ и $\widehat{\phi_l}(t)$ — измерения скорости и курса СПА; ξ_u и ξ_ϕ — случайные ошибки измерения относительной скорости и курса СПА; $w(t)$ — скорость течения в районе работ. Для каждого СПА задача сводится к решению системы нелинейных уравнений относительно его координат, с учетом ограничений на область неопределенности, заданную ковариационной матрицей ошибок предыдущего шага.

Метод фильтра частиц применяется для оценивания местоположения СПА, учитывая нелинейности и неопределенности в измерениях. Алгоритм включает два основных этапа этап предсказания и этап коррекции. На этапе предсказания на основе модели движения аппарата и предыдущего состояния предсказываются новые позиции частиц. Для каждого СПА используются уравнения движения:

$$\hat{x}_{lk} = \sum_{i=1}^{I} x_{lki} p_{lki}, \quad \hat{y}_{lk} = \sum_{i=1}^{I} y_{lki} p_{lki}. \quad (5)$$

Эта коррекции следует после получения новых измерений дальностей обновляются веса частиц по формуле:

$$Q_k = \sum_{i=1}^{I} p_{lki} (X_{lki} - \widehat{X}_{lk})(X_{lki} - \widehat{X}_{lk})^T. \quad (6)$$

Частицы с малыми весами отбрасываются, а на их месте генерируются новые вблизи частиц с большими весами, что соответствует механизму выборки с восстановлением. Нужно также учитывать особенности реализации алгоритма. При реализации алгоритма учитываются синхронизация времени: необходима для корректного измерения задержек сигналов, ошибки измерений: моделируются случайные ошибки в определении времени прихода сигналов, скорости распространения звука, скорости и курса СПА, а также ыбор количества частиц: определяется балансом между точностью оценок и вычислительными ресурсами. Также предполагается, что АНПА и группа СПА выполняют поставленную задачу в мелководной акватории и имеется возможность периодически получать текущие координаты АНПА с помощью спутника.

3. Результаты численного моделирования

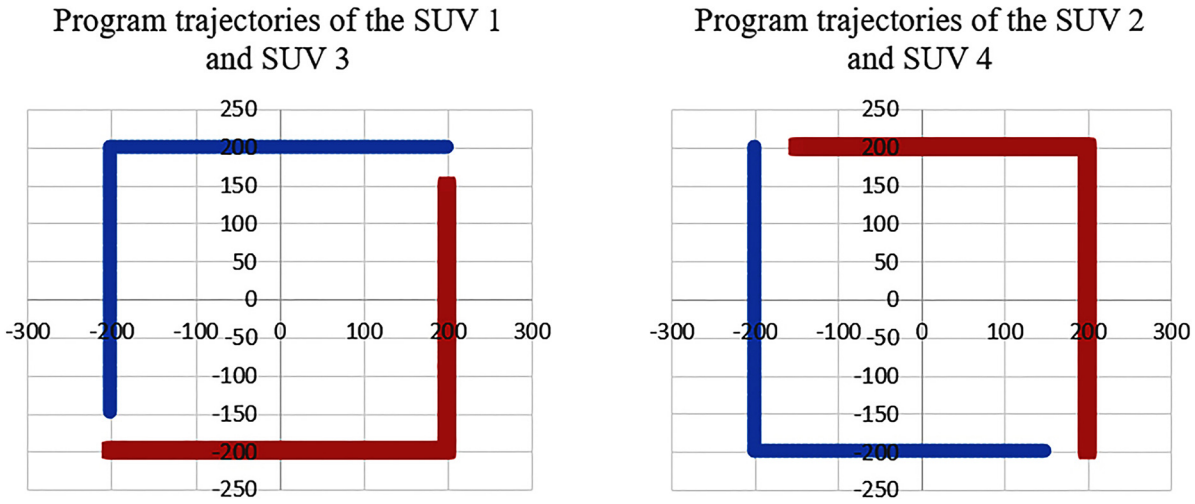


Рис. 1. Программные траектории движения СПА1-4 в течение 150 тактов

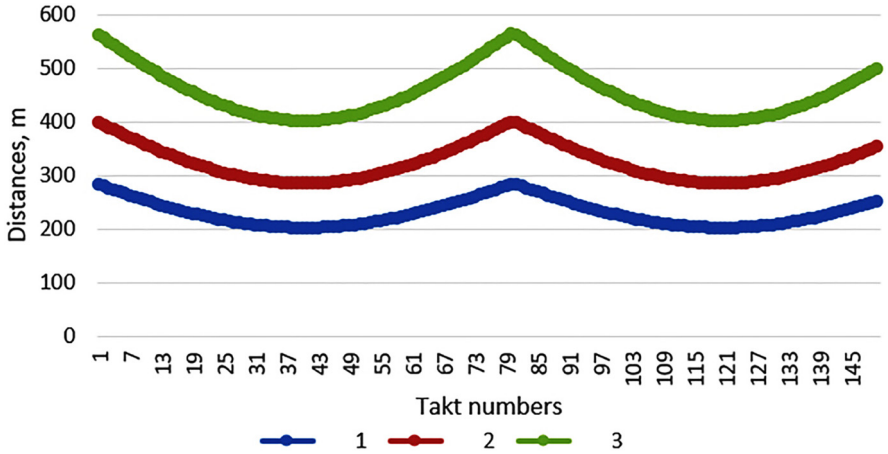


Рис. 2. СПА1-4 (ряд 1), соседними СПА (ряд 2)пи не соседними СПА (ряд 3) в течение 150 тактов

Проведено численное моделирование работы алгоритма для группы, состоящей из АНПА-лидера и четырех СПА. Исходные данные включают начальные положения лидера и СПА, заданные в координатной системе. Аппараты движутся по заданным траекториям с постоянными скоростями и курсами, при этом в измерениях дальностей, скоростей и курсов учитываются случайные ошибки. В разделе 3 представлены настройки моделирования, в которых количество частиц для каждого СПА установлено равным 1000, временной шаг составляет один такт работы системы $T = 4$ секунды, а продолжительность моделирования охватывает 150 тактов. На рисунке представлены положения СПА 1-4 в течение 150 тактов, сгруппированные по соседним и не соседним СПА.

Далее в разделе 3 проведен анализ результатов, где оценка точности и работоспособности навигационного алгоритма определения местоположения СПА выполнена с использованием фильтра частиц (ФЧ) в рамках численного моделирования. Модельные эксперименты были осуществлены в среде IDLE (Python 3.12 64-bit). Результаты моделирования продемонстрировали, что средняя ошибка определения координат СПА не превышает 3 метров. Также было установлено, что фильтр частиц эффективно корректирует оценки местоположения, несмотря на наличие ошибок измерений, что свидетельствует о сходимости алгоритма. Кроме того,

выявлено, что увеличение числа частиц повышает точность определения местоположения, однако одновременно увеличивает вычислительную нагрузку.

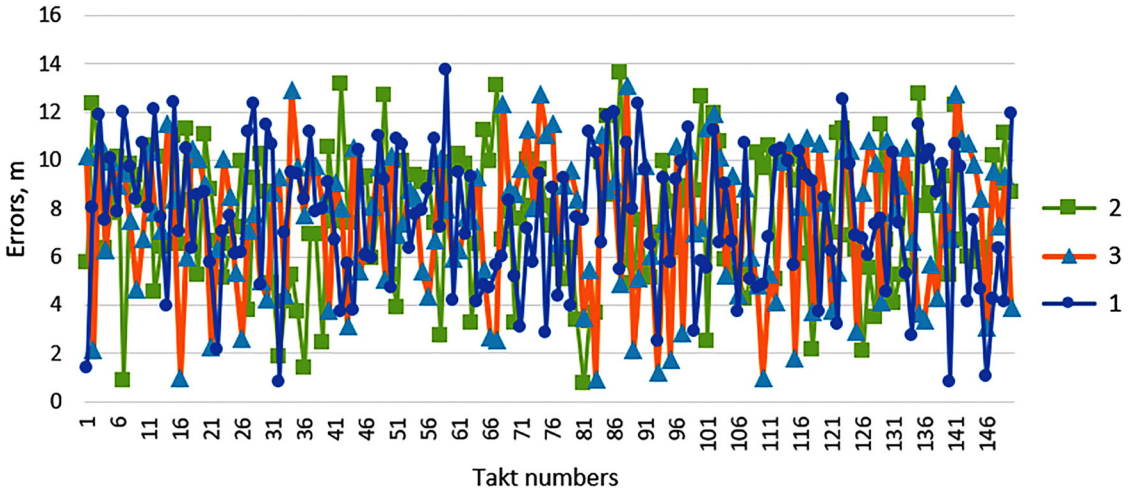


Рис. 3. Ошибка оценивания местоположения СПА1-3 (ряд 1-3) в течение 150 тактов работы системы

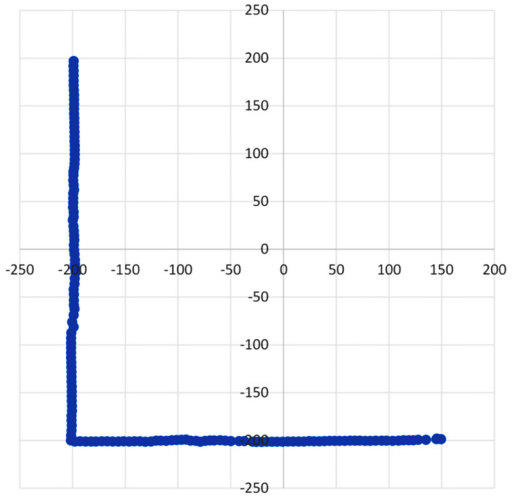


Рис. 4. Оценка траектории движения СПА4 в течение 150 тактов работы системы

На рис. 4 представлена оценка траектории СПА, что демонстрирует хорошее соответствие оценок реальным положениям аппаратов. Пройденный путь составил около 750 метров, а время в пути — примерно 12,5 минут. Из результатов моделирования следует, что ошибка определения местоположения СПА4 без коррекции за указанное время движения составляет около 30 метров, а с коррекцией не превышает 10 метров.

Заключение

Исследование показало, что использование метода фильтра частиц для навигации группы подводных аппаратов обеспечивает высокую точность позиционирования в условиях ограниченных навигационных средств и наличия ошибок измерений. Предложенный метод эффективен для мелководных акваторий и может быть применен в различных подводных миссиях, требующих координированной работы группы АНПА. Дальнейшие исследования будут направлены на учет влияния подводных течений, изменение скорости звука в воде и других факторов, способных повлиять на точность навигации. Планируется оптимизация алгоритма с точки зрения вычислительных ресурсов для его реализации в реальном времени.

Также авторы планируют разработать метод групповой навигации на основе голографической обработки широкополосных гидроакустических сигналов (ГОС) [3–30]. Это один из наиболее эффективных методов обработки гидроакустических сигналов в океанических волноводах. Теоретические и математические основы ГОС для океанических волноводов изложены в работах [3–8]. В исследовании [6] метод ГОС был адаптирован для шумовых источников, а в [7, 8] анализировалось его применение в низкочастотных диапазонах. В работах [9, 10] изучены возможности разрешения нескольких источников при использовании ГОС, а в [11–18] исследована устойчивость метода в присутствии внутренних волн. Адаптивные алгоритмы ГОС развиты в работах [19–21]. Применение ГОС к антенной обработке сигналов описано в работах [21–23]. Модовая селекция в мелководных волноводах на основе ГОС проанализирована в [25–27]. Применение ГОС в групповой навигации подводных аппаратов предоставляет дополнительные возможности и позволит решить эти навигационные задачи более эффективно.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-61-10024, https://rscf.ru/project/23-61-10024/

Литература

1. *Ваулин Ю. В.* О методах обеспечения навигации групп АНПА: Краткий обзор / Ф. С. Дубровин, Д. А. Щербатюк, А. Ф. Щербатюк // Подводные исследования и робототехника. – 2019. – № 4 (30). – С. 27–36. – https://doi.org/ 10.25808/24094609.2019.30.4.004.

2. *Gustafsson F.* Particle filters for positioning, navigation and tracking / N. Bergman, U. Forssell, J. Jansson, R. Karlsson, P.-J. Nordlund // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2002. – Vol. 50, No 2. – P. 425–437. https://doi.org/10.1109/78.978396.

3. *Кузькин В. М.* Спектрограмма и локализация источника звука в мелководном море / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, Г. Н. Кузнецов // Акустический журнал. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 406–418.

4. *Кузькин В. М.* Обнаружение источника в диспергирующих средах / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, Ю. В. Матвиенко, С. А. Ткаченко // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 337–344.

5. *Kuz'kin V. M.* Noise source detection in an oceanic waveguide using interferometric processing / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, Y. V. Matvienko, G. A. Lyakhov, S. A. Tkachenko // Phys. Wave Phenom. – 2020. – Vol. 28, № 1. – P. 68–74.

6. *Pereselkov S. A.* Interferometric processing of hydroacoustic signals for the purpose of source localization / S. Pereselkov, V. Kuz'kin // Acoust. Soc. Am. – 2022, – Vol. 151 – P. 666–676.

7. *Ehrhardt M.* Experimental observation and theoretical analysis of the low-frequency source interferogram and hologram in shallow water / M. Ehrhardt, S. A. Pereselkov, V. M. Kuz'kin, I. Kaznacheev, P. Rybyanets / J. Sound Vibr. – 2023. – 544 – C. 117388.

8. *Kuz'kin V. M.* Resolving power of the interferometric method of source localization / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, G. N. Kuznetsov, V. A. Grigor'ev // Phys. Wave Phenom. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 150–159.

9. *Кузькин В. М.* Разрешение шумовых сигналов при наличии случайных неоднородностей океанической среды / В. М. Кузькин, С. А. Переселков, В. И. Грачев, П. В. Рыбянец, С. А. Ткаченко // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2024. – Т. 16, № 3. – С. 395–406.

10. *Kuz'kin V. M.* Intense internal waves and their manifestation in interference patterns of received signals on oceanic shelf / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, V. G. Zvyagin, Yu. A. Malykhin, D. Yu. Prosovetskiy // Physics of Wave Phenomena. – 2018. – Vol. 26, № 2. – P. 160–167.

11. *Badiey M.* Intense internal waves and their manifestation in the interference patterns of received signals on oceanic shelf. Part II / M. Badiey, V. M. Kuz'kin, G. A. Lyakhov, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskiy // Phys. Wave Phenom. – 2019. – Vol. 27, № 4. – P. 313–319.

12. *Kaznacheeva E. S.* Interferometric processing of hydroacoustic information in the presence of intense internal waves / E. S. Kaznacheeva, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov // Physics of Wave Phenomena. – 2021. – Vol. 29, № 3. – P. 278–284.

13. *Kuz'kin V. M.* Robustness of holographic processing of hydroacoustic signals in the presence of intense internal waves / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, M. Badiey, N. V. Ladykin, A. Yu. Malykhin, S. A. Tkachenko // Physics of Wave Phenomen. – 2023. – Vol. 31, № 5. – P. 346–354.

14. *Badiey M.* Interferometry of hydrodynamics of oceanic shelf caused by intensive internal waves / M. Badiey, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov // Fundam. Appl. Hydrophys. – 2020. – Vol. 1 – P. 45–55.

15. *Кузькин В. М.* Голографическая обработка движущихся источников в мелком море при наличии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, П. В.Рыбянец // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 2 – С. 197–204.

16. *Кузькин В. М.* Голографический метод локализации движущегося источника звука в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, Н. В. Ладыкин, М. В. Куцов // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2023. – Т. 15, № 3 – С. 317–326.

17. *Pereselkov S.* Three-dimensional modeling of sound field holograms of a moving source in the presence of internal waves causing horizontal refraction / S. Pereselkov, V. Kuz'kin, M. Ehrhardt, S. Tkachenko, P. Rybyanets, N. Ladykin // J. Mar. Sci. Eng. – 2023. – Vol. 11 – P. 1922.

18. *Кузькин В. М.* Интерферометрическая обработка с использованием вертикальной линейной антенны / В. М. Кузькин, Ю. В. Матвиенко, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 2 – С. 14–23.

19. *Кузькин В. М.* Реализация адаптивного интерферометрического метода локализации источника звука. II часть / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, С. А. Ткаченко, И. В. Казначеев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2020. – № 1 – С. 14–23.

20. *Pereselkov S.* Adaptive Algorithms for Interferometric Processing / S. Pereselkov, V. Kuz'kin, G. Lyakhov, S. Tkachenko, E. Kaznacheeva // Phys. Wave Phenom. – 2020. – № 28. – С. 267–273.

21. *Кузькин В. М.* Интерферометрическая обработка акустической информации с использованием протяженных антенн в диспергирующих средах / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, С. А. Ткаченко, И. В. Казначеев // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2020. – Т. 12, № 4 – С. 483–494.

22. *Кузькин В. М.* Обнаружение шумового сигнала в океаническом волноводе горизонтальной антенной / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Ю. В. Матвиенко, С. А. Ткаченко, Д. Ю. Просовецкий // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 1 – С. 65–72.

23. *Kuz'kin V. M.* Mode selection in oceanic waveguides / V. M. Kuz'kin, Yu. V. Matvienko, S. A. Pereselkov, D. Yu. Prosovetskii, E. S. Kaznacheeva // Physics of Wave Phenomena. – 2022 – Vol. 30, № 2. – P. 111–118.

24. *Kuz'kin V. M.* Holographic method for mode selection in a shallow sea in the presence of intense internal waves / V. M. Kuz'kin, Yu. V. Matvienko, S. A. Pereselkov, E. S. Kaznacheeva, S. A. Tkachenko // Physics of Wave Phenomena. – 2022 – Vol. 30, № 5. – P. 314–320.

25. *Кузькин В. М.* Выделение мод шумового источника в мелком море методом голографической интерферометрии в присутствии интенсивных внутренних волн / В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков, Е. С. Казначеева, В. И. Грачев, С. А. Ткаченко, П. В. Рыбянец // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2022. – Т. 14, № 3. – С. 279–286.

26. *Казначеев И. В.* Интерферометрический метод обнаружения движущегося источника звука векторно-скалярным приемником / И. В. Казначеев, Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, С. А. Пересёлков // Акуст. журн. – 2018. – Т.64, № 1. – С. 33–45.

27. *Kuznetsov G. N.* Interferometric method for estimating the velocity of a noise sound source and the distance to it in shallow water using a vector-scalar receiver / G. N. Kuznetsov, V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, I. V. Kaznacheev, V. A. Grigor'ev // Phys. Wave Phenom. – 2017. – Vol. 25, № 4. – P. 299–306.

28. *Kuz'kin V. M.* Interferometric direction finding by a vector-scalar receiver / V. M. Kuz'kin, S. A. Pereselkov, G. N. Kuznetsov, I. V. Kaznacheev // Physics of Wave Phenomena. – 2018. – Vol. 26, № 1. – P. 63–73.

29. *Переселков С. А.* Интерференционный метод оценки координат движущегося шумового источника в мелком море с использованием высокочастотных сигналов / С. А. Переселков, В. М. Кузькин, Г. Н. Кузнецов, Д. Ю. Просовецкий, С. А. Ткаченко // Акустический журнал. – 2020. – Т. 66, № 4. – С. 437–445.

30. *Кузнецов Г. Н.* Интерференционная структура шумового поля движущегося источника в высокочастотном диапазоне / Г. Н. Кузнецов, В. М. Кузькин, М. В. Куцов, С. А. Переселков // Известия РАН. Серия физическая. – 2021. – Т. 85, № 6. – С. 907–912.